



ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Кызыл
2019

ФГБОУ ВО «Тувинский государственный университет»

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Учебно-методическое пособие

**Кызыл
2019**

УДК 531.8
ББК 30.12
О-75

Печатается по решению Учебно-методического Совета
Тувинского государственного университета

Основы технической механики : учеб.-метод. пособие / сост. А. С. Кысыдак, А. А. Чылбак, Д. С. Куулар. – Кызыл : Изд-во ТувГУ. – 2019. – 100 с.

Учебно-методическое пособие включает основные сведения из таких дисциплин, как теоретическая механика, сопротивление материалов в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования «Строительство». Приведены примеры решения типовых задач по всем разделам. Материал может использоваться студентами для самостоятельной работы по изучению разделов данной дисциплины и решения практических задач. Пособие предназначено для студентов вузов инженерно-технических факультетов дневной и заочной форм обучения.

Рецензенты:

А. С. Сандан, к.т.н., доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины» Тувинского государственного университета;
В. В. Канков, заместитель начальника Департамента архитектуры, градостроительства и земельных отношений г. Кызыла

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
РАЗДЕЛ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	5
1. Статика. Основные положения	5
1.1. Произвольная плоская система сил	11
1.2. Система сходящихся сил	20
1.3. Произвольная пространственная система сил	23
2. Кинематика	32
2.1. Кинематика точки	32
2.2. Кинематика плоскопараллельного движения твердого тела	38
2.3. Составное (сложное) движение точки	48
РАЗДЕЛ 2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ	56
1. Общие сведения	56
1.1. Основные положения. Гипотезы и допущения	56
1.2. Классификация нагрузок	57
1.3. Формы элементов конструкции	57
1.4. Метод сечений	58
2. Растяжение и сжатие. Напряжения при сжатии и растяжении	60
2.1. Основные понятия	60
2.2. Продольные и поперечные деформации. Закон Гука. Деформации при растяжении и сжатии	62
2.3. Механические характеристики материала	65
2.4. Предельные и допускаемые напряжения	67
3. Сдвиг (срез). Смятие	69
3.1. Деформации при сдвиге. Расчет конструкций на сдвиг (срез)	69
3.2. Смятие. Условие прочности при смятии	70
3.3. Практические расчеты на срез и на смятие	71
4. Изгиб	73
4.1. Основные определения	73
4.2. Опоры балок и опорные реакции	74
4.3. Внутренние силовые факторы при изгибе	74
4.4. Геометрические характеристики поперечных сечений	81
4.5. Нормальные и касательные напряжения	94
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	99

ВВЕДЕНИЕ

Механика наряду с математикой и физикой имеет большое общеобразовательное значение: способствует развитию логического мышления, приводит к пониманию весьма широкого круга явлений, относящихся к простейшей форме движущейся материи – механическому движению. Дисциплина "Техническая механика" является базой для создания надежных и экономичных конструкций, как на стадии проектирования, так и при изготовлении и эксплуатации.

К основным задачам этого предмета относится изучение:

- общих законов равновесия материальных тел;
- методов расчета элементов конструкций и машин на прочность, жесткость и устойчивость;
- законов движения материальных тел.

Учебно-методическое пособие состоит из двух разделов, включающих основы теоретической механики и сопротивления материалов. Изучение методов и приемов технической механики вырабатывает навыки для постановки и решения прикладных задач. На базе минимального количества материала обучаемому сообщаются такие знания, которые позволят ему в дальнейшем всю необходимую информацию находить и усваивать самостоятельно.

Овладение основами технической механики позволят специалистам инженерных направлений грамотно проводить технико-экономическую экспертизу проектов.

Учебно-методическое пособие будет полезным студентам технических специальностей, особенно студентам заочного отделения.

РАЗДЕЛ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1. СТАТИКА. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором рассматриваются операции с силами и равновесие твердых тел. Под состоянием равновесия твердого тела понимают не только состояние покоя, но и движение по инерции. В основе теоретической механики лежат экспериментально установленные аксиомы (законы), справедливость которых проверена многовековой практической деятельностью человека.

При действии сил на свободные тела их равновесие может быть нарушено. Тела или системы тел, равновесие которых изучается, несвободны, так как их перемещению в пространстве препятствуют другие (неподвижные) тела, скрепленные или соприкасающиеся с первыми. Тела, которые ограничивают (связывают) перемещение данного тела, называются связями.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещению, называется силой реакции связи или просто реакцией связи. Значения реакций связей определяются в процессе решения соответствующей задачи механики. Направлена же реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Ниже представлены наиболее часто встречающиеся типы связей и направления их реакций.

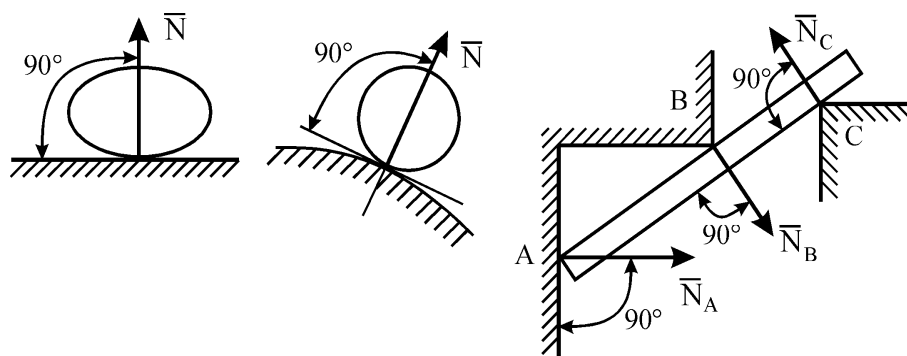


Рис. 1.1.

Гладкая плоскость (поверхность или опора) (рис. 1.1.). Реакция $\bar{N}$ гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке.

Нить (канат, цепь, ремень, трос). Связь, осуществленная в виде гибкой нерастяжимой нити (рис. 1.2.), не дает телу М удалиться от точки подвеса нити по направлению АМ. Поэтому реакция $\bar{T}$ натянутой нити направлена вдоль нее от тела к точке подвеса.

Неподвижный цилиндрический шарнир или подшипник (шарнирно-неподвижная опора). Цилиндрическим шарниром (рис. 1.3.) называется совокупность неподвижной обоймы (втулки) 1 и помещенного в нее валика (пальца) 2, жестко соединенного с телом 3. В точке С соприкосновения втулки с валиком возникает сила опорной реакции, направленная по нормали к идеально гладким поверхностям. Эта нормаль проходит через геометрический центр А валика. Так как положение точки С соприкосновения валика со втулкой заранее не известно, то невозможно сразу указать направление силы реакции $\bar{R}$, но можно утверждать, что линия

действия реакции $\bar{R}$ всегда пройдет через центр А шарнира. На расчетных схемах шарнирно-неподвижная опора условно изображается так, как показано на рис. 1.4. Неизвестную по модулю и направлению реакцию $\bar{R}_A$ при решении задач представляют в виде двух ее взаимно-

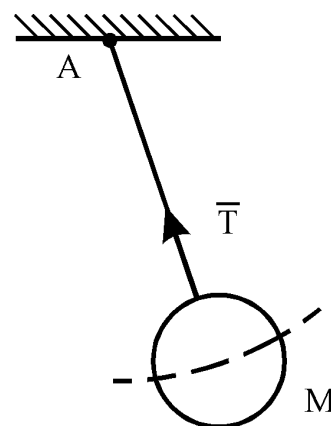


Рис. 1.2.

перпендикулярных составляющих $\bar{R}_{Ax}$ и $\bar{R}_{Ay}$. После определения их значений находят значение реакции $\bar{R}_A$ и ее направление:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}, \quad \cos \alpha = \frac{R_{Ax}}{R_A}.$$

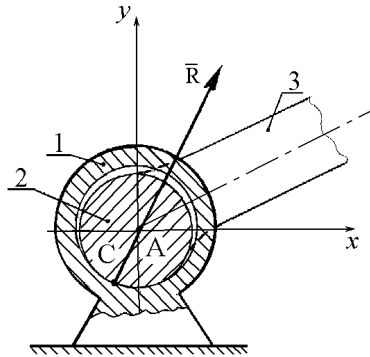


Рис. 1.3.

