



# СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Часть 1

Кызыл  
2022

ФГБОУ ВО «Тувинский государственный университет»

**СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ**

**Часть 1**

*практикум*

*для студентов 1 курса Кызылского педагогического колледжа  
специальностей 49.02.01 физическая культура, 49.02.02  
адаптивная физическая культура*

КЫЗЫЛ 2022

УДК 51 (076.5)  
ББК 22.1я72.3  
С 23

Печатается по решению Учебно-методического совета Тувинского государственного университета

Рецензенты:

Ш.Х. Донгак, заместитель директора по учебной работе в старших классах, учитель математики МБОУ СОШ № 12 имени Воинов- интернационалистов г. Кызыл, высшая квалификационная категория;

П.М. Тапшыпан, кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики ФГБОУ ВО «Тувинский государственный университет».

**Сборник упражнений по математике: практикум для студентов 1 курса** Кызылского педагогического колледжа специальностей 49.02.01 «Физическая культура», 49.02.02 «Адаптивная физическая культура» / составитель К. К. Монгуш. – Часть 1. – Кызыл.: Издательство ТувГУ, 2022. – 70 с. – Текст: непосредственный.

Настоящий сборник упражнений составлен в соответствии с утвержденной программой курса математики для студентов специальности 49.02.01 «Физическая культура» и 49.02.02 «Адаптивная физическая культура».

В сборник включены упражнения по следующим разделам программы по дисциплине «Математика»: элементы математической логики, элементы теории вероятностей.

Особое внимание автор работы уделил подбору упражнений профессиональной направленности, которые будут способствовать углублению интереса к будущей специальности и закреплению программы курса.

В конце раздела предлагается студенту выполнить творческие задания, чтобы проверить свои знания.

Практикум может быть с успехом использован также студентами специальностей «Преподавание в начальных классах», «Дошкольное образование» и молодыми учителями начальных классов.

©Тувинский государственный университет, 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>Раздел 1. Элементы математической логики</b>	
<b>§ 1. Множества и операции над ними</b>	
Понятие множества и элемента множества .....	6
Способы задания множества .....	10
Отношения между множествами .....	14
Пересечение множеств.....	19
Объединение множеств .....	22
Вычитание множеств. Дополнение множества	
элементов в объединении и разности конечных множеств .	25
Декартово произведение множеств. Число элементов в	
декартовом произведении конечных множеств .....	28
<b>§ 2. Способы обоснования истинности высказываний</b>	
2.1. Высказывание и высказывательные формы .....	30
2.2. Конъюнкция и дизъюнкция высказываний .....	34
2.3. Высказывания с кванторами .....	38
2.3. Отрицание высказываний и высказывательных форм...	41
<b>Раздел 2. Элементы теории вероятностей</b>	
<b>§3. Основные комбинаторные конфигурации</b>	
3.1. Понятие факториала.....	45
3.2. Перестановки без повторов.....	47
3.3. Размещения без повторов.....	49
3.4. Сочетания без повторов.....	51
<b>§4. Способы вычисления вероятности событий</b>	
4.1. Основные понятия и определения .....	53
4.2. Определения вероятности события .....	58
4.3. Операции над событиями .....	61
<b>Творческие задачи</b> .....	65
<b>Задачи на развитие логического мышления и</b>	
<b>сообразительности</b> .....	66
<b>Заключение</b> .....	68
<b>Библиографический список</b> .....	70

## ВВЕДЕНИЕ

В требованиях Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальностям «Физическая культура», «Адаптивная физическая культура» прописаны формирование как общих, так и профессиональных компетенций по всем видам деятельности.

Важная роль в системе подготовки студентов к применению приобретаемых знаний в практических целях играет изучение дисциплины «Математика». Она параллельно с другими дисциплинами и междисциплинарными курсами обеспечивает развитие коммуникативных, личностных, регулятивных и познавательных универсальных учебных действий у студентов.

Говоря о важности математических знаний, повышения качества образования и уровня преподавания, следует выделить, что:

- обеспечение учебниками, учебными пособиями и учебно-методической литературой также является составной частью образовательного процесса;

- для студентов средних профессиональных учебных заведений мало разработаны учебники, на страницах которых отражены практико-ориентированные упражнения, связанные со спецификой формируемой специальности. Таких практикумов рекомендуемых для студентов средних учебных заведений в сети «Интернет» немного.

В настоящее время для студентов колледжа, обучающихся по специальностям «Физическая культура» и «Адаптивная физическая культура», нет отдельного учебника, содержание которого обхватывало бы полный курс учебной программы по дисциплине «Математика» в соответствии с требованиями ФГОС СПО. Тем более многие наши выпускники указанных специальностей планируют продолжить обучение по выбранной специальности в высших учебных заведениях.

Поэтому на сегодняшний день вопрос об обеспечении студентов педагогического колледжа учебно-методической литературой, электронными версиями учебников является одним из самых актуальных.

Таким образом, для обучающихся педагогического колледжа специальностей «Физическая культура», «Адаптивная физическая культура» необходимо издание сборника упражнений, направленных на усиление практико-ориентированной стороны. Во время изучения программного содержания дисциплины у студентов формируются умения и навыки практической работы, они будут знать, где, когда полученные знания он будет использовать в своей будущей работе.

Думаем, что сборник упражнений может стать средством осознания значимости своей будущей профессии, поможет глубже понять суть математических понятий и развивает умения контролировать собственную деятельность.

**Цель:** повышение качества образования, применение математических знаний в решении задач повседневной практики и в дальнейшей профессиональной деятельности.

**Задачи:**

1. Пробуждение и развитие устойчивого интереса к математике;
2. Способствовать формированию общих, профессиональных и математических компетенций;
3. Расширение и углубление знаний по математике.

Предлагаемый практикум для закрепления теоретических знаний разработан для студентов первого курса Кызылского педагогического колледжа специальности 49.02.01 Физическая культура и 49.02.02 Адаптивная физическая культура. Он составлен для учебной дисциплины «Математика» на основе профессиональной образовательной программы по указанным специальностям и предназначена для реализации требований к результатам освоения изучаемой дисциплины по ФГОС среднего профессионального образования.

Для будущих учителей физической культуры более характерным является усиление общекультурной составляющей курса с ориентацией на визуально-образный и практико-ориентированное направление учебной работы.

Математические понятия трудны для усвоения всеми студентами на одинаково высоком уровне. Так как они являются абстрактными свойствами и отношениями реального мира,

который окружает нас. Студенты должны осознать, что основная роль математики при решении практических задач заключается в переводе задач на математическую модель, далее внутримодельное решение и интерпретация их результатов на язык исходных данных.

Данный практикум представляет собой сборник упражнений для решения математических задач с профессиональным содержанием по двум разделам дисциплины: «Элементы математической логики», «Элементы теории вероятностей» и в качестве дидактического материала на занятиях по математике, а также может быть использовано в качестве дополнительного материала при выполнении самостоятельных работ.

В процессе решения задач с профессиональным содержанием предусматривается совершенствование рационального применения теоретических знаний обучающихся к решению практических и производственных задач, развития логического мышления, пространственного воображения, вычислительных навыков.

Предлагаем данный практикум студентам и других специальностей колледжа как «Преподавание в начальных классах», «Коррекционная педагогика в начальном образовании в связи с тем, что есть темы, которые проходят и они при изучении дисциплины «Математика».

## РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

### § 1. Множества и операции над ними

#### 1.1. Понятие множества и элемента множества

Одним из фундаментальных понятий математики является понятие «множества». С множествами тесно взаимосвязано решение 25 простых задач, которые изучают младшие школьники по программе начальной школы.

#### Упражнения

1. Назовите три элемента заданного множества:

- а) кружков, для учащихся начальной школы;
- б) героев, детских кукол;
- в) мячей;
- г) спортивных снаряжений;
- д) спортивной одежды;
- е) спортивных клубов;
- ж) федераций спорта в Республике Тыва;
- к) спортивных состязаний;
- л) ассоциаций к слову «спорт»;
- м) спортсменов по вольной борьбе Республики Тыва.

2. Определите множество по его элементам:

- а) {конь, пешка, мат, шах};
- б) {баскетбол, биатлон, водное поло, керлинг, сноуборд};
- в) {Спортлэнд, Элит, 1000 мелочей, Спорттовары, Олимп};
- г) {лыжный спорт, биатлон, конькобежный спорт, бобслей, хоккей с шайбой, керлинг};
- д) {Европа, Африка, Америка, Азия, Австралия};
- е) {Кудес Соянович, Аяна Ангыр-ооловна, Роза-Чечек Дозураш уруу, Байыр Байыр-оолович, Григорий Комбу-Сурунович, Шолбан Александрович};
- ж) {легкая атлетика, плавание, теннис, гребля на байдарках и каноэ, бадминтон, велоспорт};
- к) {свисток, сетка, шарик, рулетка, конь, мат};
- л) {3-й разряд, 2-й разряд, 1-й разряд, кандидат в мастера спорта, мастер спорта России, мастер спорта Международного класса};

м) {Москва, Токио, Стокгольм, Амстердам, Пекин, Лос-Анджелес, Лондон, Мельбурн, Мехико, Сидней}.

3. Определите количество элементов заданного множества:

- а) летние виды современных Олимпийских игр;
- б) ноты;
- в) зимние виды современных Олимпийских игр;
- г) олимпийские кольца;
- д) число струн на гитаре;
- е) число дней недели;
- ж) множество колес легкового автомобиля;
- з) баскетбольная команда.

4. Определите виды множеств:

- а) зрители в зале кинотеатра;
- б) множество людей, отлетающих за неделю из аэропорта города Кызыл;
- в) множество студентов 7 курса колледжа;
- г) сказка о семи гномиках;
- д) множество бракованных шин;
- е) множество роз среди тюльпанов;
- ж) множество прошлогодних цветов;
- з) футбольная команда;
- к) множество спортсменов;
- л) множество обманутых людей;
- м) множество выплаканных слез;
- н) множество парней в женской волейбольной команде.

5. Запишите, используя символы:

- а) 18 – натуральное число;
- б) число 234 565 – не целое;
- в) 0 – пустое число;
- г) 37 содержится во множестве действительных чисел;
- д) 789 не принадлежит множеству натуральных чисел;
- е)  $3/111$  рациональное число;
- ж) – 826 целое число;
- з)  $67,23$  – элемент множества рациональных чисел.

6. Выясните истинность заданных утверждений:

- а)  $584 \in \mathbb{N}$ ;
- б)  $-896 \in \mathbb{Z}$ ;
- в)  $59/123 \in \mathbb{Z}$ ;

- г)  $67,009 \notin \mathbb{Q}$ ;    д)  $\sqrt{633} \in \mathbb{R}$ ;    е)  $93,012 \notin \mathbb{N}$ ;  
 ж)  $-43 \in \mathbb{Z}$ ;    з)  $76/99 \in \mathbb{Q}$ ;    к)  $455\,234 \notin \mathbb{R}$ ;  
 л)  $\sqrt{121} \notin \mathbb{N}$ ;    м)  $675 \in \mathbb{Z}$     н)  $79 \notin \mathbb{N}$ .

7. Запишите на математическом языке предложение:

- а) 7818 – элемент множества натуральных чисел;  
 б) 567 865 – не элемент множества целых чисел;  
 в) 0 – содержится в пустом множестве;  
 г) множество действительных чисел содержит элемент  $(-999)$ ;  
 д) 456 не принадлежит множеству натуральных чисел;  
 е)  $17/117$  принадлежит множеству рациональных чисел;  
 ж) 657 содержится в множестве целых чисел;  
 з) 89, 35 – это элемент множества рациональных чисел.

8. Назовите три элемента, не принадлежащие заданному множеству:

- а) множество одноразовых шприцов;  
 б) множество национальных юрт разных народностей;  
 в) множество эстрадных артистов;  
 г) множество спортивных клубов;  
 д) множество детективных романов;  
 е) множество строительных материалов для строительства домов;  
 ж) множество общеобразовательных школ в Республике Тыва;  
 к) множество рек Республики Тыва;  
 л) множество оружий;  
 м) множество кожуунов в Республике Тыва.

9. Прочитайте указанные высказывания и укажите среди них верные:

- а)  $45/877 \in \mathbb{Q}$ ;    б)  $-396 \in \mathbb{Z}$ ;    в)  $45/823 \in \mathbb{Q}$ ;  
 г)  $34,009 \notin \mathbb{Q}$ ;    д)  $\sqrt{625} \in \mathbb{R}$ ;    е)  $562 \notin \mathbb{N}$ ;  
 ж)  $657 \in \mathbb{Z}$ ;    з)  $654 \in \mathbb{N}$ ;    к)  $654\,876 \notin \mathbb{R}$ ;  
 л)  $\sqrt{225} \notin \mathbb{N}$ ;    м)  $28,5 \in \mathbb{Z}$     н)  $4167 \notin \mathbb{N}$ .

10. Задано множество  $\mathbb{R}$ , элементами которого являются натуральные числа, больших 17 и меньше 14. Выясните, какие из чисел 13, 10, 5, 7, 14 ему принадлежат, а какие не принадлежат. Ответ запишите, используя соответствующий знак.

11. В слове «ориентирование» запишите множество букв и множество цифр в записи числа 2 778 563 442.

12. Перечислите три элемента множества футбольных команд.

13. Выясните, принадлежит ли пион множеству комнатных цветов.

14. Определите истинность или ложность предложения: «мизинец – это часть человеческого органа».

15. Является ли множество дней года конечным? Из скольких элементов оно состоит?

16. Выделите конечные и бесконечные множества:

- сказочные герои;
- студент 1 курса колледжа;
- украшения;
- национальные орнаменты;
- боеприпасы солдата;
- страны Европы;
- цветы;
- школьные принадлежности;
- легкоатлетические соревнования, которые проведены федерацией легкой атлетики Республики Тыва;
- ваши друзья.

17. Назовите три элемента множества «Технические средства обучения».

18. Принадлежит ли множеству «Горы» следующие элементы:

- а) Гималаи;
- б) Байкал;
- в) Сингапур;
- г) Саудовская Аравия;
- д) Монгун-Тайга?

19. Выясните верность или ошибочность следующих предложений:

- а) 367 566 принадлежит множеству натуральных чисел;
- б) 23 принадлежит множеству отрицательных чисел;
- в) 45/999 есть рациональное число;
- г) множество натуральных чисел содержится во множестве действительных чисел;

д) множество целых чисел больше чем множество натуральных чисел.

20. Придумайте 3 примера множеств, имеющих у вас в квартире или дома. Назовите его 5 элементов.

### 1.2. Способы задания множества

Существуют два способа задания множеств:

1. Перечисление всех элементов, принадлежащих этому множеству. 2. Формулировка характеристического свойства элементов этого множества, т.е. свойства, которым обладают все элементы данного множества, и только они.

### Упражнения

1. Множество  $D$  состоит из треугольника, трапеция, квадрата и окружности. Установите, принадлежат ли этому множеству:

- а) диагональ квадрата;
- б) медиана треугольника;
- в) радиус окружности;
- г) сам квадрат;
- д) площадь квадрата;
- е) биссектриса треугольника;
- ж) диаметр окружности;
- к) площадь треугольника;
- л) основания трапеции;
- м) стороны треугольника.

2. Запишите с помощью знака равенства и фигурных скобок предложения:

- а)  $X$  – множество чисел 66, 55, 77, 88, 99, 33, 22;
- б)  $Y$  – множество букв а, и, с, d, m, k, u;
- в)  $R$  – множество спортивных игр баскетбол, волейбол, хоккей, гандбол;
- г)  $N$  – множество машин марки жигули, камаз, нива, ока, самосвал;
- д)  $F$  – множество стран, олицетворяющие олим

++++  
++++  
++++



- к) { акула, дельфин, кит, морской конь };  
 л) { 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95 };  
 м) { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 }.

4. Задайте множество перечислением его элементов и запишите на математическом языке:

- а)  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 15 < x < 25\}$ ;  
 б)  $H = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } -5 < x < 0\}$ ;  
 в)  $U = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 43 < x < 53\}$ ;  
 г)  $P = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ и } 1/9 < x < 5/9\}$ ;  
 д)  $F = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } -7 < x < -15\}$ ;  
 е)  $R = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 66 < x < 55\}$ ;  
 ж)  $T = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } -3 < x < 0\}$ ;  
 з)  $S = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ и } 2/17 < x < 10/17\}$ ;  
 к)  $Q = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } -23 < x < -10\}$ .

5. Запишите, используя символы, множество  $R$ , если оно состоит из натуральных чисел:

- а) больше 407, но меньше 400;  
 б) больше или равно 34, но меньше или равно 40;  
 в) больше или равно 78, но меньше 84;  
 г) больше 55, но меньше или равно 60;  
 д) больше или равно 23, но меньше или равно 30;  
 е) больше или равно 12, но меньше 20;  
 ж) больше 99, но меньше или равно 80;  
 з) больше или равно 54, но меньше или равно 62.

6. Изобразите, на координатной прямой множество решений неравенства, если  $a$  – действительное число:

- а)  $a > 9$ ;                      б)  $-56,5 \leq a \leq 56$ ;                      в)  $a \leq -18,9$ ;  
 г)  $3,6 \leq a \leq 19$ ;                      д)  $34 < a \leq 39$ ;                      е)  $76,5 \leq a < 60,5$ ;  
 ж)  $a \leq 99,03$ ;                      з)  $88 < a \leq 98,3$ ;                      к)  $a > 28,23$ ;

7. Задайте при помощи характеристического свойства множества, выделенные штриховкой на координатной прямой.

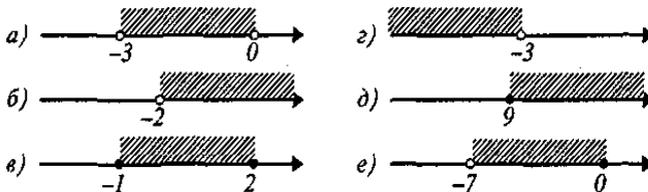


Рис. 1

8. Задано множество  $S$  – множество трехзначных чисел, запись которых оканчивается цифрой 7. Принадлежат ли этому множеству числа 332, 247, 673, 37, 887? Ответ запишите, используя знак принадлежности или не принадлежности.

9. Определите отношения между числами. Приведите примеры данных отношений.

10. Какие отношения существуют между членами одной семьи, если вместе проживают бабушка, дедушка, сын, дочь и внучка Аянэ?

11. Назовите множество, если даны характеристические свойства его элементов:

- а) они являются обитателями океана, моря;
- б) имеют плавники;
- в) по строению тела похожи на звездочку.

12. Задайте множество перечислением 5 его элементами, если даны их характеристические свойства:

- а) они съедобны;
- б) некоторые из них растут в лесу, тайге или на полянах;
- в) они имеют «шляпы» и «ножки».

13. Задано множество  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 15 < x < 25\}$ . Задайте данное множество перечислением его элементов.

14. Укажите множество, которое не имеет ни одного элемента. Приведите примеры.

15. Выясните, о скольких множествах речь идет в следующих сказках, и уточните, из скольких элементов они состоят:

- а) Волк и семеро козлят;
- б) Три поросенка;
- в) Али-баба и сорок разбойников;
- г) Мальчик с тремя знаниями (Уш чуул эртемниг оол).

16. Перечислите элементы множества «Буквы русского алфавита».

17. Перечислите 4 элемента множества «Президент Соединенных штатов Америки».

18. Назовите множество, если заданы его элементы: мышка, клавиатура, системный блок, монитор.

19. Укажите элементы, не принадлежащий множеству: кабина, радиатор, бампер, тосол, руль, термос, шофер.

20. Напишите на математическом языке предложение, используя знак равенства и фигурные скобки:

- а)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 13 < x < 21\}$ ;
- б)  $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } -11 < x < -5\}$ ;
- в)  $K = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } -24 < x < -9\}$ ;
- г)  $S = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ и } 1/10 < x < 9/10\}$ ;

### 1.3. Отношения между множествами

В математике изучают не только те или иные множества, но и отношения, взаимосвязи между ними. Понятие множества позволяет обобщить конкретные случаи взаимосвязи между различными совокупностями, позволяет посмотреть на них с единой точки зрения.

#### Упражнения

1. Даны четыре множества:  $B = \{17, 2, 15, 13\}$ ,  $A = \{4, 6, 2\}$ ,  $D = \{8, 10, 12, 6\}$  и  $F = \{13, 15, 17, 2\}$ :

- а) множества  $A$  и  $D$  пересекаются;
- б) множества  $A$  и  $F$  пересекаются;
- в) множества  $D$  и  $F$  пересекаются;
- г) множество  $F$  подмножество множества  $B$ ;
- д) множества  $A = B = D = F$ ;
- е) множество  $A$  и  $B$  не пересекаются;
- ж) множество  $B$  подмножество  $F$ ;
- к) множества  $D$  и  $F$  не пересекаются;
- л) множество  $F = B$ ;
- м) множество  $A \subset B$ .

2. Выясните отношение «быть подмножеством» между заданными множествами:

- а)  $L$  – множество членов семьи Монгуша;  
 $K$  – множество членов семьи сына Монгуша;  
 $G$  – множество внуков Монгуша.
- б)  $T$  – множество преподавателей ПЦК математики колледжа;  
 $R$  – множество преподавателей колледжа;  
 $W$  – множество преподавателей университета ТГУ.
- в)  $U$  – множество преподавателей физической культуры колледжа;

$P$  – множество преподавателей физической культуры Кызыла;

$S$  – множество преподавателей физической культуры кожуунов республики.

- г)  $W$  – множество натуральных чисел, кратных 5;  
 $X$  – множество натуральных чисел, кратных 15;  
 $Z$  – множество натуральных чисел, кратных 100.

- д)  $H$  – множество украшений;  
 $J$  – множество обручальных колец;  
 $V$  – множество серег.

- е)  $N$  – множество студентов специальности «Физическая культура»;  
 $M$  – множество студентов педагогического колледжа;  
 $Z$  – множество студентов Тувинского государственного университета.

3. Изобразите при помощи кругов Эйлера – Венна отношения между множествами  $A, B$  если:

- а)  $A$  – множество трехзначных чисел;  
 $B = \{7, 234, 456, 654, 34, 89\}$ .  
б)  $A$  – множество двухзначных чисел;  
 $B = \{7, 34, 96, 64, 34, 675\}$ .  
в)  $A$  – множество однозначных чисел;  
 $B = \{7, 5, 1, 4, 3, 2, 8, 9, 6\}$ .  
г)  $A$  – множество трехзначных чисел;  
 $B = \{77, 66, 55, 44, 33, 22, 11, 88, 99\}$ .  
д)  $A$  – множество двухзначных чисел;  
 $B = \{56, 45, 32, 98, 76, 23, 47, 89, 34\}$ .

4. Определите для множества  $S = \{44, 45, 67, 21\}$  всевозможные его подмножества. Найдите их количество.

5. Известно, что элемент 17 содержится в множестве  $B$  и в множестве  $A$ . Следует ли из этого, что:

- а)  $B \subset A$ ; б)  $A \subset B$ ; в)  $A \cap B$ ; г)  $A \cap B = \emptyset$ ; д)  $A = B$ ?

6. Задано множество  $Z = \{d; c; b; t; s; k; a\}$ . Укажите отношения множества с другими множествами

- а)  $B = \{n, m, o, f, q, r\}$ ;  
б)  $H = \{t, c, k, a, s, b, d\}$ ;  
в)  $U = \{k, t, s, a\}$ ;  
г)  $P = \{d, c, b\}$ ;

д)  $F = \{k, a, s\}$ ;

е)  $R = \emptyset$ .

7. Даны два множества:  $A = \{74, 84, 94\}$  и  $B = \{14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94\}$ . Выясните, верно, ли, что:

а) множества  $A$  и  $B$  пересекаются;

б) множество  $B$  является подмножеством множества  $A$ ;

в) множество  $F = \{94, 84, 74\}$  равно множеству  $A$ ?

8. Определите отношения между заданными множествами. Придумайте свой пример заданного отношения.

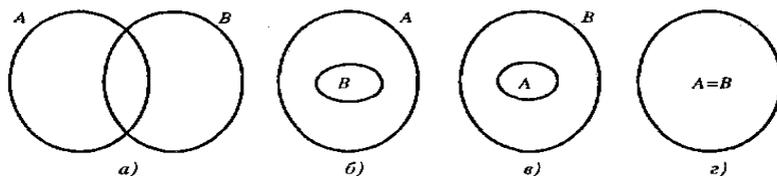


Рис.2

9. Выясните отношение между множествами на рисунке. Придумайте пример заданного отношения.

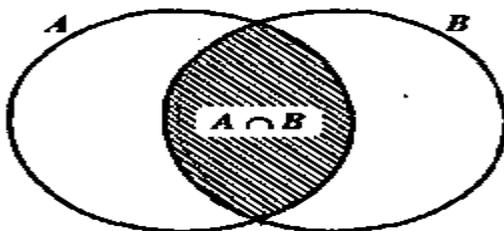


Рис.3

10. Определите отношение между множествами  $B = \emptyset$  и  $S = \{a, 78, 98, 90, 45\}$ .

11. Придумайте два примера множеств, находящихся в отношении «не пересекаться».

12. Установите отношение между множествами и изобразите кругами Эйлера-Венна.

а)  $A$  – множество натуральных чисел;

$B$  – множество целых чисел;

$C$  – множество натуральных чисел, кратных 7.

б)  $A$  – множество целых чисел;

В – множество чисел: - 6, - 8, - 12, - 98;

С – множество натуральных чисел.

в) А – множество чисел: 34, 56, 43, 78, 87, 98, 89;

В – множество чисел: -34, -56, -43, -78, -87, -98, -89;

С – множество рациональных чисел.

г) А – множество натуральных чисел, кратных 5;

В – множество отрицательных чисел, кратных 10;

С – множество натуральных чисел, кратных 100.

13. Придумайте примеры уравнений, заданных на множестве  $Z_0$  которых имеют отношения «пересекаться».

14. Выясните отношения между заданными множествами:

$K = \{\text{стол, парта, фломастер}\}$ ,  $S = \{\text{фломастер, стол, парта}\}$ ,  $N = \{\text{карандаш, точилка, ручка}\}$ ,  $D = \{\text{ранец, портфель, сумка}\}$ ,  $R = \{\text{стол, ранец, фломастер, точилка, сумка, парта}\}$ ,  $W = \{\text{тетрадь, резинка, линейка, краска, палочки}\}$ .

15. Определите, в каких отношениях могут находиться член одной семьи. Перечислите существующие отношения.

16. Бабушка Кара имеет внучку Анай-Кара, внука Чола. Укажите отношения между членами семьи.

17. Первоклассникам Шуру и Чинчи предложено начертить две фигур, принадлежащие объединению множеств А и С, если:

а) А – множество ромбов, С – множество прямоугольников.

б) А – множество равнобедренных треугольников, С – множество прямоугольных треугольников.

в) А – множество треугольников, С – множество прямоугольников.

18. Определите отношения между заданными множествами:

а) А – множество натуральных чисел, кратных 6;

Р – множество натуральных чисел, кратных 12;

W – множество натуральных чисел, кратных 30.

б) Н – множество трапеций;

F – множество прямоугольных трапеций;

N – множество равнобедренных трапеций.

19. Изобразите с помощью кругов Эйлера – Венна отношения между множествами А и К, если:

- а)  $A$  – множество четных двузначных чисел,  
 $K$  – множество чисел 5, 12, 89, 56, 44, 59.
- б)  $Z$  – множество трехзначных чисел кратных 160,  
 $S$  – множество четных натуральных чисел.  
 20. Из множества  $M = \{216, 333, 344, 545, 546, 345, 171, 234, 999, 788, 290, 330, 111\}$  выпишите числа, которые:
- а) делятся на 5; б) делятся на 3;  
 в) делятся на 9; г) делятся на 4.

### 1.4. Пересечение множеств

Над множествами выполняют следующие **операции**: объединение, пересечение, разность и декартово произведение.

**Определение. Пересечением множеств**  $A$  и  $B$  называют множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству  $A$  и множеству  $B$ .

Пересечение множеств  $A$  и  $B$  обозначают  $A \cap B$ . Таким образом, по определению,  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ .

### Упражнения

1. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие утверждения:

б)  $278\ 566 \in D \cap R$ ;

в)  $45\ 788\ 923 \notin D \cap R$ .

2. Известно, что  $x \in B$ . Следует ли из этого, что  $x \in B \cap A$ .

3. Известно, что  $x \in B \cap A$ . Следует ли из этого, что  $x \in A$ .