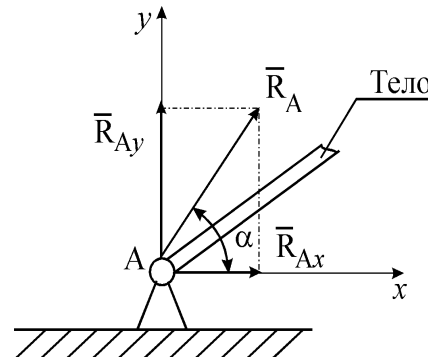


Рис. 1.4.

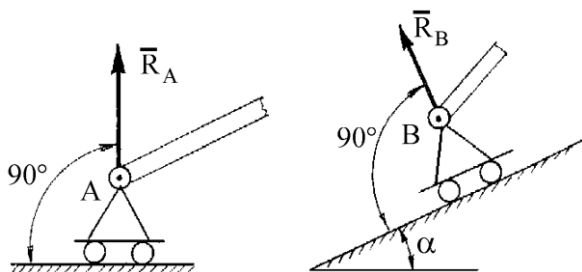


Рис. 1.5.

Тело 3, равновесие которого рассматривается, жестко связано с внутренней подвижной сферой 1. При условии, что сферические поверхности гладкие, реакция $\bar{R}_A$ направлена по нормали к этим поверхностям и проходит через центр A сферы. На расчетных схемах реакцию $\bar{R}_A$ представляют в виде трех ее взаимно-перпендикулярных составляющих $\bar{R}_{Ax}$, $\bar{R}_{Ay}$ и $\bar{R}_{Az}$, направленных вдоль координатных осей.

Подпятник (рис. 1.7.). Подпятник представляет собой соединение цилиндрического шарнира 2 и опорной плоскости 3, на которую опирается вал 1. Реакция подшипника, лежащая в плоскости перпендикулярной оси вала, представляется двумя ее взаимно-перпендикулярными составляющими $\bar{R}_{Ax}$ и $\bar{R}_{Ay}$, а реакция опорной плоскости – реакцией $\bar{R}_{Az}$, направленной по нормали к этой плоскости.

Невесомый стержень (рис. 1.8.). Реакция $\bar{S}$ прямолинейного невесомого (идеального) стержня направлена вдоль этого стержня. Если связью является криволинейный стержень, то реакция направлена вдоль прямой АВ, соединяющей концевые шарниры А и В.

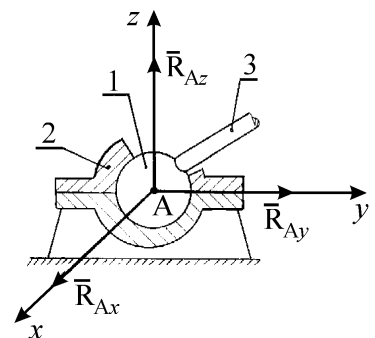


Рис. 1.6.

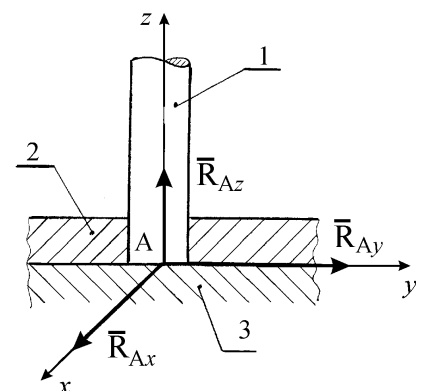


Рис. 1.7.

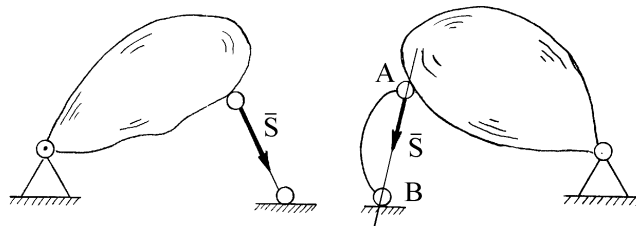


Рис. 1.8.

Жесткая заделка (неподвижное защемление) конца балки (рис. 1.9.). Такая связь не допускает не только линейных перемещений балки 1 вдоль координатных осей, но и вращения балки в плоскости xAy .

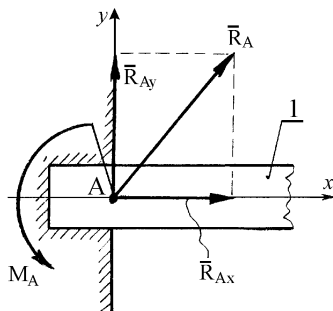


Рис. 1.9

Нахождение реакций жесткой заделки сводится к определению трех неизвестных величин: составляющих $\bar{R}_{Ax}$ и $\bar{R}_{Ay}$ реакции $\bar{R}_A$ и так называемого реактивного момента M_A , препятствующего вращению балки в плоскости xAy вокруг точки A.

Для того чтобы составить уравнения равновесия, надо уметь вычислять проекции сил на координатные оси и выполнять операции сложения и разложения сил.

Проекцией силы на ось называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Так, для сил, изображенных на рис. 1.10:

$$F_x = a_1 b_1 = F \cos \alpha; F_y = a_2 b_2 = F \cos (90^\circ - \alpha) = F \sin \alpha;$$

$$Q_x = c_1 d_1 = Q \cos \beta = Q \cos (180^\circ + \gamma) = -Q \cos \gamma;$$

$$Q_y = c_2 d_2 = Q \cos (90^\circ + \gamma) = -Q \sin \gamma.$$

Проекцией силы $\bar{F}$ на плоскость Oxy называется вектор $\bar{F}_{xy} = \overline{OB}_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\bar{F}$ на эту плоскость (рис. 1.11.).

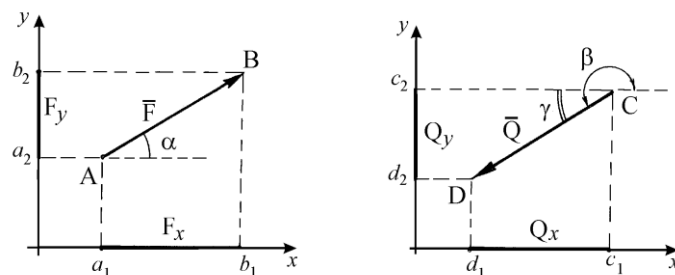


Рис. 1.10.

По модулю $F_{xy} = F \cos \theta$, где θ – угол между направлением силы $\vec{F}$ и ее проекцией $\vec{F}_{xy}$.

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось удобнее сначала найти ее проекцию на плоскость, в которой расположена эта ось, а затем полученный вектор спроецировать на данную ось. Например, в случае, изображенном на рис. 1.11, найдем:

$$F_x = OB_2 = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cdot \cos \varphi,$$

$$F_y = OB_3 = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \cdot \sin \varphi.$$

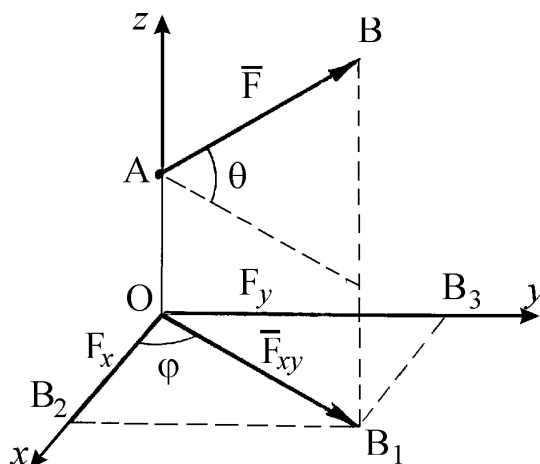


Рис. 1.11.

Геометрическое сложение сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ основывается на построении в масштабе векторного многоугольника, замыкающая сторона которого представляет эту сумму и называется главным вектором $\vec{R}$ (рис. 1.12.).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

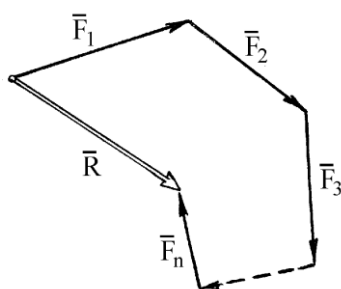


Рис. 1.12.