4. Найдите элементы, принадлежащие в пересечении множеств, если:

а)  $A = \{45, j, r, m, 28, f\}$  и  $B = \{l, m, o, 56, f, q, r\}$ ;

б)  $B = \{78, g, k, a, s, 55\}$  и  $H = \{56, k, 34, a, s, b, 99, d\}$ ;

в)  $G = \{t, s, a, 77, 67\}$  и  $U = \{k, t, s, a\}$ ;

г)  $W = \{d, b, 18, 76\}$  и  $P = \{d, 76, c, b\}$ ;

д)  $T = \{k, h, g, 99, 55\}$  и  $F = \{k, a, 55, s\}$ ;

е)  $Q = \{m, n, h, y, u, p, c\}$  и  $R = \emptyset$ .

5. Найдите пересечение множеств, если:

а)  $A$  – множество трехзначных чисел;

$$D = \{89, 786, 666, 689, 34, 89, 62\}.$$

б)  $A$  – множество двухзначных чисел;

$$F = \{0, 99, 96, 95, 934, 935\}.$$

в)  $K$  – множество однозначных чисел;

$$B = \{17, 15, 11, 4, 63, 2, 78, 9, 6\}.$$

г)  $H$  – множество трехзначных чисел;

$$N = \{707, 606, -505, 404, -303, 202, 101, -808, 909\}.$$

д)  $M$  – множество двухзначных чисел;

$$S = \{56, 51, 54, 52, 6, 3, 9, 12, 30\}.$$

6. Найдите пересечение множеств решений неравенств, в которых  $x$  – действительное число:

а)  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 0\}$  и  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -2\}$ ;

б)  $H = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -13,5\}$  и  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 9\}$ ;

в)  $U = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 43 \leq x\}$  и  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 9\}$ ;

г)  $P = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ и } x > 1/9\}$  и  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5/9\}$ ;

д)  $F = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } x > -17\}$  и  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 19\}$ ;

е)  $R = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 76\}$  и  $S = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 89\}$ ;

ж)  $T = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } x \geq -23\}$  и  $G = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 29\}$ ;

з)  $S = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ и } x > 2/17\}$  и  $Z = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5/9\}$ ;

к)  $Q = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } x > -23\}$  и  $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 29\}$ ;

л)  $P = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 17 \leq x \leq 15\}$  и  $T = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -6 \leq x \leq 16\}$ ;

м)  $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -7 \leq x \leq 25\}$  и  $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -6 \leq x \leq 23\}$ ;

н)  $H = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -40 \leq x \leq 55\}$  и  $S = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -37 \leq x \leq 42\}$ .

7. Найдите элементы множества «буквы», принадлежащие пересечению слов:

а)  $G = \{с, п, о, р, т\}$  и  $H = \{с, т, а, д, и, о, н\}$ ;

б)  $J = \{б, р, у, с, о, к\}$  и  $G = \{к, а, н, а, т\}$ ;

в)  $I = \{б, р, а, с, е, т\}$  и  $F = \{б, а, с, к, е, т, б, о, л\}$ ;

г)  $K = \{г, а, н, д, б, о, л\}$  и  $T = \{в, о, л, е, й, б, о, л\}$ ;

д)  $F = \{т, е, л, е, в, и, з, о, р\}$  и  $U = \{т, е, л, е, с, к, о, п\}$ ;

е)  $D = \{я, б, л, о, к\}$  и  $A = \{о, б, л, а, к, о\}$ ;

ж)  $E = \{р, у, л, е, т, к, а\}$  и  $B = \{р, у, б, а, ш, к, а\}$ ;

з)  $W = \{т, р, е, н, а, ж, е, р\}$  и  $V = \{т, р, е, н, е, р\}$ ;

к)  $P = \{с, о, р, е, в, н, о, в, а, н, и, е\}$  и  $X = \{з, в, а, н, и, е\}$ ;

л)  $P = \{ч, е, м, п, и, о, н\}$  и  $T = \{ю, н, и, о, р\}$ ;

м)  $E = \{п, р, и, з\}$  и  $D = \{к, у, б, о, к\}$ ;

н)  $H = \{р, е, к, о, р, д\}$  и  $S = \{а, к, к, о, р, д\}$ .

8. Найдите пересечение множеств  $A = \{a; b; c; 5; 8; 23\}$  и  $B = \{b; c; 21; 8\}$ . Изобразите операции с помощью кругов Эйлера-Венна.

9. Даны множества  $B = \{1; 2; 3\}$ ,  $A = \{3; 4; 1; 2; 5\}$ . Изобразите операцию пересечения с помощью кругов Эйлера - Венна.

10. Найдите число элементов в пересечении множеств  $A = \{a; c; 5; 7; 8; b\}$  и  $B = \{a; b; 19; 35\}$ .

11. Найдите пересечение множеств, элементами которого являются буквы вашего имени и соседа. Изобразите с помощью кругов Эйлера - Венна.

12. Дано  $A \cap B = \{5; a; d; e; k\}$  и известно, что  $A = \{5; a; b; e; k; c; d\}$ . Найдите недостающие элементы множества  $B$ , если  $B = \{2; 1; d; \dots; \dots\}$ .

13. Во время опроса студентов оказалось, что из 350 опрошенных 230 читают газету «Спорт», 195 – читают газету «Информплюс», 80 из них читают обе газеты. Сколько студентов из числа опрошенных не читают ни одной из этих газет?

14. Студенты Монгуш Сайдаш и Ондар Айдыс стоящие на одной прямой, могут бросить баскетбольный мяч на расстояние не превышающим 14 метров. Студент Ондар Айдыс стоит правее от студента Монгуша Сайдаша на расстоянии 22 метров. Ведя отсчет от места нахождения студента Монгуша Сайдаша, найдите множество точек, находящихся в пределах досягаемости:

а) студента Монгуша Сайдаша;

б) студента Ондара Айдыса;

в) хотя бы одного студента; г) обоих студентов.

15. Найдите число элементов в пересечении множеств  $A = \{a; c; 5; 7; 8; c; a\}$  и  $B = \{a; b; 9; 35; c\}$ .

16. Найдите пересечение множеств:

$G = \{x | x \in \mathbb{N}, 5 \leq x \leq 7\}$  и  $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 4 \leq x \leq 9\}$ .

17. Из каких элементов состоит пересечение букв в словах «комментатор» и «спорт»?

18. Известно, что,  $y \in C$ . Следует ли из этого, что  $y \in C \cap A$ ?

19. Известно, что  $x \in B \cap A$ . Следует ли из этого, что  $x \in A$ ?

20. Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением:

- а) была точка;                      б) был треугольник;  
в) был отрезок;                    г) был четырехугольник.

### 1.5. Объединение множеств

Над множествами выполняют операцию объединения.

**Определение.** Объединением множеств  $A$  и  $B$  называют множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству  $A$  или множеству  $B$ .

Объединение множеств  $A$  и  $B$  обозначают  $A \cup B$ . Таким образом, по определению,  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ .

#### Упражнения

1. Найдите объединение множеств  $A = \{a; b; c; 5; 8; 23\}$  и  $B = \{b; c; 34; 45; 56; 21; 8\}$ . Изобразите операции с помощью кругов Эйлера-Венна.
2. Назовите три элемента множества состоящего из элементов множества  $A = \{\text{пешка, ферзь, ладья, король}\}$ ,  $C = \{\text{король, король, конь, ферзь}\}$ .
3. Определите, число элементов заданного множества, состоящего из объединения элементов множества  $A = \{\text{роза, ландыш, багульник, пион, тюльпан}\}$ ,  $C = \{\text{ландыш, лилия, анютины глазки, ромашка}\}$ .
4. Найдите объединение множеств решений неравенств, в которых  $x$  – действительное число:
  - а)  $K = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 5\}$  и  $G = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 3\}$ ;
  - б)  $R = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -10\}$  и  $J = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 19\}$ ;
  - в)  $U = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \leq 20\}$  и  $W = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 9\}$ ;
  - г)  $O = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ и } x > 1/9\}$  и  $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5/9\}$ ;
  - д)  $S = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } x > -11\}$  и  $Z = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 23\}$ .
5. Найдите число элементов в объединении множеств  $A = \{a; c; 5; 7; 8; 9; 10; c; a\}$  и  $B = \{a; в; 9; 35; 10; c; c\}$ .
6. Найдите объединение множеств:  $G = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 15 \leq x \leq 17\}$  и  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 14 \leq x \leq 19\}$ .

7. Используя координатную прямую, найдите объединение множеств решений неравенств, в которых  $x$  – действительное число:

а)  $x > -3$  и  $x > 0$ ;

б)  $x > -4,7$  и  $x \leq 4$

в)  $x \geq 8$  и  $x < -8,5$

г)  $-8 < x < 14$  и  $x \geq -5$ .

8. Назовите три элемента множества принадлежащих объединению городов России и Республики Тыва.

9. Назовите три элемента животных, принадлежащих объединению семейству кошачьих. Ответьте на вопрос: принадлежит ли рысь данному семейству?

10. Найдите ошибку, допущенную при выполнении задания и изобразите операцию с помощью кругов Эйлера-Венна.: Найдите объединение множеств  $A = \{a; b; c; 5; 8; 23\}$  и  $B = \{b; c; 21; 8\}$ . Ответ:

$$A \cup B = \{a; b; c; 5; 8; 23\}.$$

11. Дано  $D \cup C = \{12; 17; 89; 67; 56; 54; 43; 100\}$  и множество  $C = \{17; 56; 43\}$ . Найдите недостающие элементы множества  $D = \{43; 89; \dots; 67; \dots; 56; 100\}$ .

12. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие утверждения: а)  $x \in B \cup A$ ; б)  $x \notin B \cup A$ .

13. Известно, что  $a \in B$ . Следует ли из этого, что  $a \in B \cup A$ ?

14. Известно, что  $y \in C \cup D$ . Следует ли из этого, что  $y \in C$ ?

15. Назовите все множества, о которых речь идет в задаче:

а) В физкультурной группе учатся 15 юношей и 13 девушек. Сколько всего студентов в группе?

б) В сентябре студент Одучай получил 1200 рублей стипендии. 600 рублей он отдал в фонд защиты животных «Хартико». Сколько денег осталось у Одучая?

16. Перечислите элементы множества инструментов слесаря. Принадлежит ли данному множеству пила, котел?

17. Найдите объединение множеств:  $G = \{x | x \in \mathbb{N}, 11 \leq x \leq 15\}$ ,

$$A = \{x | x \in \mathbb{N}, 12 \leq x \leq 20\} \text{ и } K = \{x | x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 14\}.$$

Изобразите пересечение множеств на диаграмме Эйлера-Венна.

18. Заданы три множества:

- а) двузначных чисел, кратных 11;
- б) двузначных чисел делящихся на 10;
- в) двузначных чисел делящихся на 5.

Найдите объединение заданных множеств и изобразите при помощи кругов Эйлера-Венна. Выпишите числа принадлежащие пересечению заданных множеств.

19. Постройте три круга, представляющие попарно пересекающиеся множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , и отметьте штриховкой области, изображающие множества:

- а)  $A \cap B \cap C$ ; б)  $A \cup B \cup C$ ; в)  $(A \cap B) \cup C$ ; г)  $(A \cup B) \cap C$ .

20. Определите порядок выполнения действий в следующих выражениях:

- а)  $A \cup B \cup C$ ; б)  $A \cap B \cap C$ ; в)  $A \cap B \cup C \cap D$ ; г)  $A \cup B \cap C \cup D$ .

### 1.6. Вычитание множеств. Дополнение множества. Число элементов в объединении и разности конечных множеств

Следующая операция над множествами – это нахождение их разности. Дадим ее определение из учебника.

**Определение. Разностью множеств  $A$  и  $B$**  называют множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству  $A$  и не принадлежат множеству  $B$ .

Разность множеств обозначают  $A \setminus B$ . Таким образом, по определению, имеем:  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ .

### Упражнения

1. Назовите три элемента заданного множества:

- а) четных чисел первого десятка без чисел кратных 2;
- б) нечетных чисел второго десятка без чисел кратных 3;
- в) двузначных чисел кратных 10 без числа 90;
- г) дней недели без вторника;

2. Определите множество  $A \setminus B$  по его элементам:

- а)  $A = \{\text{конь, пешка, мат, шах}\}$  и  $B = \{\text{ладья, пешка}\}$ ;
- б)  $A = \{\text{биатлон, водное поло, сноуборд}\}$  и  $B = \{\text{баскетбол, керлинг, сноуборд}\}$ ;

- в)  $A = \{\text{Кудес Соянович, Аяна Ангыр-ооловна, Роза-Чечек Дозурашовна, Байыр Байыр-оолович, Григорий Комбу-Сурунович, Шолбан Александрович}\}$  и  $B = \{\text{Аяна Ангыр-ооловна, Карина Канчк-ооловна, Кудес Соянович, }\}$ ;
- г)  $A = \{\text{Европа, Африка, Америка, Азия, Австралия}\}$  и  $B = \{\text{Америка, Австралия}\}$ .

3. Определите количество элементов содержащие в разности множеств,  $A$  и  $B$  если:  $B = \{101; 102; 103; 107; 109; 234; 231\}$ ,  $A = \{103; 104; 100; 102; 105; 111; 114; 106; 140; 107; 109\}$ .

4. Найдите разность множеств  $A = \{y; b; c; 23; 56; 45; 78\}$  и  $B = \{78; 45; c; 21; 8\}$ . Изобразите операции с помощью кругов Эйлера-Венна.

5. Даны множества  $B = \{1; 2; 3\}$ ,  $A = \{3; 4; 1; 2; 5\}$ . Найдите дополнение подмножества  $B$  до множества  $A$ .

6. Найдите число элементов в разности, объединении, пересечении множеств  $A = \{a; c; 5; 7; 8; b\}$  и  $B = \{a; b; 19; 35\}$ .

7. Найдите пересечение, объединение и разность множеств, элементами которого являются буквы вашего имени и соседа. Изобразите с помощью кругов Эйлера - Венна.

8. Сформулируйте условия, при которых следующие высказывания будут истинными:

- а)  $8 \in B \setminus A$ ;                      б)  $90 \notin B \setminus A$ .

9. Известно, что  $a \in A \setminus B$ . Следует ли из этого, что  $a \in A$  и  $a \notin B$ ?