Аналитическое сложение сил основано на известной теореме векторной алгебры: проекция вектора суммы на ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_{kx},$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_{ky},$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum F_{kz}.$$

Модуль (численное значение) главного вектора

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Действие силы на твердое тело может вызвать вращательный эффект, который для плоской системы сил оценивается моментом силы относительно какой-либо точки О на плоскости (рис. 1.13):

$$m_O(\bar{F}_1) = F_1 \cdot h_1; \quad m_O(\bar{F}_2) = -F_2 \cdot h_2,$$

где h_1 и h_2 – плечи сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ относительно точки О.

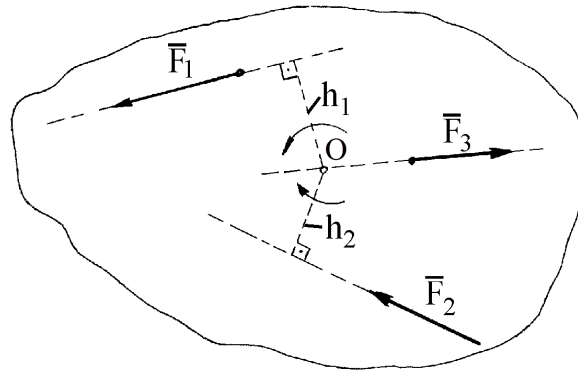


Рис. 1.13.

Плечом называется длина перпендикуляра, опущенного из точки О на линию действия соответствующей силы. Если данная сила стремится вращать тело вокруг точки О против хода часовой стрелки, то ее моменту относительно этой точки приписывают знак «+». Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку, так как при этом плечо равно нулю (например, $m_O(\bar{F}_3) = 0$).

Вычисление момента силы относительно какой-либо точки во многих случаях упрощается, если эту силу разложить на две взаимно-перпендикулярные составляющие и применить теорему Вариньона, согласно которой момент равнодействующей сходящихся сил относительно любого центра равен сумме моментов составляющих сил относительно того же центра. Например, для равнодействующей силы $\bar{F}$ и ее составляющих $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$ (рис. 1.14) имеем:

$$m_O(\bar{F}) = m_O(\bar{F}') + m_O(\bar{F}''),$$

$$\text{где } |\bar{F}'| = F' = F \cdot \cos \alpha, \quad |\bar{F}''| = F'' = F \cdot \sin \alpha.$$

Таким образом,

$$m_O(\bar{F}) = -F \cdot \cos \alpha \cdot (a + c) + (F \cdot \sin \alpha) \cdot b.$$

Вращательный эффект вызывает также пара сил, под которой понимается совокупность двух сил, равных по модулю, направленных в противоположные стороны и линии действия которых параллельны (рис. 1.15).

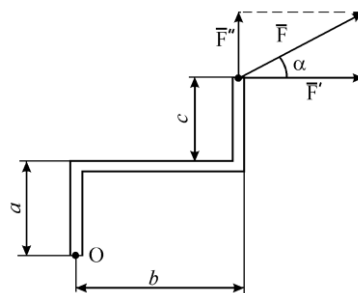


Рис. 1.14.

Пара сил, стремящаяся вращать тело против хода часовой стрелки, считается положительной, а по ходу часовой стрелки – отрицательной. Пара сил характеризуется ее моментом, который равен взятому со знаком «плюс» или «минус» произведению модуля одной из сил данной пары на плечо пары, т. е. на кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

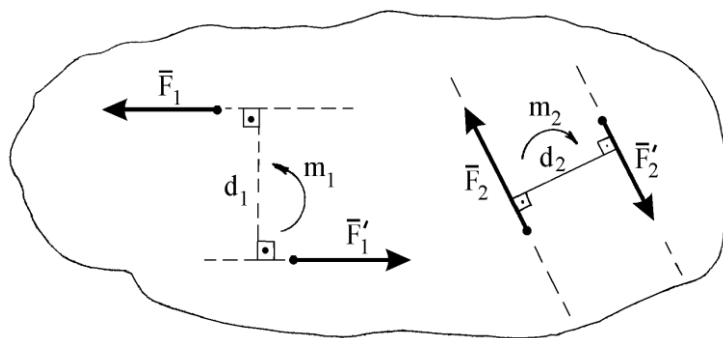


Рис. 1.15.

Обозначив момент пары буквой m , а плечо пары буквой d , будем иметь (рис. 1.15):

$$m_1 = F_1 \cdot d_1; \quad m_2 = -F_2 \cdot d_2.$$

Систему пар сил, расположенных в одной плоскости, можно заменить одной эквивалентной парой, момент которой M равен алгебраической сумме моментов пар:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum m_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

1.1. Произвольная плоская система сил

Под произвольной системой сил понимают совокупность сил, расположенных в одной плоскости, линии действия которых не пересекаются в одной точке. Произвольную плоскую систему сил можно значительно упростить, приведя силы к одному центру приведения O . В результате чего в этом центре будет приложена сила $\bar{R}$, называемая главным вектором, и к телу в целом будет приложена пара сил с моментом M_O , называемым главным моментом относительно этого центра.

Главный вектор $\bar{R}$ равен геометрической сумме сил, входящих в данную систему, а главный момент M_O – алгебраической сумме моментов сил относительно центра приведения, включая и алгебраическую сумму моментов пар сил:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k, \quad M_O = \sum m_O(\bar{F}_k).$$

Численное значение главного вектора определяется по его проекциям на координатные оси:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

где $R_x = \sum F_{kx}$ и $R_y = \sum F_{ky}$.

Направление главного вектора находят по косинусам направляющих углов:

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{R_y}{R},$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$ – орты осей Ox и Oy .

Условиями равновесия тела под действием произвольной плоской системы сил являются равенство нулю главного вектора и главного момента относительно любого центра O :

$$\bar{R} = 0 \text{ и } M_O = 0.$$

Эти условия выполняются, если

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения (1) называются основными уравнениями равновесия. Существуют еще две формы уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum F_{kx} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В системе уравнений (2) ось x не должна быть перпендикулярной к прямой, проходящей через центры A и B , а центры A , B и C в системе (3) не должны лежать на одной прямой.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется связью, наложенной на твердое тело?
2. Что называется силой реакции связи?
3. Перечислите основные виды связей и укажите их реакции.
4. Сформулируйте принцип освобождаемости от связей.
5. Что называется равнодействующей системы сил?
6. Как сложить силы:

- а) геометрически,
 б) аналитически?
7. Как разложить силу по двум заданным направлениям?
 8. Что называется моментом силы относительно центра на плоскости?
 9. Чему равен момент пары сил?
 10. Чему равен главный вектор и главный момент произвольной плоской системы сил?
 11. Сформулируйте три формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

Задание 1. Равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. 1.16–1.25, табл. 1.1.), закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке С к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $P = 25 \text{ кН}$. На раму действуют пара сил с моментом $M = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в табл. 1.1 (например, в условии № 2 на раму действует сила $\vec{F}_2$ под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила $\vec{F}_3$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке E, и т. д.).

Определить реакции связей в точках А, В, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0,5 \text{ м}$.

При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\vec{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_o(\vec{F}) = m_o(\vec{F}') + m_o(\vec{F}'')$.

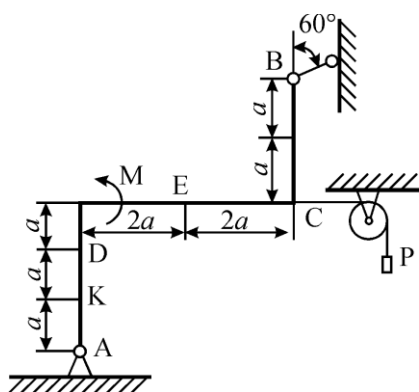


Рис. 1.16

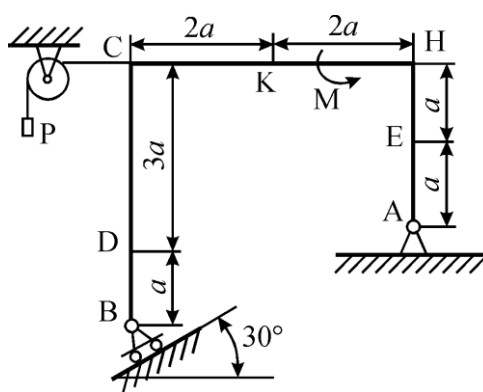


Рис. 1.17.

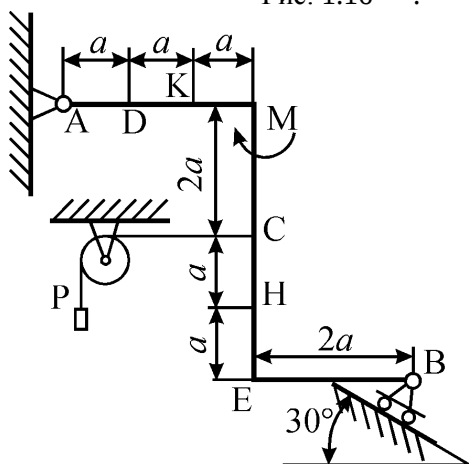


Рис. 1.18.

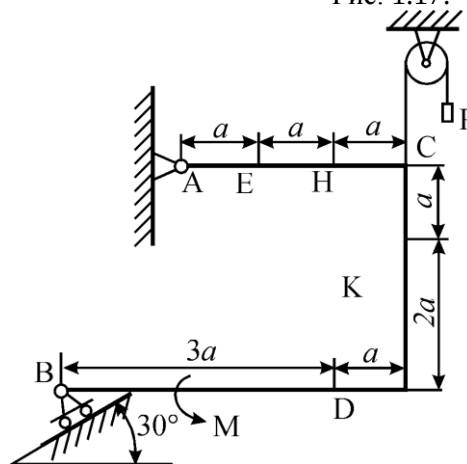


Рис. 1.19.

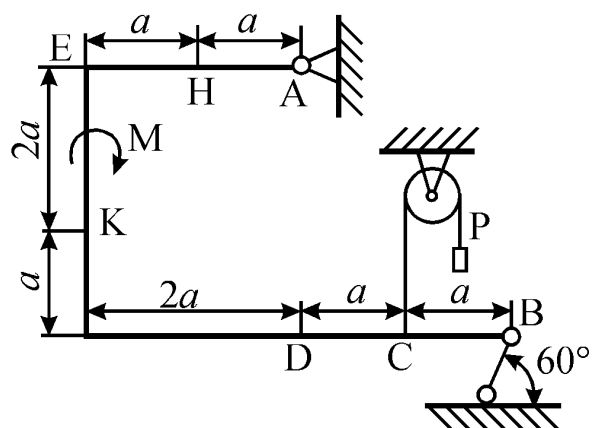
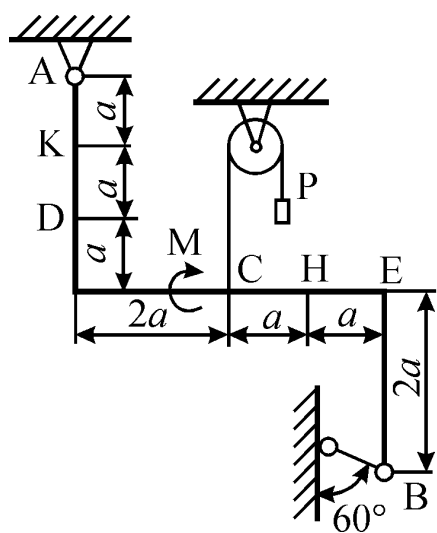
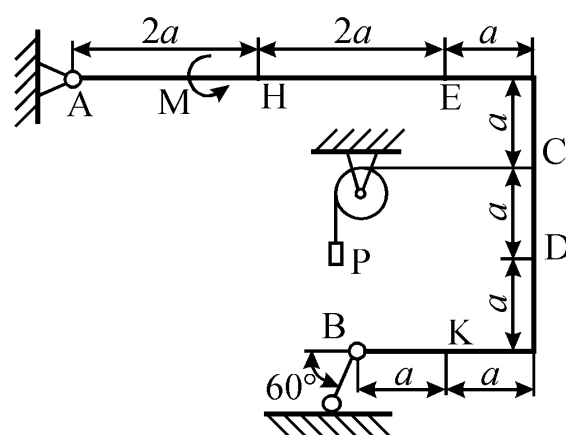
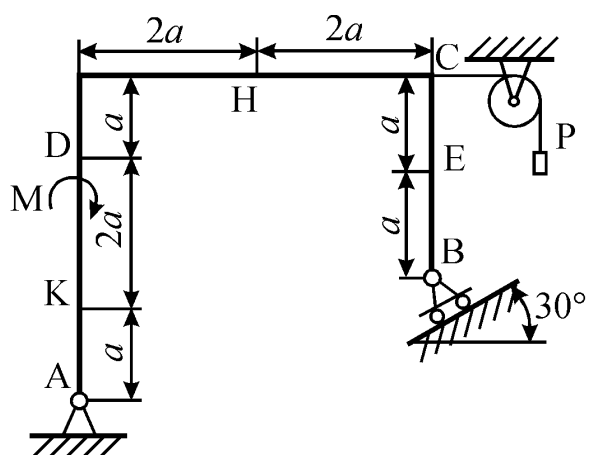
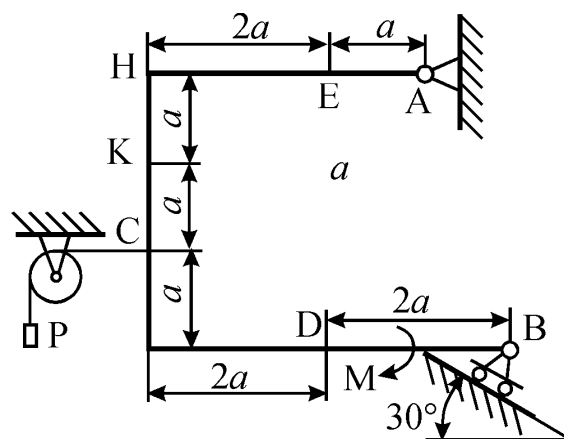
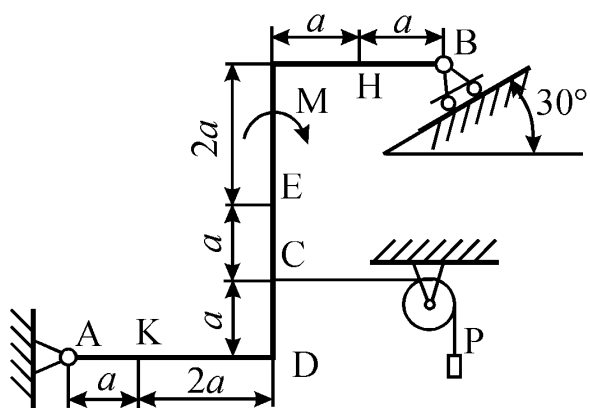
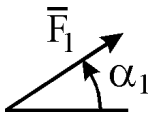
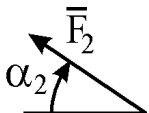
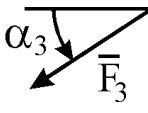
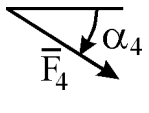


Таблица 1.1.

Номер условия	Силы							
								
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$	
	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град
1	Н	30	–	–	–	–	К	60
2	–	–	Д	15	Е	60	–	–
3	К	75	–	–	–	–	Е	30
4	–	–	К	60	Н	30	–	–
5	Д	30	–	–	–	–	Е	60
6	–	–	Н	30	–	–	Д	75
7	Е	30	–	–	К	15	–	–
8	–	–	Д	60	–	–	Н	15
9	Н	60	–	–	Д	30	–	–
10	–	–	Е	75	К	30	–	–

Пример выполнения задания. Жесткая рама ADCB (рис. 1.26.) имеет в точке А неподвижную шарнирную опору, а в точке В – подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: $F = 25 \text{ кН}$, $\alpha = 60^\circ$, $P = 18 \text{ кН}$, $\gamma = 75^\circ$, $M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\beta = 30^\circ$, $a = 0,5 \text{ м}$. Определить: реакции в точках А и В, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси xu и изобразим действующие на раму силы: силу $\vec{F}$, пару сил с моментом M , натяжение троса $\vec{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$, $\vec{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры А изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

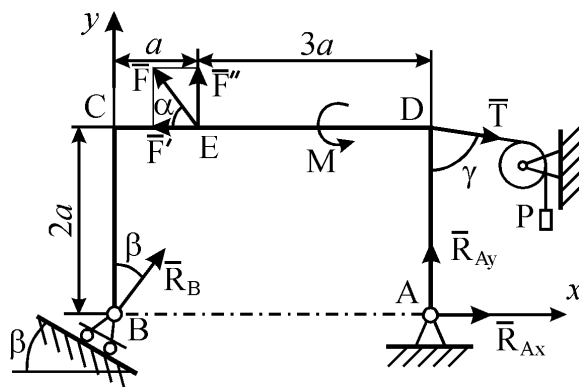


Рис. 1.26.

Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\vec{F}$ относительно точки А воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}'$, $\vec{F}''$ ($F' = F \cdot \cos \alpha$, $F'' = F \cdot \sin \alpha$), и учтем, что $m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F}') + m_A(\vec{F}'')$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad R_{Ax} + R_B \cdot \sin \beta - F \cdot \cos \alpha + T \cdot \sin \gamma = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad R_{Ay} + R_B \cdot \cos \beta + F \cdot \sin \alpha - T \cdot \cos \gamma = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad M - R_B \cdot \cos \beta \cdot 4a + F \cdot \cos \alpha \cdot 2a - F \cdot \sin \alpha \cdot 3a - T \cdot \sin \gamma \cdot 2a = 0; \quad (3)$$

Из уравнения (3) находим:

$$R_B = \frac{M + F \cdot \cos \alpha \cdot 2a - F \cdot \sin \alpha \cdot 3a - T \cdot \sin \gamma \cdot 2a}{4a \cdot \cos \beta},$$

$$R_B = \frac{50 + 25 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 \cdot 0,5 - 25 \cdot \sin 60^\circ \cdot 3 \cdot 0,5 - 18 \cdot \sin 75^\circ \cdot 2 \cdot 0,5}{4 \cdot 0,5 \cdot \cos 30^\circ} = 7,296 \text{ кН.}$$

Из уравнения (1):

$$R_{Ax} = F \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \gamma - R_B \cdot \sin \beta,$$

$$R_{Ax} = 25 \cdot \cos 60^\circ - 18 \cdot \sin 75^\circ - 7,296 \cdot \sin 30^\circ = -8,534 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2):

$$R_{Ay} = T \cdot \cos \gamma - R_B \cdot \cos \beta - F \cdot \sin \alpha,$$

$$R_{Ay} = 18 \cdot \cos 75^\circ - 7,296 \cdot \cos 30^\circ - 25 \cdot \sin 60^\circ = -23,31 \text{ кН.}$$

Ответ: $R_{Ax} = -8,534 \text{ кН}$, $R_{Ay} = -23,31 \text{ кН}$, $R_B = 7,296 \text{ кН}$.

Знаки указывают, что реакции $\bar{R}_{Ax}$ и $\bar{R}_{Ay}$ направлены противоположно показанным на рисунке.

Для проверки правильности полученных результатов составим и решим проверочное уравнение равновесия в форме моментов всех сил относительно точки С.

$$\begin{aligned} \sum m_C(\bar{F}_k) &= R_B \cdot \sin \beta \cdot 2a + F \cdot \sin \alpha \cdot a + M - T \cdot \cos \gamma \cdot 4a + R_{Ax} \cdot 2a + \\ &+ R_{Ay} \cdot 4a = 7,296 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 \cdot 0,5 + 25 \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,5 + 50 - \\ &- 18 \cdot \cos 75^\circ \cdot 4 \cdot 0,5 + (-23,31) \cdot 4 \cdot 0,5 + (-8,534) \cdot 2 \cdot 0,5 = 0,001 \approx 0. \end{aligned}$$

Задание 2. Равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке С или соединены друг с другом шарнирно (рис. 1.27–1.32), или свободно опираются друг о друга (рис. 1.33–1.36). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке А или шарнир, или жесткая заделка; в точке В или гладкая плоскость (рис. 1.27 и 1.28), или невесомый стержень ВВ' (рис. 1.29 и 1.30), или шарнир (рис. 1.31 – 1.36); в точке D или невесомый стержень DD' (рис. С2.0, С2.3, С2.8), или шарнирная опора на катках (рис. 1.34).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом $M = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 20 \text{ кН/м}$ и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. 6; там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условии № 1 на конструкцию действуют

сила $\vec{F}_2$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке L, сила $\vec{F}_4$ под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке E, и нагрузка, распределенная на участке СК).

Определить реакции связей в точках A, B, C (для рис. 1.27, 1.30, 1.34, 1.35 еще и в точке D), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0,2$ м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. 3.

При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчлнить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

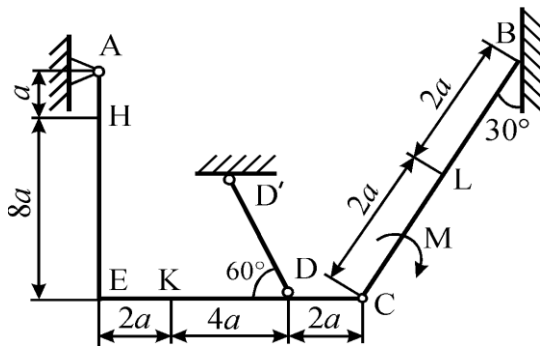


Рис. 1.27.

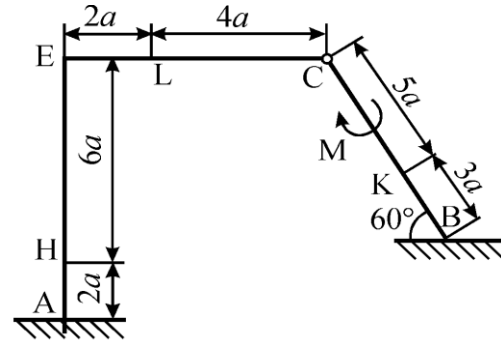


Рис. 1.28.

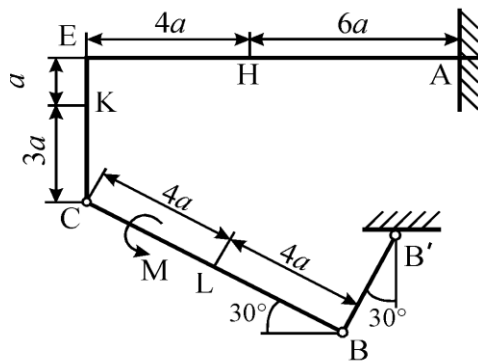


Рис. 1.29.

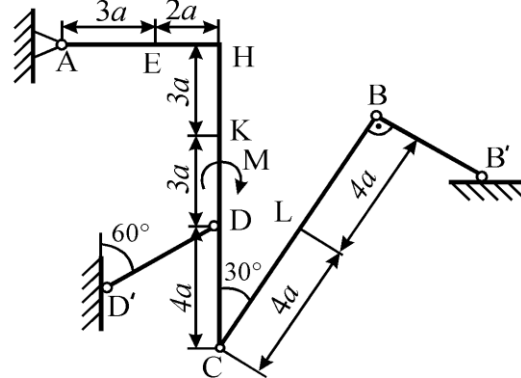


Рис. 1.30.

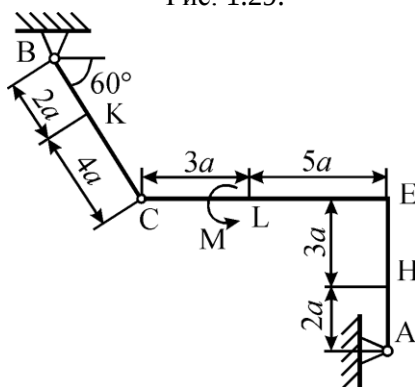


Рис. 1.31.