10. Найдите разность множеств  $A$  и  $B$ , если:

- а)  $A = \{r; 17; t; u; o; p; 11\}$   $B = \{u; 11; o; 5; p\}$ ;  
 б)  $A = \{f; a; 7; 89; 909;\}$   $B = \{c; r; h; g; d\}$ ;  
 в)  $A = \{67; 32; 65; 87; 98; 56; 69\}$   $B = \{67; 56; 68; 69\}$ ;  
 г)  $A = \{11; 22; 33; 44; 55; 66;\}$   $B = \{88; 99; 77\}$ .

11. Даны множества:  $A$  – натуральных чисел, кратных 3,  $B$  – множество натуральных чисел, кратных 9.

- а) сформулируйте характеристическое свойство элементов множества «дополнение подмножества  $B$  до множества  $A$ »;  
 б) верно ли, что 123 принадлежит, а 333 не принадлежит «дополнению подмножества  $B$  до множества  $A$ »?

12. Из каких чисел состоит дополнение:

- а) множества натуральных чисел до множества целых;
- б) множества целых чисел до множества рациональных чисел;
- в) множество рациональных чисел до множества действительных чисел.

13. Найдите дополнение множества  $Y$  до множества  $X$ , если:

- а)  $X$  – множество точек квадрата;  $Y$  – множество точек круга, вписанного в этот квадрат;
- б)  $X$  – множество квадратов;  $Y$  – множество прямоугольников.

14. Постройте три круга, изображающие три попарно пересекающихся множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , и выделите каким-либо образом области, представляющие множества:

- а)  $A \cup B \setminus C$ ; б)  $A \setminus B \cap C$ ; в)  $A \setminus C \cup B \setminus C$ ; г)  $A \setminus B \cup C$ .

15. Покажите при помощи кругов Эйлера-Венна, что для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  верны равенства:

- а)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ; б)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

16. Впишите множество, содержащее элементы:

- а) все натуральные числа первого десятка, кроме чисел, делящихся без остатка на 4;
- б) все отрицательные числа, удовлетворяющие условию:  $-20 \leq x \leq 20$ , кроме чисел, кратных 5.

17. Задано множество  $A = \{45; 89; 78; 67; 56\}$  и множество  $B = \{54; 98; 87; 76; 65\}$ . Найдите дополнение множества  $B$  до множества  $A$ .

18. Изобразите при помощи кругов Эйлера –Венна отношения между множествами, если:

- а) если множество  $B$  есть подмножество множества  $A$ ;
- б) заштрихуйте область  $A \setminus B$ ;
- в) множества  $A$  и  $B$  пересекаются. Заштрихуйте область  $A \setminus B$ .

19. Внимательно читайте определение разности множеств и дополнения множества  $B$  до множества  $A$ . Есть ли между определениями отличие?

20. Дайте определение разности множества  $A$  и  $B$ . Придумайте 2 примера и запишите на математическом языке.

### 1.7. Декартово произведение множеств. Число элементов в декартовом произведении конечных множеств

Последняя операция над множествами – это нахождение их декартового произведения. Повторим ее определение и математическую запись, вспомним понятие «кортеж».

**Определение.** Декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$  называют множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству  $A$ , а вторая компонента принадлежит множеству  $B$ .

Декартово произведение множеств обозначают  $A \times B$ . Тогда, по определению имеем:  $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$ .

#### Упражнения

1. Множество  $A$  содержит 8 элементов. Сколько элементов в множестве  $C$ , если декартово произведение  $A \times C$  состоит из: а) 72 элементов; б) 48 элементов; в) 0 элементов.

2. Сколько различных набора можно составить из альбома и тетради, если имеется 20 видов альбома и 15 видов различных тетрадей?

3. Дано уравнение  $3x - 9 = y$ . Запишите несколько решений данного уравнения. Что представляет собой каждое решение? Является ли пара чисел  $(3; 0)$  решением уравнения? А пара  $(0; 3)$ ?

4. Элементами множества  $A$  и  $C$  являются пары чисел:  
 $A = \{(1;12), (2;9), (5;34), (5;0), (23; 43)\}$ ,  
 $B = \{(1;9), (5;34), (23; 21), (2;9)\}$

Найдите объединение, пересечение и разность данных множеств.

5. Перечислите элементы декартового произведения, если:

а)  $A = \{f; g; n; m\}$  и  $B = \{e; w; u; h\}$ ;

б)  $A = B = \{f; b; c\}$ ;

в)  $A = \{a; c; d\}$ ,  $B = \emptyset$ .

6. Найдите декартово произведение множеств  $A = \{a; b; c; z; v\}$  и  $B = \{b; c; 33; 88\}$ . Изобразите операции с помощью графа.

7. Даны множества  $B = \{1; 2; 3\}$ ,  $A = \{3; 4; 1; 2; 5\}$ . Найдите декартово произведение и изобразите пар точками на координатной плоскости.

8. Найдите число пар в декартовом произведении множеств  $A = \{a; r; 25; 35; 45; b\}$  и  $B = \{a; b; 45; 35\}$

9. Найдите декартово произведение множеств, элементами которого являются буквы вашего имени и соседа. Изобразите с помощью графа полученные пары.

10. Дан два множества  $A = \{5; 10; 15\}$  и  $B = \{20; 25\}$ . Перечислите элементы множеств  $A \times B$  и  $B \times A$ . Выясните, верно ли что:

а) множества  $A \times B$  и  $B \times A$  содержат одинаковое число элементов;

б) множества  $A \times B$  и  $B \times A$  не равны.

11. Чем отличается множество цифр в записи числа 7786 от кортежа цифр в его записи?

12. Изобразите на координатной плоскости точки:  $(-1; 0)$ ,  $(-1; 4)$ ,  $(3; 0)$ ,  $(3; 4)$ . Соедините их последовательно и назовите фигуру, которая получилась.

13. Какую фигуру образуют точки, если их абсциссы принадлежат множеству  $[-2; 2]$ , а ординаты принадлежат множеству  $[-3; 3]$ ?

14. Выясните, из скольких пар элементов состоит декартово произведение, если множество  $A$  состоит из 5 элементов, а множество  $B$  – из 3 элементов. В пересечении данных множеств содержится 2 элемента.

15. Даны множества  $A = \{18; 19\}$ ,  $F = \{13; 14; 15; 16; 17\}$ . Найдите декартово произведение. Принадлежат ли пар  $(19; 16)$  и  $(13; 17)$  декартовому произведению?

16. Даны множества  $S = \{65; 75\}$ ,  $H = \{34; 56; 78; 89; 45; 67\}$ . Найдите декартово произведение множеств и выясните, есть ли одинаковые пары.

17. Дан множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , где  $A = \{v; g; k\}$ ,  $B = \{1; 2\}$ ,  $C = \{1; 2\}$ . Найдите: а)  $A \times B$ ; б)  $A \times C$ ; в)  $C \times A$ ; г)  $B \times A$ ; д)  $(A \times B) \times C$ ;

е)  $(C \times B) \times A$ ; ж)  $(C \times A) \times B$ .

18. Даны множества  $A = \{2; 4\}$  и  $B = \{2; 5; 6\}$ . Выявите недостающие пары, если  $A \times B = \{(2; 2); (2; 5); \dots, (4; 2); \dots; (4; 6)\}$ . Сколько пар должны получиться?

19. По заданным парам декартового произведения восстановите элементы множеств  $C$  и  $D$ , если  $C \times D = \{(1; 2); (2; 3); (3; 3); (5; 5); (12; 13); (13; 19); (4; 8); (4; 10)\}$ .

20. Даны множества  $A = \{3; 5\}$  и  $B = \{3; 5; 7\}$ . Восстановите стертые случайно пары декартового произведения множеств, если  $A \times B = \{(3; 3); (3; 5); \dots, (5; 3); \dots; \dots\}$ . Сколько пар должны получиться?

## § 2. Способы обоснования истинности высказываний

### 2.1. Высказывание и высказывательные формы

Изучая реальные процессы, математика описывает их, используя как естественный словесный язык, так и свой символический. Описание строится с помощью математических предложений. Но, чтобы математические знания были достоверными, правильно отражали окружающую нас реальность, эти предложения должны быть истинными. Здесь мы систематизируем знания о высказываниях и высказывательных формах.

### Упражнения

1. Среди следующих предложений укажите высказывания и высказывательные формы:

- а) при делении 27 на 9 получим остаток 0;
- б) Кызыл столица Алтайской республики;
- в) Корней Чуковский – детский писатель;
- г) в любом прямоугольнике диагонали равны;
- д) множество спортивной одежды – это мода;
- е) огурец, помидор, чеснок, перец – это элементы множества фруктов;
- ж) 167 – четное число;
- к) Хомушку Намгаевич Чургуй-оол – герой Советского Союза;
- л) лимонный, земляничный, индийский, грузинский – это сорта чая;
- м) Монгуш Аяс, Монгуш Начын, Ондар Бойду – студенты.
- н) преподаватель работает в колледже;

р) завтра будет солнечная погода.

2. Из высказывательной формы  $x^2 - 234x = 0$  получите 3 высказывания на множестве натуральных чисел. Найдите, при каких значениях  $x$  данная высказывательная форма обращается в истинное высказывание?

3. Записи  $28 \times 4 - 56$ ;  $(67 + 55) : 2$  называют числовыми выражениями. Являются ли они высказываниями? Ответ обоснуйте.

4. Записи  $2a + 4$ ;  $14y - 2a$ ;  $34 + (9 - a)$  называют выражениями с переменной. Являются ли они высказывательными формами. Ответ обоснуйте.

5. Выявите логическую структуру следующих предложений:

- а) число 89 является рациональным или иррациональным;
- б) если углы вертикальные, то они равны;
- в) треугольник ABC прямоугольный или равнобедренный;
- г) у спортсменов есть разрядки и мастера сорта;
- д) если число целое и положительное, то оно натуральное;
- е) 500 делится на 20 или на 25;
- ж) 168 – четное и составное число;
- к) неверно, что Россия многонациональная страна;
- л) если купишь лотерейный билет, то он будет выигрышным;
- м) число 12 – целое и четное и составное;
- н) если студент сдаст сессию на оценки 4 и 5, то ему назначается академическая стипендия;
- р) «Ректорский бал» – красивое и незабываемое мероприятие.

6. Определите, является ли число 5 решением неравенства  $6(2x + 7) < 15(x + 2)$ , определенного на множестве действительных чисел? А число 7?

7. Определите типы математических предложений:

- а) 36 673 – четное число;
- б) 909909909 принадлежит множеству натуральных и иррациональных чисел;
- в) все числа четные;
- г) если числовой луч направлен слева направо, то большей дроби соответствует точка, лежащая правее, меньшей – точка, лежащая левее;

д) величина развернутого угла равна  $380^{\circ}$ .

8. Среди данных предложений укажите высказывания. Определите их значения истинности:

а) чтобы найти неизвестное вычитаемое, нужно к разности прибавить уменьшаемое;

б) Ай-Чурек, Арзылан и Кудер – спортсмены физкультурной группы;

в)  $23495 + x \leq 40507$ ;

г) для любых натуральных чисел  $a$  и  $b$  справедливо равенство:

$$a + b = b + a;$$

д) наименьшее натуральное число – нуль;

е) 1 – целое число.

9. Даны высказывания А: «Сегодня мы получим стипендию» и В: «Мы проведем благотворительную акцию». Сформулируйте следующие составные высказывания: а) А и В; б) А или В; в) А следует В; г) В тогда и только тогда, когда А; д) не А следует В; е) А или не В; ж) не А и В; з) А не следует В.

10. Выясните, в каких случаях истинно высказывание: «Понятие А является видовым по отношению к понятию В», если:

а) А «чинчи», В: «украшения»;

б) А: «хобот слона», В: «животное»;

в) А: «земля», В: «планета»;

г) А: «неделя», В: «год»;

д) А: «наадым», В: «традиции тувинского народа»;

е) А: «ромб», В: «параллелограмм»;

ж) А: «мизинец», В: «пальцы руки человека».

11. Выявить логическую структуру высказывания и записать в виде выражения с помощью операций над высказываниями, определить значение истинности высказываний.

а) «Если число 200 натуральное и двузначное, то оно не делится на 17».

б) «Неверно, что квадрат есть прямоугольник и четырехугольник».

в) «Если мальчик родился в феврале, то он по гороскопу представитель знака Водолей».

12. Запишите следующие предложения с помощью математических знаков. Укажите среди них высказывания. Выясните, какие из них истинны, а какие ложны:

а) сумма чисел 2 и 7 равна 9;

б) произведение чисел 9 и 6;

в) разность чисел  $x$  и 2 равна 10;

г) число  $-5$  больше числа  $-3$ ;

д) при делении числа 19 на 8 получается в остатке 3;

е) число  $x$  больше 0,5.

13. Придумайте истинное и ложное высказывания.

14. Определите значение истинности высказывания «Колобок, колобок я тебя съем!». Ответ обоснуйте.

15. Укажите среди следующих предложений высказывания и укажите их истинность:

а) Енисей впадает в Каспийское море.

б)  $5x + 5 = 280$ .

в) Принеси, пожалуйста, домашнее задание.

г) Вы любите лекции?

д)  $234 + 234 = 469$ .

16. Выясните значение истинности предложения «Преподаватель педагогического колледжа улетел из Кызыла для участия в работе симпозиума».

17. Для данного предложения выберите истинный вариант, если дано задание: Поставьте скобки так, чтобы значение выражения  $53 - 3 \times 9 + 4 \times 6$  стало равным числу 2, 180, 474.

18. Допишите еще три числа так, чтобы ряд был истинным, если:

а) 456; 466; 476; 486; ...; ...; ...;

б) 540; 530; 520; ...; ...; ...

19. Восстановите пропущенные числа, так, чтобы умножение было верным:  $***4 \times 23^*$ . При этом первое неполное произведение равно  $**14$ ; второе неполное произведение равно  $1***$ ; третье неполное произведение равно  $1***$ , а произведение равно  $*1****$ .

20. Четыре студентки Манмаа, Нанзатмаа, Олчатмаа, Бузурел участвовали в соревнованиях по легкой атлетике и заняли четыре первые призовые места. На вопрос, кто из них какое место занял, девушки дали три разных ответа:

1. Олчатмаа была вторая, Бузурел – третья.
2. Олчатмаа была первая, Нанзатмаа – вторая.
3. Манмаа была вторая, Бузурел – четвертая.

Какое место заняла каждая из четырех студенток (одинаковые места не присуждались)?

## 2.2. Конъюнкция и дизъюнкция высказываний

Вспомним определения двух операций над высказываниями, которые чаще остальных мы используем в нашей практической жизни.

**Определение. Конъюнкцией высказываний  $A$  и  $B$**  называется высказывание  $A \wedge B$ , которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из этих высказываний ложно.

Определение конъюнкции можно записать с помощью таблицы, называемой таблицей истинности:

Таблица 1.

Таблица истинности конъюнкции

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

**Определение. Дизъюнкцией высказываний  $A$  и  $B$**  называют высказывание  $A \vee B$ , которое истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.

Таблица 2.

Таблица истинности дизъюнкции

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Математические предложения имеют различные виды. Мы выяснили, что среди них выделяют высказывания и высказывательные формы, которые могут быть элементарными и составными.

### Упражнения

1. Определите значения истинности высказывания:

- а) число 355 делится на 19 и на 5;
- б) число 120 делится на 3 или на 30;
- в) число 333 333 делится на 9 и на 33;
- г) число 1000 000 четное или составное;
- е) число 17 составное и простое;
- ж) число 2892 делится на 2 или на 3;
- к) число 8752 делится на 4 или на 3;
- л) число 121 делится на 11 и на 4;
- м) число 5445 делится на 9 или на 5.

2. Известно, что высказывание  $A$  – истинно. Выясните, можно ли, зная только это, определить значение истинности высказывания вида:

- а)  $A \vee B$ ;
- б)  $A \wedge B$ .

3. Известно, что высказывание  $A$  – ложно. Выясните, можно ли, зная только это, определить значение истинности высказывания вида:

- а)  $A \vee B$ ;
- б)  $A \wedge B$ .

4. Даны числа: 32, 31, 63, 408, 20, 3067, 323, 45, 281, 134, 3, 777, 15, 60. Выпишите те числа, в записи которых:

- а) три цифры и есть цифра 3;
- б) три цифры или есть цифра 3.

5. Определите значение истинности высказывания:

- а) студенты получают академическую или социальную стипендию;
- б) наша группа есть элемент групп колледжа и университета;
- в) корова меньше слона и синего кита;
- г) смех и радость показатели эмоционального состояния человека.

6. Выясните логическую структуру следующих высказываний и найдите их значение истинности:

- а) «если десятичная запись числа оканчивается цифрой 0, то оно делится на 5 без остатка»;
- б) «число 13453 четное или натуральное»;
- в) «если два натуральных числа имеют различное число знаков, то число больше, в котором знаков больше»;
- г) «единица не больше нуля»;
- д) «к четырехугольникам относятся квадрат, ромб или трапеция».

7. Определите, значения истинности данных высказываний:

- а) Птицы делятся на зимующие и перелетные.
- б) Компьютер относится к техническим средствам обучения и визуальным.
- в) Мячи бывают волейбольные, баскетбольные или теннисные.
- г) Лапта, городки или гонки – это зимние виды игр.

8. Постройте отрицание высказывания и определите его значение истинности:

- а) А: «Существуют нечетные и положительные числа».
- б) С: «Сумма внутренних углов любого треугольника равна  $180^\circ$ ».
- в) D: «Число 89 делится без остатка на 4».
- г) Q: «900 делится на 100 и на 20».

9. Определите значения истинности высказываний А, В, С, если:

- а) А: « $\sin 0^\circ$  равен 1».
- б) В: «тела при охлаждении расширяются».
- в) С: «одуванчик – растение из семейства трав»

10. Составьте таблицы истинности для высказываний:

- а) «Значения синус  $45^\circ$  и  $\cos 45^\circ$  равны 1».
- б) «У прямоугольного треугольника один угол прямой или сумма внутренних углов равна  $180$ ».
- в) «Если число  $a$  делится на  $b$ , а число  $b$  также делится на  $c$ , то  $a$  делится на  $c$ ».
- г) «Число 100 делится на 3 и на 25».

11. Определите значение истинности утверждения: если математика царица всех наук, то арифметика – царица математики.

12. Придумайте примеры математических предложений, имеющих логическую структуру вида:  $A$  и  $B$ ;  $A$  или  $B$ ;  $A$  и  $B$  и  $C$ ;  $A$  и  $B$  или  $C$ .

13. Какова логическая структура (форма) следующих предложений:

- а) Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.
- б) Если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.
- в) Если у треугольника две стороны равны, то он равнобедренный.
- г) Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда равны все его углы.

14. Каждое из следующих предложений замените конъюнкцией или дизъюнкцией, имеющей тот же смысл:

- а) Число 28 принадлежит хотя бы одному из множеств  $A$  и  $C$ .
- б) Не более двух корней имеют квадратное уравнение.

15. Пусть даны два множества  $A$  – множество четных натуральных чисел, а  $C$  – множество натуральных чисел, меньших 100. Выясните, какие из следующих высказываний истинны:

- а)  $355 \in A$  и  $355 \in C$ ;
- б)  $128 \in A$  или  $128 \in C$ ;
- в)  $87 \in A$  и  $87 \in C$ ;
- г)  $98 \in A$  или  $98 \in C$ .

16. Решите следующие системы неравенств и объясните, что представляет собой любая система неравенств и множество ее решений с точки зрения логики:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 5 > 10 \\ x + 8 < 2x \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x + 3 < 11 \\ 3x - 7 > 8 \end{cases}$$

17. Вместо многоточия вставьте логическую связку «и» либо «или»:

- а) элемент  $x \in A \cap B$  тогда и только тогда, когда  $x \in A \dots x \in B$ ;
- б) элемент  $x \in A \cup B$  :  $B$  тогда и только тогда, когда  $x \in A \dots x \in B$ .

18. Выявите логическую структуру следующих определений:

- а) Параллельные прямые – это две прямые, принадлежащие плоскости и непересекающиеся или совпадающие.
- б) Ромбом называется параллелограмм, у которого противолежащие стороны равны и параллельны.

19. Приведите примеры математических предложений, имеющих логическую структуру вида:

- а) А и В;            б) С или Д;        в) если А, то В;
- г) не А;            д) А тогда и только тогда, когда В.

20. Приведите примеры высказываний: ложных и истинных.

### 2.3. Высказывания с кванторами

В нашей жизни встречаются кроме высказываний и высказывания с кванторами. Еще в школе мы их использовали при решении примеров, но они не были включены в программу в «явном виде». Расширим свои знания о них, решая предложенные задания.

#### Упражнения

1. Среди следующих предложений выделите высказывания и предикаты, ответ обоснуйте:

- а) существуют натуральные числа, делящиеся без остатка на 10;
- б) число  $x$  делится без остатка на 3;
- в) город Кызыл находится в европейской части страны;
- г) найдутся описанные и вписанные в окружность треугольники;
- д) бывают квадратные фигуры;
- е) 25 при делении на 6 дает в остатке 1.

2. Среди следующих предложений выделите высказывания, предикаты, числовые выражения:

- а)  $95x - y = 0$ ;            б)  $0,6x + 7 = 8$ ;            в)  $2 + 3 > 13$ ;
- г)  $9 \times 8 + 11 - 13$ ;        д)  $7/12 - 5/12 = -2/12$ ;    е)  $7x = x^2 + 6x + 1$ .

3. На множестве целых чисел задан предикат  $A(x)$ :

« $-x^2 + 5x + 6 \geq 0$ ». Какие из значений переменной принадлежат множеству истинности предиката  $A(x)$ :  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$ ? Запишите множество истинности предиката  $A(x)$ .

4. Выделите высказывательную форму среди следующих предложений:

- а) есть среди животных и домашние животные;

- б) хотя бы один раз в жизни человек может ошибиться;
- в) есть во множестве натуральных чисел, числа кратны 111.

5. Выделите квантор общности и квантор существования:

- а) для всех натуральных чисел выполняется равенство:  $a + b = b + a$ ;
- б) найдется одно число, которое не равно 34 567;
- в) некоторые числа нечетны;
- г) любой может выиграть в спортивную или жилищную лотерею.

6. Приведите примеры квантора общности.

7. Приведите примеры квантора существования.

8. В высказывании «всякий квадрат является прямоугольником» выделите квантор и высказывательную форму. Переформулируйте данное высказывание, заменив слово «всякий» его синонимом.

9. В высказывании «хотя бы одно число первого десятка простое» выделите квантор и высказывательную форму. Переформулируйте данное высказывание, заменив слово «хотя бы одно» его синонимом.

10. Прочтите следующие записи, заменив символические обозначения кванторов общности и существования их словесными выражениями:

а)  $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ ;

б)  $(\exists x \in \mathbb{R}) 5 + y = 5$ ;

в)  $(\forall y \in \mathbb{R}) y + 3 > 0$ ;

г)  $(\exists x \in \mathbb{N}) x + 3 < 0$ .

11. Запишите следующие предложения, используя символические обозначения кванторов:

а) найдется такое натуральное число  $x$ , что  $x + 23 = 99$ ;

б) каково бы ни было число  $x$ ,  $x + 0 = x$ ;

в) квадратное уравнение имеет хотя бы один корень.

12. Запишите, используя символы, следующие высказывания и определите их значения истинности:

а) всякое число, умноженное на 10 увеличивается в 10 раз;

б) при делении нуля на любое другое число получается нуль;

в) квадрат любого числа – число неотрицательное.

13. Установите, истинность следующих высказываний:

а) во всяком квадрате диагонали равны;

б) при делении некоторых натуральных чисел на 3 в остатке получается 5.

14. Установите, ложность следующих высказываний:

а) в любой трапеции противоположные стороны параллельны;

б) при делении некоторых натуральных чисел на 0 в остатке получается 0.

15. Установите истинность или ложность высказывания:

Среди треугольников есть прямоугольные треугольники.

16. Выделите высказывание и высказывательную форму:

а) у любого треугольника сумма внутренних углов равна 180 градусам;

б) 17789 – число нечетное.

17. Дополните предложение «Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними» - это ....

18. Выделите слова, относящиеся к высказыванию с квантором общности. Приведите примеры.

19. Выделите слова, относящиеся к высказыванию с квантором существования. Приведите примеры.

20. Приведите примеры высказываний из школьной программы по математике. Например: «Существуют четные числа», «Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину» и другие.

### **2.3. Отрицание высказываний и высказывательных форм**

Высказывания и высказывательные формы мы можем еще «отрицать». Повторим и закрепим умения составлять отрицание высказываний и высказывательных форм с помощью законов Де Моргана.

#### **Упражнения**

1. Являются ли следующие пары высказываний отрицаниями друг друга:

а) Число 263 простое. Число 263 составное.

б) Угол ABC острый. Угол ABC тупой.

в) Человек счастлив. Человек радостный.

г) Наступило утро. Наступила ночь.

е) Лотерейный билет - выигрышный. Лотерейный билет беспроигрышный.

2. Постройте различными способами отрицания следующих предложений:

- а) фигура АСДВ – прямоугольник и квадрат;
- б) 267 672 больше 267 072;
- в) число 456 453 положительное и делится на 3;
- г) число 189 простое или делится на 9;
- е) у квадрата АВСД все стороны равны;
- ж) у трапеции две стороны параллельны или не параллельны;
- к) не может быть действительных чисел;
- л) солнце выше гор;
- м) в состав Министерства спорта входит и федерация волейбола.

3. Дано высказывание: 15 простое и составное число. Выясните, является ли высказывание его отрицанием, если имеет вид: Неверно, что 15 простое и составное число.

4. Дано высказывание: 108 делится на 9 или на 8. Найдите среди следующих высказываний его отрицание:

- а) неверно, что 108 делится на 9 или на 8;
- б) 108 не делится на 9 или не делится на 8;
- в) 108 делится на 9 и на 8 число;
- г) 108 не делится на 9 и не делится на 8.

5. Сформулируйте отрицание следующих высказываний, определите значение истинности данных высказываний и их отрицаний:

- а) 245 – четное число;                      б) число 2 – рационально;
- в) число 5 – натуральное и действительное; г) 4 плюс 6 равно 9;
- д) один в поле не воин;                е) существует четное простое число.

6. Выявить логическую структуру высказывания и записать в виде выражения с помощью операций над высказываниями, определить значение истинности высказываний.

- а) «Число 400 натуральное, двузначное и оно не делится на 20».
- б) «Неверно, что квадрат есть прямоугольник и четырехугольник».

7. Запишите следующие предложения с помощью математических знаков. Укажите среди них высказывания. Выясните, какие из них истинны, а какие ложны. Составьте их отрицание двумя способами:

- а) сумма чисел 12 и 17 равна 19;
- б) произведение чисел 9 и 6;
- в) разность чисел  $x$  и 2 равна 10;
- г) число  $-5$  больше числа  $-3$ ;
- д) при делении числа 19 на 8 получается в остатке 3;
- е) число  $x$  не больше 0,5.

8. Сформулируйте отрицание следующих высказываний, определите значение истинности данных высказываний и их отрицаний:

- а) 1245 – четное число;
- б) число  $2/9$  – рациональное;
- в) число 335 – натуральное и действительное
- г) 44 плюс 66 равно 99;
- д) один в поле не воин;
- е) существует четное простое число.

9. Какие из нижеприведенных предложений является отрицанием высказывания «Все натуральные числа кратны 7». Свой ответ обоснуйте.

- а) Все натуральные числа не кратны 7.
- б) Существуют натуральные числа не кратные 7.
- в) Существуют натуральные числа кратные 7.
- г) Неверно, что все натуральные числа кратны 7.
- д) Не все натуральные числа кратны 7.

10. Постройте двумя способами отрицание высказывания:

- а) Всякое свойство прямоугольника присуще квадрату.
- б) Некоторые числа являются трехзначными.
- в) Натуральные числа являются подмножеством рациональных чисел.

11. Определите, являются ли данные предложения отрицаниями друг друга. Ответ обоснуйте.

- а) Число 122 – четное. Число 122 – нечетное.
- б) Все составные числа нечетны. Все составные числа четны.
- в) За числом 3 следует число 4. Неверно, что за числом 3 следует 4.

12. Переформулируйте данные предложения так, чтобы они не содержали слов «неверно, что», но имели тот же смысл:

- а) Неверно, что число 20 четное или простое.
- б) Неверно, что каждый человек болен.
- в) Неверно, что у хотя бы одного треугольника стороны равны.