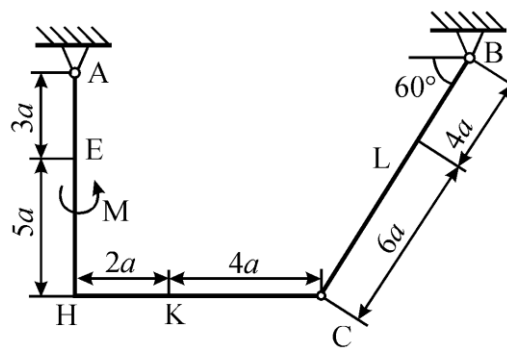


Рис. 1.32.

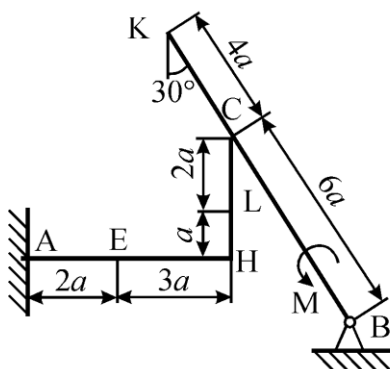


Рис. 1.33.

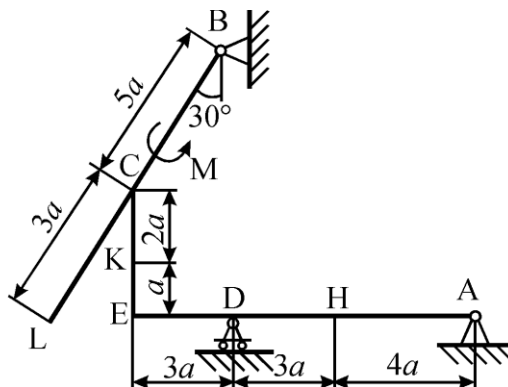


Рис. 1.34.

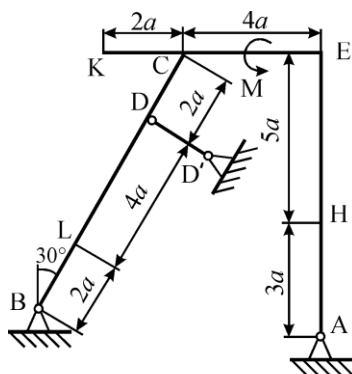


Рис. 1.35.

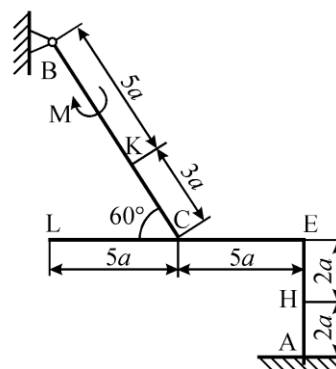


Рис. 1.36.

Пример выполнения задания. Конструкция состоит из жесткого угольника АЕС и стержня СК, которые в точке С (рис. 1.37) соединены друг с другом с помощью цилиндрического шарнира.

Внешними связями являются: в точке А – шарнирно-неподвижная опора, в точке В – невесомый стержень ВВ', в точке D – шарнирно-подвижная опора. К конструкции приложена сила $\vec{F}$, пара сил с моментом М и равномерно распределенная на участке КВ нагрузка интенсивности q.

Дано: $F = 10 \text{ кН}$, $\alpha = 60^\circ$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $M = 50 \text{ кН·м}$, $a = 0,5 \text{ м}$.

Определить реакции связей в точках А, В, С и D, вызванные заданными нагрузками.

Таблица 1.2.

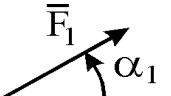
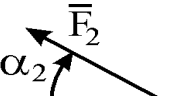
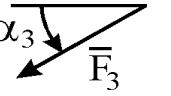
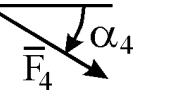
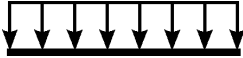
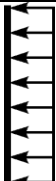
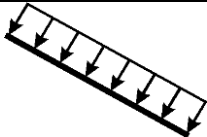
Номер условия	Сила								Нагруженный участок
									
	F ₁ = 10 кН		F ₂ = 20 кН		F ₃ = 30 кН		F ₄ = 40 кН		
	Точка приложения	α ₁ , град	Точка приложения	α ₂ , град	Точка приложения	α ₃ , град	Точка приложения	α ₄ , град	
1	К	60	–	–	Н	30	–	–	CL
2	–	–	L	60	–	–	Е	30	СК
3	L	15	–	–	К	60	–	–	АЕ
4	–	–	К	30	–	–	Н	60	CL
5	L	30	–	–	Е	60	–	–	СК
6	–	–	L	75	–	–	К	30	АЕ
7	Е	60	–	–	К	75	–	–	CL
8	–	–	Н	60	L	30	–	–	СК
9	–	–	К	30	–	–	Е	15	CL
10	Н	30	–	–	–	–	L	60	СК

Таблица 1.3.

Участок на угольник		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. 27, 30, 32, 34, 35	рис. 28, 29, 31, 33, 36
			

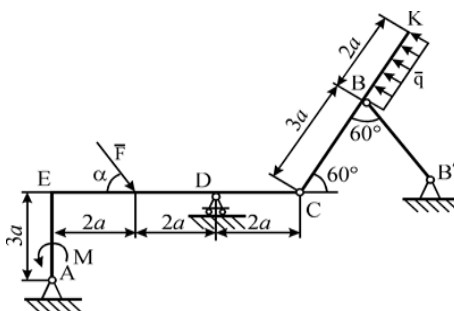


Рис. 1.37.

Решение. Для определения реакций расчленим систему по шарниру С и рассмотрим сначала равновесие стержня КС (рис. 1.38). Проведем координатные оси x и y и изобразим действующие на стержень силы: равномерно распределенную нагрузку заменим силой $\bar{Q}$, приложенной в середине участка ВК (численно $Q = q \cdot 2a = 20$ кН), реакцию $\bar{R}_B$ стержня ВВ' направим вдоль этого стержня, а действие отброшенного угольника АЕС представим составляющими $\bar{R}_{Cx}$ и $\bar{R}_{Cy}$ реакции шарнира С.

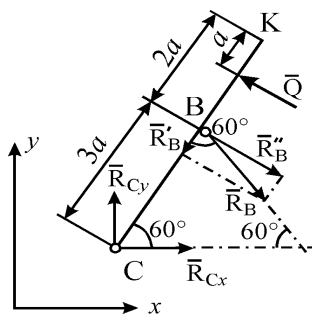


Рис. 1.38.

Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = R_{Cx} + R_B \cdot \cos 60^\circ - Q \cdot \sin 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Cy} - R_B \cdot \sin 60^\circ + Q \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_C(\bar{F}_k) = -R_B \cdot \sin 60^\circ \cdot 3a + Q \cdot 4a = 0. \quad (3)$$

При вычислении момента силы $\bar{R}_B$ разлагаем ее на составляющие $\bar{R}'_B$ и $\bar{R}''_B$ и применяем теорему Вариньона ($R'_B = R_B \cdot \cos 60^\circ$, $R''_B = R_B \cdot \sin 60^\circ$).

Из уравнения (3) находим:

$$R_B = \frac{4 \cdot Q}{3 \cdot \sin 60^\circ}.$$

$$R_B = \frac{4 \cdot 20}{3 \cdot \sin 60^\circ} = 30,8 \text{ кН}.$$

Из уравнения (1):

$$R_{Cx} = Q \cdot \sin 60^\circ - R_B \cdot \cos 60^\circ.$$

$$R_{Cx} = 20 \cdot \sin 60^\circ - 30,8 \cdot \cos 60^\circ = 1,92 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2):

$$R_{Cy} = R_B \cdot \sin 60^\circ - Q \cdot \cos 60^\circ.$$

$$R_{Cy} = 30,8 \cdot \sin 60^\circ - 20 \cdot \cos 60^\circ = 16,67 \text{ кН}.$$

Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. 39).

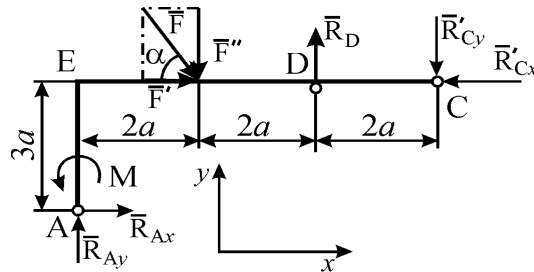


Рис. 1.39.