13. Сформулируйте данные предложения, которые начинаются словами «неверно, что», но имеют тот же смысл что и данные:

- а) Две прямые КМ и СД не параллельны и не пересекаются.
- б) Существуют линейные уравнения, которые имеют корни.
- в) Все прямоугольники равны.

14. Постройте отрицание высказываний и выясните, что истинно – данное высказывание или его отрицание:

- а) Произведение чисел 405 и 7 меньше, чем сумма чисел 345 и 2835.
- б) Среди треугольников есть треугольники, площади которых равны.
- в) Частное чисел 25842 и 6 меньше разности чисел 14150 и 9833.

15. Проверьте правильность построенных отрицаний высказывания «Некоторые однозначные числа делятся на 20»:

- а) Неверно, что некоторые однозначные числа делятся на 20.
- б) Существуют однозначные числа, которые делятся на 20.

16. Какое отрицание высказывания «Некоторые студенты получают стипендию» построено неверно, если:

- а) Любой студент получает стипендию.
- б) Неверно, что некоторые студенты получают стипендию.
- в) Хотя бы один студент получает стипендию.

17. Приведите примеры высказываний, начинающие словами «любой, каждый, всякий, все». Определите вид квантора.

18. Приведите примеры высказываний, начинающие словами «некоторый, найдется, хотя бы один, существует». Определите вид квантора.

19. Приведите пример и запишите на математическом языке отрицание высказывания, начинающего с квантора общности или существования.

20. Приведите пример и запишите на математическом языке отрицание конъюнкции или дизъюнкции.

## РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### §3. Основные комбинаторные конфигурации

#### 3.1. Понятие факториала

Один из интересных разделов математики – это комбинаторика, посвященный решению задач выбора и расположения элементов конечного множества в соответствии с заданными условиями. Повторим программный материал, куда входит: правило суммы и произведения, понятие «факториал» и «упорядоченное множество».

#### Упражнения

1. Сколько различных костюмов можно составить, если имеются три брюки и пять блузок (все брюки подходят к блузкам по цвету и размеру)?

2. Айланмаа должна одеть маленького брата, у которого 7 ползунков и 6 распашонок. Сколько различных вариантов выбора есть у Айланмаа?

3. Каждый из 15 городов некоторого государства соединен с остальными городами авиалинией, которую обслуживает один самолет. Сколько самолетов обслуживают авиалинии этого государства?

4. Из села Кунгуртуг в город Кызыл ведут две дороги, а из Кызыла в Абакан ведут три дороги. Сколько путей ведут от села Кунгуртуг к городу Абакан, если ехать через город Кызыл?

5. Из города Абакан в Красноярск можно доехать 3 способами, а из Красноярска в Москву – 3 способами. Сколькими способами можно добраться из Красноярска до Москвы?

6. На полке у Кызыл-оола лежат 4 книги тувинских писателей, 3 книги по теории легкой атлетики и 5 книг разных авторов по психологии, 10 лекционных тетрадей по различным дисциплинам. Сколькими способами можно взять одну книгу с полки? Сколькими способами можно выбрать одну лекционную тетрадь?

7. Студенты первокурсники Чайыр, Менди и Монгун, сдавали экзамен по национальной борьбе «Хуреш», по математике, по педагогике и по легкой атлетике, и получили

отметки «5» и «4». Можем ли утверждать, что, по крайней мере, трое из них получают по каждой дисциплине одинаковые отметки?

8. В вазу Уран поставила 6 белых, 5 красных и 3 желтых цветов. Определите, сколькими способами можно взять из вазы один цветок?

9. В вазу Уран поставила 6 белых, 5 красных и 3 желтых цветов. Определите, сколькими способами можно взять из вазы три цветочка так, чтобы один из них был белый, другой – красный, третий – желтый?

10. Вычислите: а)  $0!$ ; б)  $1!$ ; в)  $6! + 8!$ .

11. Упростите выражение: а)  $7! \times 4! / 10!$  б)  $8! / 3! \times 5!$   
в)  $9! / 2! \times 7!$

12. Решите уравнение:  $m! - (m - 1)! / (m + 1)! = 1/6!$ .

13. Придумайте несколько способов упорядочения множества студентов одной физкультурной группы.

14. Какие упорядоченные множества вы знаете, перечислите их.

15. Множество студентов из 13 человек упорядочили по алфавиту. Второй раз на уроке физической культуры ту же группу упорядочили по уменьшению роста студентов. Какие множества при этом получится: одинаковые или равные?

16. У одной матери сыновей звали Маадыр, Маргы и Кызыл. Упорядочьте сыновей у матери, по какому-нибудь признаку. Сколько упорядоченных множеств можно получить, связанных с именами мальчиков?

17. Упростите выражение, если:

18. Коммерсант Айлан купила 25 розовых бантиков и 20 серебряных «заколок - невидимок». Сколько различных пар можно составить из них?

19. На полке стоят 37 CD – дисков и 154 DVD – дисков. Сколькими способами можно выбрать пару разных дисков?

20. В свадебном салоне предлагают 15 фасонов платья невесты и 14 разных туфель. Сколькими способами может выбрать Солангы пару торжества?

### 3.2. Перестановки без повторений

В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: перестановки, размещения и сочетания без повторений и с повторениями. Начинаем решать задачи, связанные с первой комбинацией – перестановкой без повторений. Вспомните определение данной комбинации и формулу для ее вычисления.

#### Упражнения

1. Для проведения круглого стола по теме «Тувинские национальные детские игры» пригласили 9 гостей. Сколькими способами гостей можно рассадить на 9 стульях?

2. Сколько различных перестановок можно образовать из букв следующих слов: 1) шарик; 2) таракан; 3) солнышко; 4) абракадабра?

3. Из цифр 1, 2, 3 можно составить трехзначные числа: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Сколько перестановок из трех элементов можно получить?

4. Чему равно количество всех равновозможных исходов, если шесть карточек с буквами КМОСС разложены в одну линию в произвольном порядке?

5. Айдаш забыл две последние цифры телефонного номера однокурсника и, помня лишь, что они различны, набрал их наугад. Найдите общее количество всех его попыток дозвониться до однокурсника.

6. Дадар-оол положил в коробку 3 красных и 7 белых шаров. Найдите общее количество способов, когда извлекается наугад 2 белых шара.

7. В созвездии «Чеди - Хаан» 7 звезд. Сколькими различными способами можно назвать звезды данного созвездия?

8. Код замка состоит из 4 знаков. Сколькими способами можно открыть его?

9. Санчай придумывает трехзначные числа из цифр 2, 1 и 3. Сколько чисел он впишет, если каждую цифру будет использовать только один раз?

10. У Анаймаа имеется ткань двух цветов: голубая и зеленая. Ей нужно обить диван, кресло и стул. Сколько

существует у Анаймаа различных вариантов обивки этой мебели?

11. За свои рисунки Албанчы получил две положительные отметки. Узнайте, какими они могут быть.

12. В гости пригласили 8 представителей племени тюмбо-люмбо. Сколькими способами можно их рассадить на 8 стульях?

13. В студенческой подгруппе 6 практикантов. Надо их отправить в разные детские секции волейбола для судейства на соревнованиях. Сколькими способами это можно сделать?

14. В коробке лежат 8 998 999 апельсинов и 611 788 111 груш. Сколькими способами можно выбрать один фрукт?

15. В студенческой столовой колледжа 6 первых блюда и 5 вторых. Сколькими способами можно составить из них обед?

16. Вычислите: а)  $23! - 22! + 21! + P_5$ ; б)  $19! + 18! - 17!$ .

17. Упростите  $P_9 - P_4 \times P_2$ .

18. Дайте определения перестановке без повторений и приведите два примера на вычисление.

19. Приведите примеры из практической жизни, где используется понятие «перестановка без повторений».

20. У людоеда в подвале 10 пленников. Сколькими способами он может выбрать трех из них соответственно себе на завтрак, обед и ужин?

### 3.3. Размещения без повторений

**Второй комбинацией является размещения без повторений** из  $m$  элементов по  $k$ . Чтобы успешно решить предложенные задания повторите определение и формулы, связанные с данной комбинацией. Необходимо выяснить это комбинация, упорядоченная, или не требует порядка элементов.

#### Упражнения

1. Группа студентов ФК\_201 колледжа изучает семь учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если на этот день недели запланированы занятия по четырём дисциплинам?

2. В студенческой группе 30 студентов-спортсменов. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства на вахте общежития, если:

- 1) один из них должен быть старшим;
- 2) старшего быть не должно?

3. Из цифр 1, 2, 3 составьте двухзначные числа. Сколько размещений из трех элементов по два элемента можно получить?

4. Сколькими способами можно распределить 10 концертных билетов 2 старостам студенческих групп, если один из них будет третьекурсником?

5. Посчитайте, сколько трехзначных чисел, где цифры 4, 7, 8, 9 встречаются по одному разу?

6. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 1, 8, 7, при условии, что цифры не должны повторяться?

7. 30 кандидатов претендуют на пост директора, старшего тренера по плаванию, тренера по боксу и четыре других поста в администрацию спортивного комплекса «Субедей». Определите число способов замещения четырех остальных вакансий после избрания директора, старшего тренера по плаванию, тренера по боксу.

8. Помогите Арбыну узнать, сколько двузначных чисел можно составить из цифр 7, 5, 0, 3, 1, 4, при условии, что одна и та же цифра не должна повторяться в записи числа? Сколько трехзначных чисел можно составить, при условии, что цифры могут повторяться?

9. Сколько существует способов, чтобы составить 3 студенческих проекта, если предложены 36 тем по традициям и обычаям народов, живущих в Сибири, притом один из них занимал призовое место на конкурсе?

10. Сколькими способами можно выбрать 3 волонтеров для организации акции «Теплые носочки», если в группе имеется 30 волонтеров, притом один из них староста группы?

11. Сколько будет способов распределения 3 призовых мест, если на Всероссийском чемпионате Worldskilss по компетенции «Физическая культура» участвовали 8 команд среди образовательных учреждений СПО Республики Тыва, при

условии, что одна команда была победителей прошлогодного сезона?

12. Студентки Шолбана, Айрана и Сиринама купили цветы 6 сортов. Сколько можно составить различных букетов из 3 цветов в каждом, если один из них будет обязательно белого цвета? (Букеты, отличающиеся лишь расположением цветов, считаются одинаковыми.)

13. Вычислите: а)  $A_5^3$ ; б)  $A_4^2$ ; в)  $A_6^3$ ; г)  $A_6^5 + A_{17}^{15}$ .

14. В группе 25 добровольцев волонтеров. Сколько способов дежурства можно составить из 2 человек при проведении благотворительной акции «Улыбка ребенка», если один из них будет старшим?

15. Волонтерам Серену и Шораану предложили посетить 3 из 6 имеющихся в списке ветеранов. Сколькими способами они могут это сделать, если один будет в форме?

16. Бады составляет из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 шестизначные числа, кратных пяти. Сколько их он может составить, если в числе цифры не повторяются?

17. Сколько различных вариантов расписания можно составить для студентов специальности «Адаптивная физическая культура», если в 1 семестре имеется 18 дисциплин и на день могут быть включены 3 из них?

18. В магазин привезли 18 упаковок разных соков. Сколькими способами можно выбрать 2 из них, притом один должен быть виноградным?

19. Нужно составить из 6 полосок разных цветов трехцветный флаг. Сколько есть способов, если один из них будет красного цвета?

20. Вычислите: а)  $A_5^3 + (A_6^5 + A_6^5)$ ; б)  $A_4^2 - A_6^5$ ; в)  $P_5$  г)

$P_8$

### 3.4. Сочетания без повторений

**Вспомните, что сочетание без повторений** – это неупорядоченные  $k$ - элементные подмножества данного множества  $A$ , содержащего  $m$  элементов. Запишите сначала его обозначение, как правильно читается и записывается. После

этого запишите формулу для вычисления числа таких сочетаний без повторений. Приступите для решения предложенных заданий.

### Упражнения

1. Баазан написал на карточках числа 1, 2, 3, 4, 5. Сколько различных четырехзначных чисел он может из них составить?

2. Ойнаар расставляла книги. Найдите, сколькими способами она может расставить 12 книг по 3 на книжной полке?

3. Волонтерам Алдару и Даваа поручили разнести 10 писем по 8 адресам. Вычислите, сколькими способами они могут выполнить данное поручение?

4. В физкультурной группе изучается 13 дисциплин на первом полугодии учебного года. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в понедельник должно быть 5 занятий, притом все они разные?

5. В олимпиаде Маадыр решил следующую задачу: Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числе не повторялись? Найдите, какой верный ответ дал Маадыр?

6. В команде колледжа 10 спортсменов, среди которых выбирают четырех участников эстафеты на 4 этапа. Сколькими способами преподаватель Куулар Шолбан может расставить спортсменов - физкультурников по этапам эстафеты?

7. Сколькими способами куратор группы ФК\_201 может выбрать двух дежурных из 25 студентов?

8. Чемпионат, в котором участвуют 12 команд, проводится в два круга (т.е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.

9. В службе доставки имеются пицца 5 видов. Сколькими способами можно купить 3 вида пиццы?

10. В хлебном отделе имеются булки белого, серого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 5 булок хлеба?

11. Имеется  $n_1$  книг одного автора,  $n_2$ —второго,  $n_3$ —третьего. Каким числом способов можно выбрать

- а) одну книгу;
- б) две книги разных авторов;
- в) три книги разных авторов;
- г) две книги одного автора;
- д) одну книгу первого автора, две - второго и три -третьего?

12. Из 10 желтых и 5 красных гвоздик нужно составить букет так, чтобы в нем было 2 желтые и 3 красные гвоздики. Сколькими способами это можно сделать?

13. В чемпионате Республики Тыва по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд из кожуунов, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Найдите число матчей в течение сезона.

14. На пять студентов – отличников выделены три путевки в лагерь «Байлак». Сколькими способами их можно распределить, если: 1) все путевки различны; 2) все путевки одинаковы?

15. Сколькими способами можно расположить в ряд пять белых и четыре черных туристических палат студентов вожатых так, чтобы черные палаты не стояли рядом? Рассмотреть два случая: 1) туристические палаты одного цвета неотличимы друг от друга; 2) все туристические палаты разные.