На него действуют: сила $\bar{F}$, пара сил с моментом M , реакция $\bar{R}_D$ шарнирно-подвижной опоры D, составляющие $\bar{R}_{Ax}$ и $\bar{R}_{Ay}$ реакции шарнирно неподвижной опоры A и составляющие $\bar{R}'_{Cx}$ и $\bar{R}'_{Cy}$ реакции $\bar{R}_C$, направленные противоположно соответствующим реакциям $\bar{R}_{Cx}$ и $\bar{R}_{Cy}$, которые были приложены к стержню KC. При решении учитываем, что численно $R'_{Cx} = R_{Cx}$ и $R'_{Cy} = R_{Cy}$, в силу равенства действия и противодействия. Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + F \cdot \cos \alpha - R'_{Cx} = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - F \cdot \sin \alpha + R_D - R'_{Cy} = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = M - F \cdot \cos \alpha \cdot 3a - F \cdot \sin \alpha \cdot 2a + R_D \cdot 4a + R'_{Cx} \cdot 3a - R'_{Cy} \cdot 6a = 0. \quad (6)$$

В уравнении (6) при вычислении момента силы $\bar{F}$, последняя разложена на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$ ($F' = F \cdot \cos \alpha$, и $F'' = F \cdot \sin \alpha$) и применена теорема Вариньона.

Из уравнения (6) находим:

$$R_D = \frac{-M + F \cdot \cos \alpha \cdot 3a + F \cdot \sin \alpha \cdot 2a - R'_{Cx} \cdot 3a + R'_{Cy} \cdot 6a}{4a}.$$

$$R_D = \frac{-50/0,5 + 10 \cdot \cos 60^\circ \cdot 3 + 10 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 - 1,92 \cdot 3 + 16,67 \cdot 6}{4} = 6,645 \text{ кН.}$$

Из уравнения (4):

$$R_{Ax} = R'_{Cx} - F \cdot \cos \alpha.$$

$$R_{Ax} = 1,92 - 10 \cdot \cos 60^\circ = -3,08 \text{ кН.}$$

Из уравнения (5):

$$R_{Ay} = F \cdot \sin \alpha - R_D + R'_{Cy}.$$

$$R_{Ay} = 10 \cdot \sin 60^\circ - 6,645 + 16,67 = 18,685 \text{ кН.}$$

Ответ: $R_{Ax} = -3,08 \text{ кН}$, $R_{Ay} = 18,685 \text{ кН}$, $R_D = 6,645 \text{ кН}$, $R_B = 30,8 \text{ кН}$, $R_{Cx} = 1,92 \text{ кН}$, $R_{Cy} = 16,67 \text{ кН}$.

Знаки указывают, что сила реакции $\overline{R}_{Ax}$ направлена противоположно показанной на рис. 1.39.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется связью, наложенной на твердое тело?
2. Что называется силой реакции связи?
3. Перечислите основные виды связей и укажите их реакции.
4. Сформулируйте принцип освобождения от связей.
5. Что называется равнодействующей системы сил?
6. Как сложить силы:
 - а) геометрически,
 - б) аналитически?
7. Как разложить силу по двум заданным направлениям?
8. Что называется моментом силы относительно центра на плоскости?
9. Чему равен момент пары сил?
10. Чему равен главный вектор и главный момент произвольной плоской системы сил?
11. Сформулируйте три формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.
12. Какие задачи статики называют статически определимыми и какие статически неопределимыми?
13. В чем сущность решения задач на равновесие сочлененной системы тел?

1.2. Система сходящихся сил

Задание 3. Равновесие пространственной системы сходящихся сил

Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в двух узлах и прикреплены другими концами (тоже шарнирно) к неподвижным опорам А, В, С, D (рис. 1.40-1.49, табл.1.4). Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах Н, К, L или М прямоугольного параллелепипеда) на рисунках не показаны и должны быть изображены по данным таблицы. В узле, который в каждом столбце таблицы указан первым, приложена сила $P = 200 \text{ Н}$; во втором узле приложена сила $Q = 100 \text{ Н}$. Сила $\overline{P}$ образует с положительными направлениями координатных осей x, y, z углы, равные соответственно $\alpha_1 = 45^\circ$, $\beta_1 = 60^\circ$, $\gamma_1 = 60^\circ$, а сила $\overline{Q}$ – углы $\alpha_2 = 60^\circ$, $\beta_2 = 45^\circ$, $\gamma_2 = 60^\circ$; направления осей x, y, z для всех рисунков показаны на рис. 1.60.

Грани параллелепипеда, параллельные плоскости xy , – квадраты. Диагонали других боковых граней образуют с плоскостью xy угол $\varphi = 60^\circ$, а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол $\theta = 51^\circ$. Определить усилия в стержнях.

На рис. 1.50. в качестве примера показано, как должен выглядеть чертеж 1.51, если по условиям задачи узлы находятся в точках L и M, а стержнями являются LM, LA, LB; MA, MC, MD. Там же показаны углы φ и θ .

При решении данной задачи следует рассмотреть отдельно равновесие каждого из двух узлов, где сходятся стержни и приложены заданные силы, и учесть закон о равенстве действия и противодействия; начинать с узла, где сходятся три стержня.

Изображать чертеж можно без соблюдения масштаба так, чтобы лучше были видны все шесть стержней. Стержни следует пронумеровать в том порядке, в каком они указаны в таблице; реакции стержней обозначать буквой с индексом, соответствующим номеру стержня (например, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ и т. д.).

Таблица 1.4.

Номер условия	1	2	3	4	5
Узлы	Н, М	Л, М	К, М	Л, Н	К, Н
Стержни	НМ, НА, НВ, МА, МС, МД	ЛМ, ЛА, ЛД, МА, МВ, МС	КМ, КА, КВ, МА, МС, МД	ЛН, ЛС, ЛД, МА, НВ, НС	КН, КВ, КС, НА, НС, НД
Номер условия	6	7	8	9	10
Узлы	М, Н	Л, Н	К, Н	Л, М	К, М
Стержни	МН, МВ, МС, НА, НС, НД	ЛН, ЛВ, ЛД, НА, НВ, НС	КН, КС, КД, НА, НВ, НС	ЛМ, ЛВ, ЛД, МА, МВ, НС	КМ, КА, КД, МА, МВ, МС

Пример выполнения задания. Конструкция состоит из невесомых стержней 1, 2, ..., 6, соединенных друг с другом (в узлах К и М) и с неподвижными опорами А, В, С, D шарнирами (рис. 1.51). В узлах К и М приложены силы $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, образующие с координатными осями углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ соответственно (на рисунке показаны только углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$).

Дано: $P = 100 \text{ Н}$, $\alpha_1 = 60^\circ$, $\beta_1 = 60^\circ$, $\gamma_1 = 45^\circ$; $Q = 50 \text{ Н}$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\beta_2 = 60^\circ$, $\gamma_2 = 60^\circ$, $\psi = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\delta = 74^\circ$. Определить усилия в стержнях 1–6.

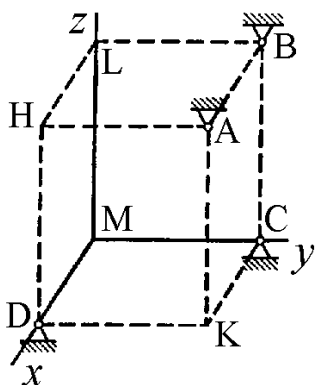


Рис. 1.40.

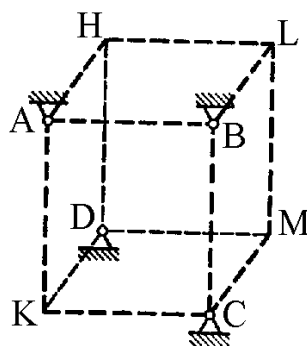


Рис. 1.41.

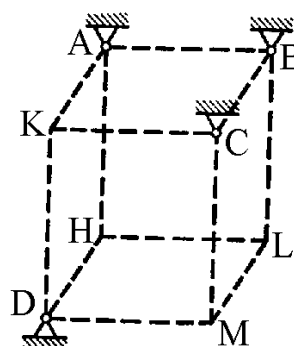


Рис. 1.42.