16. Хоккейная команда колледжа состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер Григорий Комбу-Сурунович может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

17. Найдите число способов, которыми группу из 12 студентов можно разбить на бригады по три человека в каждой для уборки территории колледжа.

18. У Атоса, Партоса и Арамиса есть шпага, арбалет и пистолет.

- а) Сколькими способами можно вооружить мушкетеров?
- б) Сколько существует вариантов вооружения, если шпагой должен владеть Арамис?
- в) Сколько существует вариантов вооружения, если шпагой должен владеть Арамис, а пистолетом Партос?

19. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 5, 8, 9 при условии, что:

- а) цифры могут повторяться;
- б) цифры не должны повторяться;
- в) цифры будут четными.

20. Используя цифры 1, 2, 0 составьте все двузначные числа. В ответе расположите в порядке возрастания через точку с запятой.

## **§4. Способы вычисления вероятности событий**

### **4.1. Основные понятия и определения**

Учебников, посвященных разделу «Теория вероятностей» много. В интернете можете скачать любую литературу и повторить теорию, вспомните виды событий, и их обозначение. Основная цель: научиться правильно определять виды событий.

### **Упражнения**

1. Определите, какие из следующих событий невозможные, какие – достоверные, какие – случайные:

- а)  $A =$  футбольный матч «ЦСКА» – «Металлург» закончился вничью};
- б)  $B =$  вы проиграете или выиграете, участвуя в беспроигрышной лотерее};
- в)  $C =$  {вечером выпадет снег, а через 2 часа будет светить солнце};
- г)  $D =$  {завтра будет контрольная по математике};
- д)  $E =$  {30 марта будет дождь};
- е)  $F =$  {вас изберут президентом Республики Тыва};
- ж)  $G =$  {вас изберут президентом России};
- з)  $R =$  {вас изберут президентом США}.

2. Вы купили в магазине телевизор, на который фирма-производитель дает 1,5 года гарантии. Какие из следующих событий: невозможные, достоверные, случайные:

- а)  $A =$  {телевизор не сломается в течение года};
- б)  $B =$  {телевизор не сломается в течение двух лет};
- в)  $C =$  {в течение двух лет вам не придется платить за ремонт телевизора};
- г)  $D =$  {телевизор сломается на третий год}?

3. В коробке лежит 15 красных, 5 зеленых и 4 синие ручки. Из коробки наугад вынимают 2 предмета. Какие из следующих событий невозможные, достоверные, случайные:

- а)  $A = \{ \text{вынуты 2 красные ручки} \}$ ;
- б)  $B = \{ \text{вынуты 2 зеленые ручки} \}$ ;
- в)  $C = \{ \text{вынуты 2 синие ручки} \}$ ;
- г)  $D = \{ \text{вынуты ручки двух разных цветов} \}$ ;
- д)  $E = \{ \text{вынуты 2 ручки} \}$ ;
- е)  $F = \{ \text{вынуты 2 карандаша} \}$ ?

4. Три господина, придя в ресторан, сдали в гардероб свои шляпы. Расходились по домам они уже в темноте и разобрали шляпы наугад. Определите из следующих событий невозможные, достоверные, случайные события:

- а)  $A = \{ \text{каждый надел свою шляпу} \}$ ;
- б)  $B = \{ \text{все надели чужие шляпы} \}$ ;
- в)  $C = \{ \text{двое надели чужие шляпы, а один – свою} \}$ ;
- г)  $D = \{ \text{двое надели свои шляпы, а один – чужую} \}$ ?

5. В игре «Любовь с первого взгляда» участвуют трое юношей и три девушки. Каждый юноша выбирает одну девушку, а каждая девушка – одного из юношей. Если юноша и девушка выбирают друг друга, то образуется пара. Укажите из следующих событий невозможные, достоверные и случайные события:

- а)  $A = \{ \text{не образовалось ни одной пары} \}$ ;
- б)  $B = \{ \text{образовалась одна пара} \}$ ;
- в)  $C = \{ \text{образовалось 2 пары} \}$ ;
- г)  $D = \{ \text{образовалось 3 пары} \}$ ?

6. Винни-Пух, Пятачок и все-все-все садятся за круглый стол праздновать день рождения. При каком количестве всех-всех-всех событие  $A = \{ \text{Винни-Пух и Пятачок будут сидеть рядом} \}$  является достоверным, а при каком будет случайным?

7. В школе учится  $N$  учеников. При каких значениях  $N$  событие  $A = \{ \text{в школе есть ученики с совпадающими днями рождениями} \}$  является достоверным, а при каком значении  $N$ , будет случайным?

8. Студенты колледжа среди 100 билетов благотворительной лотереи 20 из них сделали выигрышными.

Сколько билетов вам надо купить, чтобы событие  $A = \{\text{вы ничего не выиграете}\}$  было невозможным?

9. В шкафу 10 пар ботинок с 36-го по 45-й размер – по одной паре каждого. Ботинки достают из шкафа наугад. Какое наименьшее количество ботинок надо вынуть из шкафа, чтобы событие  $A = \{\text{из вынутых ботинок можно составить хотя бы одну пару}\}$  было достоверным?

10. В классе учится 10 мальчиков и 20 девочек. Какие из следующих событий являются для такого класса невозможным, достоверным и случайным:

- а)  $A = \{\text{в классе есть 2 человека, родившихся в разные месяцы}\}$ ;
- б)  $B = \{\text{в классе есть 2 человека, родившихся в одном месяце}\}$ ;
- в)  $C = \{\text{в классе есть 2 мальчика, родившихся в одном месяце}\}$ ;
- г)  $D = \{\text{в классе есть 2 девочки, родившихся в одном месяце}\}$ ;
- д)  $E = \{\text{все мальчики родились в разные месяцы}\}$ ;
- е)  $F = \{\text{все девочки родились в разные месяцы}\}$ ;
- ж)  $G = \{\text{есть мальчик и девочка, родившиеся в одном месяце}\}$ ;
- з)  $H = \{\text{есть мальчик и девочка, родившиеся в разные месяцы}\}$ ?

11. Автобусу, в котором едет 15 пассажиров, предстоит сделать 10 остановок. Какие из следующих событий будут невозможными, достоверными, случайными:

- а)  $A = \{\text{все пассажиры выйдут из автобуса на разных остановках}\}$ ;
- б)  $B = \{\text{все пассажиры выйдут на одной остановке}\}$ ;
- в)  $C = \{\text{на каждой остановке хоть кто-то выйдет}\}$ ;
- г)  $D = \{\text{найдется остановка, на которой никто не выйдет}\}$ ;
- д)  $E = \{\text{на всех остановках выйдет четное число пассажиров}\}$ ;
- е)  $F = \{\text{на всех остановках выйдет нечетное число пассажиров}\}$ ?

12. В коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад  $N$  шаров. Рассмотрим событие  $A = \{\text{среди вынутых шаров окажутся шары ровно трех цветов}\}$ . Для каждого  $N$  от 1 до 9 определите, какое это событие – невозможное, достоверное или случайное.

13. В коробке снова 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад 4 шара. Рассмотрим событие  $B = \{\text{среди вынутых шаров окажутся шары ровно  $M$  цветов}\}$ . Для каждого  $M$  от 1 до 4 определите, какое это событие – невозможное, достоверное или случайное.

14. Ниже приведены события, укажите, какие из них являются:

- 1) невозможными;      2) достоверными;      3) случайными.
- а) выигрыш по одному билету спортивной лотереи;
- б) извлечение из урны цветного шара, если в ней находятся 3 белых и 5 оранжевых шаров;
- в) поступление в колледж абитуриента, если он получил 25 баллов на вступительных экзаменах при сдаче четырех экзаменов, если применяется пятибалльная система оценок;
- г) извлечение «дубля» из полной игры в домино;
- д) выпадение более шести очков на верхней грани игрального кубика.

15. Определите пару событий, которые являются несовместными:

- а) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 100 включительно: делится на 10; делится на 11;
- б) нарушение в работе мотора подводной лодки: мотора первого отсека; мотора второго отсека;
- в) попадание или промах при одном выстреле по мишени;
- г) выигрыш, проигрыш в шахматной партии;
- д) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 25 включительно является: четным; кратным трем?

16. Имеется один билет лотереи «6 из 45». События А состоит в том, что он выигрышный, а событие В – в том, что он невыигрышный. Являются ли эти события несовместными?

17. В «черном» ящике у Соланги 30 пронумерованных шаров. Помогите ей установить невозможные, достоверные, противоположные события для пронумерованных шаров:

- а) достали пронумерованный шар (А);
- б) достали шар с четным номером (В);
- в) достали шар с нечетным номером (С);
- г) достали шар без номера (Д). Какие из них составляют полную систему?

18. Являются ли достоверными или невозможными события, состоящие в том, при однократном бросании кости выпадет: 5 очков; 7 очков; от 1 до 6 очков? Какие события в этом испытании составляют полную группу?

19. Случайным образом выбирают одну из 28 костей домино. Описать множество элементарных исходов  $\Omega$ . Перечислить все элементарные исходы, из которых состоят следующие события:  $A = \{\text{на выбранной кости очки совпадают}\}$ ;  $B = \{\text{сумма очков на выбранной кости равна 6}\}$ ;  $C = \{\text{произведение числа очков на кости нечетно}\}$ ;  $B - A$ ;  $AB$ ;  $AC$ ;  $AB - C$ ;  $(A + B) \cdot C$ .

20. Адар, Арат и Эрес по мишени производят три выстрела. Пусть событие  $A = \{\text{попадание при } i\text{-м выстреле, } i = 1, 2, 3\}$ . Представить в виде суммы и произведения событий  $A_i$

или  $\overline{A_i}$ , следующие события:

$A = \{\text{Адар, Эрес, Арат попали в мишень}\}$ ;

$B = \{\text{Адар, Эрес, Арат промахнулись}\}$ ;

$C = \{\text{хотя бы одно попадание}\}$ ;

$D = \{\text{хотя бы один промах}\}$ ;

$E = \{\text{не менее двух попаданий}\}$ ;

$F = \{\text{не больше одного попадания}\}$ ;

$N = \{\text{попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле}\}$ .

## 4.2. Определения вероятности события

Единственная формула с помощью которого вычисляется вероятность события, вы уже знаете из школьной программы. Вам предстоит закрепить теорему сложения и умножения вероятностей. Закрепить независимость событий.

### Упражнения

1. Агбаан произвел три выстрела по мишени. Запишите на математическом языке: 1) попадание во всех трех выстрелах; 2) промах во всех трех выстрелах; 3) хотя бы одно попадание; 4) ровно два попадания.

2. Построить пространство элементарных событий испытания, рассмотренного в примере 1.

3. Уран-Маадыр подбрасывает две монеты. Какова вероятность появления герба хотя бы на одной из них?

4. Шесть карточек с буквами КМООСС разложены в одну линию в произвольном порядке. Какова вероятность того, что получилось слово «космос»?

5. Абонент забыл две последние цифры телефонного номера и, помня лишь, что они различны, набрал их наугад. Найти вероятность правильного соединения.

6. Из 1000 собранных на заводе компьютеров 5 штук бракованных. Эксперт Болат-оол проверяет один наугад выбранный компьютер из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый компьютер окажется бракованным.

7. В урне 19 оранжевых, 5 красных и 6 синих кубиков. Из урны наугад достают один кубик. Какова вероятность того, что этот кубик окажется красным?

8. Маадыр, Борбаана, Кара, Сайдаш, Мерген, Айрана бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.

9. В региональном чемпионате «Молодые профессионалы» участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда педагогического колледжа окажется во второй группе?

10. В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из педагогического колледжа, 6 спортсменов из техникума «Экономики и права» и 3 спортсмена из техникума «Строительный». Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из педагогического колледжа.

11. Борбак-оол выбирает электрические лампочки. На каждые 1000 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить Борбак-оолу исправную лампочку?

12. В группе туристов физкультурной группы 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Далай-оол, входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

13. В чемпионате колледжа по футболу участвуют 20 команд, которые жеребьевкой распределяются на 4 группы: А, В, С и D. Какова вероятность того, что команда студентов специальности «Адаптивная физическая культура» не попадает в группу А?

14. На турнир по шахматам прибыло 26 участников, в том числе Каадыр и Тоорук. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбили на две группы по 13 человек. Найдите вероятность того, что Каадыр и Тоорук попадут в разные группы.

15. В студенческой группе 16 человек, среди них два друга – Сылдыс и Шевер. Студентов случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Сылдыс и Шевер окажутся в одной группе.

16. В группе «Физическая культура» 21 студента, среди них два друга – Вадим и Оолак. Группу случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Оолак окажутся в одной группе.

17. Перед началом первого тура соревнования группу «Физическая культура» по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 16 спортсменов, среди которых 7 участников - разрядников по теннису, в том числе Баазыр Ондар. Найдите вероятность того, что в первом туре Баазыр Ондар будет играть с каким-либо спортсменом - разрядником?

18. Перед началом первого тура чемпионата колледжа по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашкистов, среди которых 3 участника из группы «Адаптивная физическая культура», в том числе Чоргаадай Одучай. Найдите вероятность того, что в первом туре Чоргаадай Одучай будет играть с каким-либо шашкистом из группы «Адаптивная физическая культура»?

19. В коридоре университета два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе

закончится в обоих автоматах, равна  $0,12$ . Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

20. Карыма выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что выбранное Карыма число делится на 5.

### 4.3. Операции над событиями

Предложенные к вашему вниманию задания помогут закрепить операции над событиями: сумма, разность и произведения.

#### Упражнения

1. Вероятность того, что утюг бракованный, равна  $0,06$ . Долума в магазине выбрала случайную упаковку, в которой два таких утюга. Найдите вероятность того, что оба утюга окажутся исправными.

2. Если Аржаан играет белыми, то он выигрывает у Барыма с вероятностью  $0,52$ . Если Аржаан играет черными, то он выигрывает у Барыма с вероятностью  $0,3$ . Мальчики играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что Аржаан выиграет оба раза.

3. В продуктовом магазине «Амданныг чем» три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью  $0,3$ . Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца будут заняты одновременно обслуживанием клиентов (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга в магазин).

4. Из «Левого дачного общества» в Кызыл ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 40 пассажиров, равна  $0,94$ . Вероятность того, что окажется меньше 25 пассажиров, равна  $0,56$ . Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 25 до 29.

5. На экзамене по математике Сайдашу достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Множество и операции над ними», равна  $0,2$ . Вероятность того, что это вопрос на тему «Элементы теории вероятностей», равна  $0,15$ . Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите

вероятность того, что на экзамене Сайдашу достанется вопрос по одной из этих двух тем.

6. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

7. В «Сказочной стране» бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Сказочной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в ней будет отличная погода.

8. В магазине «ДНС» стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

9. В торговом центре «Алексеевский» два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

10. Две фабрики выпускают одинаковые витрины из стекла. Первая фабрика выпускает 45%, а вторая 55% витрин. Первая фабрика выпускает 3% бракованных витрин со стеклами, а вторая – 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине витрина со стеклом окажется бракованным.

11. Снайпер Чечек-оол попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного ружья. Если Чечек-оол стреляет из нового ружья, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежат 10 ружей, из 4 из них стреляли. Чечек-оол видит на стене муху, наудачу хватает первое попавшееся ружье и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что он промахнётся.

12. Чтобы поступить в колледж на специальность «Физическая культура», абитуриент должен набрать на практическом экзамене не менее 90 баллов по каждому из трёх видов – легкая атлетика, гимнастика и спортивные игры. Чтобы

поступить на специальность «Педагогика дополнительного образования», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент Каадыр. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку – 0,8, по иностранному языку – 0,7 и по обществознанию – 0,5. Найдите вероятность того, что Каадыр. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

13. По отзывам покупателей Сай-уу оценила надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина Абакана, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Новосибирска, равна 0,9. Сай-Суу заказала платье сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

14. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Хартыга» по очереди играет с командами «Хемчик», «Эзирлер» и «Авырга». Найдите вероятность того, что команда «Хартыга» будет начинать только первую и последнюю игры.

15. Всем пациентам с подозрением на COVID-19 делают анализ на наличие антител в крови. Если анализ выявляет ковид, то результат анализа называется *«переболевшим данной болезнью»*. У больных ковидом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен ковидом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением, действительно переболели ковидом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на ковид, будет положительным.

16. Автоматическая линия изготавливает внутренние замки для дверей. Вероятность того, что готовый замок неисправен, равна 0,02. Перед упаковкой каждый замок проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправный замок, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправный замок, равна 0,01.

Найдите вероятность того, что случайно выбранный замок будет забракован системой контроля.

17. Саваар стреляет по мишени один раз. В случае промаха он делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

18. Перед началом футбольного матча судья Хайдып Роза-Чечек бросает монетку, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Авырга» должна сыграть два матча – с командой «Хартыга» и с командой «Эзирлер». Найдите вероятность того, что в обоих матчах первой мячом будет владеть команда «Авырга».

19. Саая Айдаш 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что Айдаш первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся.

20. Перед началом матча по футболу судья Комбу-Сурунович бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Бай-Тайга» играет по очереди с командами «Алаш», «Эне-Сай», «Хемчик». Найти вероятность того, что команда «Бай-Тайга» будет первой владеть мячом только в игре с командой «Алаш».

### Творческие задачи

1. Придумайте три множества  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и с помощью операций объединения и пересечения запишите множество, состоящее из элементов, принадлежащих:

- 1) всем трем множествам;
- 2) хотя бы одному множеству;
- 3) по крайней мере, двум из придуманных множеств.

2. Доказать, что равенства: 1)  $A \cup B = B$ ; 2)  $A \cap B = A$ ; верны тогда и только тогда, когда  $A \subset B$ .

3. Доказать, что равенство  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ .

4. Доказать равенство:

- 1)  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ ;
- 2)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;
- 3)  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ ;
- 4)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ .

5. Составьте систему координат. Заштрихуйте на координатной плоскости множество точек, координат которых удовлетворяют неравенству: 1.  $y \leq x - 3$ ; 2.  $y \geq x + 2$ .

6. Найдите ошибку при решении задачи: Даны множества  $A = \{4; 67; 45; 55; 12\}$ ,  $B = \{3, 67, 45, 35\}$ ,  $C = \{9; 88\}$ . В декартовом произведении множеств содержится 126 элементов.

7. В группе у Кудеса Сояновича имеется 22 студента; 10 из них умеют играть в шахматы, 8 – в шашки; и в шахматы, и в шашки играют 3 студента. Сколько студентов не умеет играть ни в шахматы, ни в шашки?

8. В одной известной спортивной семье Кууларов семеро детей увлекались легкой атлетикой, шестеро – лыжными гонками, пятеро – велоспортом. Четверо занимались легкой атлетикой и лыжами, трое – легкой атлетикой и велоспортом, двое – лыжными гонками и велоспортом, а один увлекался легкой атлетикой, лыжами и велоспортом. Сколько детей было в семье Кууларов? Сколько из них увлекалось только одним видом спорта?

9. Среди 150 студентов марки собирают только мальчики. Марки СССР собирают 67 человек, марки Африки – 48, марки Америки – 34, только марки СССР – 11, только Африки – 7, только Америки – 2. Лишь один студент собирает марки СССР, Америки и Африки.

Найдите число девушек среди 150 студентов?

10. Изобразите два пересекающихся круга, вписанные в прямоугольник. Прямоугольник изображает всех студентов колледжа, обозначьте круги соответственно буквами К и О. Круг К – те, кто пользуется социальной сетью «ВКонтакте», круг О – те, кто пользуется сетью «Одноклассники». Покажите штриховкой следующие подмножества студентов колледжа:

- а) сидят в «ВКонтакте» и в «Одноклассниках»;
- б) общаются только в «ВКонтакте»;
- в) общаются только в «Одноклассниках»;
- г) пользуются хотя бы одной социальной сетью;
- д) не пользуются ни той, ни другой сетью.

11. Придумайте кортеж длины 12, 15.

### **Задачи на развитие логического мышления и сообразительности**

1. Сколько времени надо варить 6 яиц вкрутую, если одно яйцо вкрутую надо варить 5 минут?

2. Сколько весит щука, если она весит 8 кг и еще половина ее собственного веса?

3. В кафе «Олчейлиг» предлагают два первых блюда: щи, тыва «Мун» и четыре вторых блюда: лагман, котлеты, сосиски, пельмени. Укажите все обеды из двух блюд, которые может заказать спортсмен.

4. На обед в столовой колледжа предлагается 4 супа, 5 вторых блюда и 3 разных сока. Сколько различных обедов можно составить по предложенному меню?

5. Два повара должны испечь 174 хуужуур (пирожок). За час работы один повар может испечь 30 хуужуур, а другой 28. За сколько часов, работая вместе они испекут все хуужуур.

6. Как вы можете сделать, если нужно пожарить 12 котлет. На сковороду помещаются только 8. Жарить надо с двух сторон, каждая сторона прожаривается за 4 минут, да еще нужно успеть приготовить за 12 минут?

7. Сколько весит терпуг, если его хвост весит 4 кг, ее голова весит столько же, сколько его хвост и половина тела, а тело весит столько же, сколько его голова и хвост вместе взятые?

8. Алдынмаа испекла 5 порций блинов по 4 штуки в каждой, а далган (лепешка) - на 7 штук больше, чем блинов. Далган она разложила в 3 тарелки поровну. Сколько далгана в каждой тарелке?

9. Морковь лежит в двух мешках. Причем если из первого мешка во второй переложить 1кг моркови, то во втором мешке станет в 2 раза больше, чем в первом. А если из второго переложить в первый 1 кг моркови, тогда в обоих мешках станет поровну. Сколько моркови было в каждом мешке?

10. Для приготовления обеда Онермаа потребовалось несколько луковиц. Четверть из них она положила в суп, 3 луковицы ушло на салат, а половину использовала на второе блюдо. Сколько луковиц она положила в суп?

11. Алдар и Куулар чистили картошку, и вдвоем очистили 400 штук. Алдар очищает 3 штуки в минуту, Куулар – две. Куулар работал на 25 минут дольше Алдара. Сколько времени работал каждый?

12. Сай-Суу надо очень быстро поджарить 3 кусочка хлеба. У нее на сковороде вмещается 2, причём на поджаривание одной стороны уходит одна минута. За какое минимальное время их можно поджарить и как это сделать Сай-Суу?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данный практикум адресован студентам среднего профессионального образования, обучающимся по специальности 49. 02. 01. «Физическая культура» и 49. 02. 02. «Адаптивная физическая культура».

Программа учебной дисциплины «Математика» является частью основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС СПО для специальностей «Физическая культура» и «Адаптивная физическая культура» и направлена на повышение уровня фундаментальной математической подготовки студентов и использования ее в прикладных задачах, возникающих в ходе выполнения профессиональной деятельности.

Студент, обучающийся по специальности «Физическая культура», или по специальности «Адаптивная физическая культура», в соответствии ФГОС СПО в результате изучения обязательной части дисциплины «Математика» должен знать следующий программный материал:

- понятие множества, отношения между множествами, операции над ними;
- основные комбинаторные конфигурации;
- способы вычисления вероятности событий;
- способы обоснования истинности высказываний;
- понятие положительной скалярной величины, процесс ее измерения;
- стандартные единицы величин и соотношения между ними;
- правила приближенных вычислений и нахождения процентного соотношения;
- методы математической статистики.

В практикуме рассматриваются первые две главы программы. Каждая глава разбита на пункты и содержит краткий теоретический, практический материал, где студентам предложено большое количество упражнений для самостоятельного решения.

Таким образом, выполняя предлагаемые упражнения, можно повторить и закрепить теорию, ее основные понятия и определения, формулы.

Предлагаемый практикум составлен на основе многолетнего педагогического опыта практической работы автора со студентами колледжа специальностей «Физическая культура» и «Адаптивная физическая культура» и соответствует всем требованиям ФГОС СПО.

Таким образом, считаем, что разработанный практикум будет способствовать дальнейшему повышению математической, общей и профессиональной компетенций у будущих учителей физической и адаптивной физической культуры.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### Основная литература

1. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике: учебное пособие для средних специальных заведений / Н. В. Богомолов. – 6-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 2003. – 495 с. – Текст: непосредственный.
2. Григорьев, В. П. Элементы высшей математики: учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования / В. П. Григорьев, Ю. А. Дубинский. – Москва: Академия, 2004. – 320 с. – Текст: непосредственный.
3. Стойлова, Л. П. Математика: учебник для студентов высшего педагогического учебного заведений / Л. П. Стойлова. – Москва: Академия, 2007. – 432 с. – Текст: непосредственный.

### Дополнительная литература

1. Белошистая, А. В. Методика обучения математике в начальной школе : учебное пособие для студентов вузов специальности «Педагогика и методика начального образования» / А. В. Белошистая. – Москва: ВЛАДОС, 2007. – 455 с. – Текст: непосредственный.
2. Дмитриева, В. Ф. Формирование ключевых компетенций студентов среднего профессионального образования. – URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-professionalnyh-kompetentsiy-u-studentov-spo-cherez-vnedrenie-v-obrazovatelnyy-protsess-praktiko-orientirovannyh-zadach> (дата обращения: 25.03.2022). – Текст: электронный.
3. Использование практико-ориентированных задач при обучении математике. – URL: <https://multiurok.ru/volobuevasvetlana/files/ispol-zovaniie-praktiko-orientirovannykh-zadach-pri-obuchienii-matiematiki-v-uchriezhdienii-spo.html> (дата обращения: 17.03.2022). – Текст: электронный.
4. Каверин, С. В. Задачник по комбинаторике : учебно-методическое пособие. – Балашиха: Балашихинский промышленно-экономический колледж, 2014. – 22с. – URL:

<https://docplayer.com/> (дата обращения: 25.03.2022). – Текст: электронный.

5. Опыт реализации практико-ориентированного обучения на примере экономических специальностей СПО. – URL: <https://infourok.ru/metodicheskiy-material-po-teme-opit-realizacii-praktikoorientirovannogo-obucheniya-na-primere-studentov-ekonomicheskikh-specialno-589097.html> (дата обращения: 25.03.2022). – Текст: электронный.

6. Применение практико-ориентированных задач в обучении математике. – URL: <https://kopilkaurokov.ru/matematika/prochee/stat-ia-primieneniie-praktiko-oriiientirovannykh-zadach-v-obuchienii-matiematikie> (дата обращения: 25.03.2022). – Текст: электронный.

7. Соловейчик, И. Л. Сборник задач с решениями для техникумов / И. Л. Соловейчик, В. Т. Лисичкин. – Москва: Оникс 21 век; Мир и Образование, 2003. – 464 с. – Текст: непосредственный.

8. Солодовник, Н. Н. Организация практико-ориентированного обучения и исследовательская деятельность студентов колледжа. – Текст : непосредственный // Теория и практика образования в современном мире: материалы V международного научно-практического конференции (г. Санкт-Петербург, июль 2014 г.). – Санкт-Петербург: Сатист, 2014. – С. 228-231. – URL: <http://moluch.ru/conf/ped/archive/105/5972/> (дата обращения: 25.03.2022).

9. Солодовников, А. С. Теория вероятностей: учебное пособие для студентов педагогических институтов по математических специальностей / А. С. Солодовников. – Москва: Просвещение, 1983. – 207 с. – Текст: непосредственный.

10. Тонких, А. П. Математика: учебное пособие для студентов факультетов подготовки учителей начальных классов. – В 2-х книгах. Кн.1. / А.П. Тонких. – Москва: Университет, 2002. – 530 с. – Текст: непосредственный.

11. Формирование профессиональных компетенций студентов СПО через внедрение в учебный процесс практико-ориентированных задач. – URL: <http://puma/article/n/formirovanie-professionalnyh-kompetentsiy-u->

studentov-spo-cherez-vnedrenie-v-obrazovatelnyy-protsess-praktiko-orientirovannyh-zadach#ixzz4RES2LfK6 (дата обращения: 25.03.2022). – Текст: электронный.

12. Хурума, А. К. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / А. К. Хурума. – Кызыл: Издательство ТывГУ, 2010. – 172 с. – Текст: непосредственный.

Учебное издание

**Монгуш Карина Канчык – ооловна**

**СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ**

*Практикум*

Редактор Е. К. Сенди

Дизайн обложки К.К. Сарыглар

Сдано в набор: 09.05.2022. Подписано в печать: 30.05.2022

Формат бумаги 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Физ. печ. л. 4,3. Заказ № 1811. Тираж 50 экз.

667000, Республика Тыва, г. Кызыл, ул. Ленина, 36

Тувинский государственный университет

Издательство ТувГУ