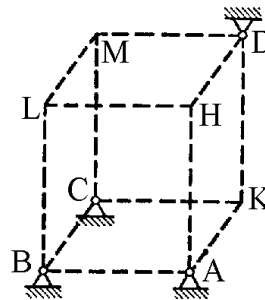
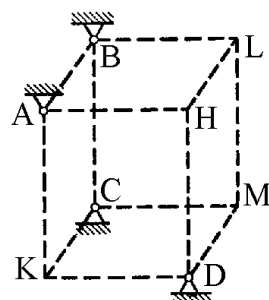
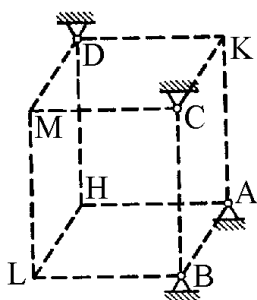


Рис. 1.43.

Рис. 1.44.

Рис. 1.45.

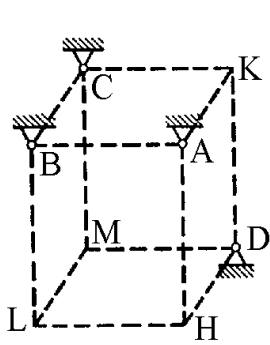


Рис. 1.46.

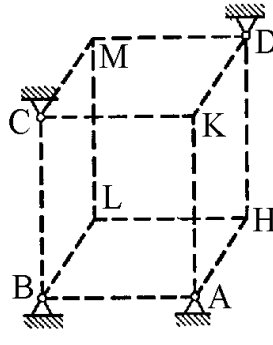


Рис. 1.47.

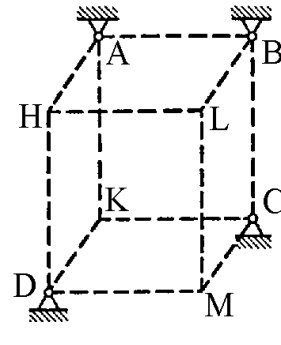


Рис. 1.48.

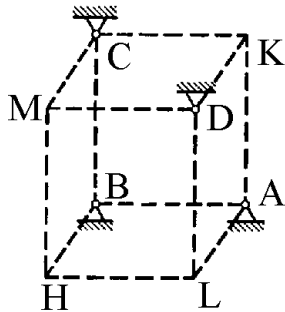


Рис. 1.49.

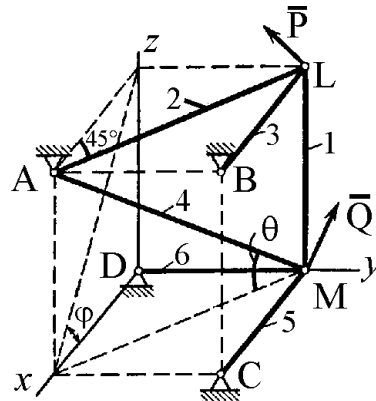


Рис. 1.50.

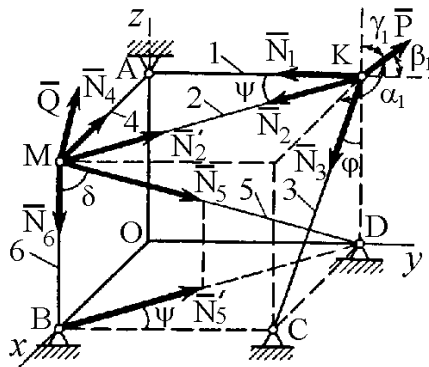


Рис. 1.51.

Решение. Рассмотрим равновесие узла К, в котором сходятся стержни 1, 2, 3. На узел действуют сила $\bar{P}$ и реакции $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$ стержней, которые направим по стержням от узла, считая стержни растянутыми. Составим уравнения равновесия этой пространственной системы сходящихся сил:

$$\sum F_{kx} = 0; P \cdot \cos \alpha_1 + N_2 \cdot \sin \psi + N_3 \cdot \sin \varphi = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; P \cdot \cos \beta_1 - N_1 - N_2 \cdot \cos \psi = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0; P \cdot \cos \gamma_1 - N_3 \cdot \cos \varphi = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) находим:

$$N_3 = \frac{P \cdot \cos \gamma_1}{\cos \varphi} \cdot N_3 = \frac{100 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 60^\circ} = 141 \text{ Н.}$$

Из уравнения (1):

$$N_2 = -\frac{P \cdot \cos \alpha_1 + N_3 \cdot \sin \varphi}{\sin \psi}.$$

$$N_2 = -\frac{100 \cdot \cos 60^\circ + 141 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = -345 \text{ Н.}$$

Из уравнения (2):

$$N_1 = P \cdot \cos \beta_1 - N_2 \cdot \cos \psi.$$

$$N_1 = 100 \cdot \cos 60^\circ - (-345) \cdot \cos 30^\circ = 348,78 \text{ Н.}$$

Рассмотрим равновесие узла М. На узел действуют сила $\bar{Q}$ и реакции $\bar{N}'_2, \bar{N}_4, \bar{N}_5, \bar{N}_6$ стержней. При этом по закону о равенстве действия и противодействия реакция $\bar{N}'_2$ направлена противоположно $\bar{N}_2$, численно же $N'_2 = N_2$. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad Q \cdot \cos \alpha_2 - N'_2 \cdot \sin \psi - N_4 - N_5 \cdot \sin \delta \cdot \sin \psi = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Q \cdot \cos \beta_2 + N'_2 \cdot \cos \psi + N_5 \cdot \sin \delta \cdot \cos \psi = 0; \quad (5)$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad Q \cdot \cos \gamma_2 - N_5 \cdot \cos \delta - N_6 = 0. \quad (6)$$

При определении проекций силы $\bar{N}_5$ на оси x и y в уравнениях (4) и (5) удобнее сначала найти проекцию $\bar{N}'_5$ этой силы на плоскость xOy (по числовой величине $N'_5 = N_5 \cdot \sin \delta$), а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на оси x, y .

Решая уравнение (5), находим:

$$N_5 = -\frac{Q \cdot \cos \beta_2 + N_2 \cdot \cos \psi}{\sin \delta \cdot \cos \psi}.$$

$$N_5 = -\frac{50 \cdot \cos 60^\circ + (-345) \cdot \cos 30^\circ}{\sin 74^\circ \cdot \cos 30^\circ} = 328,86 \text{ Н.}$$

Из уравнения (4):

$$N_4 = Q \cdot \cos \alpha_2 - N'_2 \cdot \sin \psi - N_5 \cdot \sin \delta \cdot \sin \psi.$$

$$N_4 = 50 \cdot \cos 45^\circ - (-345) \cdot \sin 30^\circ - 328,86 \cdot \sin 74^\circ \cdot \sin 30^\circ = 49,79 \text{ Н.}$$

Из уравнения (6):

$$N_6 = N_5 \cdot \cos \delta - Q \cdot \cos \gamma_2.$$

$$N_6 = 328,26 \cdot \cos 74^\circ - 50 \cdot \cos 60^\circ = 65,48 \text{ Н.}$$

Ответ: $N_1 = 348,78 \text{ Н}$, $N_2 = -345 \text{ Н}$, $N_3 = 141 \text{ Н}$, $N_4 = 49,79 \text{ Н}$, $N_5 = 328,86 \text{ Н}$, $N_6 = 65,48 \text{ Н}$.
Знаки показывают, что стержень 2 сжат, остальные растянуты.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определить проекцию силы на ось?
2. Как определить равнодействующую системы сходящихся сил:
 - а) геометрическим способом,
 - б) аналитическим способом?
3. Сформулируйте условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости и в пространстве.
4. Если связью является невесомый стержень, то как направлена сила его реакции в случае, когда он:
 - а) прямолинейный,
 - б) криволинейный?

1.3. Произвольная пространственная система сил

Моментом силы $\vec{F}$ относительно центра O называется приложенный в этом центре вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$, модуль которого равен произведению модуля силы $\vec{F}$ на ее плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и линию действия силы в ту сторону, откуда «вращение», совершаемое силой вокруг точки O , представляется происходящим против хода часовой стрелки (рис. 1.52):

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = F \cdot h.$$

Момент силы $\vec{F}$ относительно центра O может быть представлен в виде векторного произведения:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы.

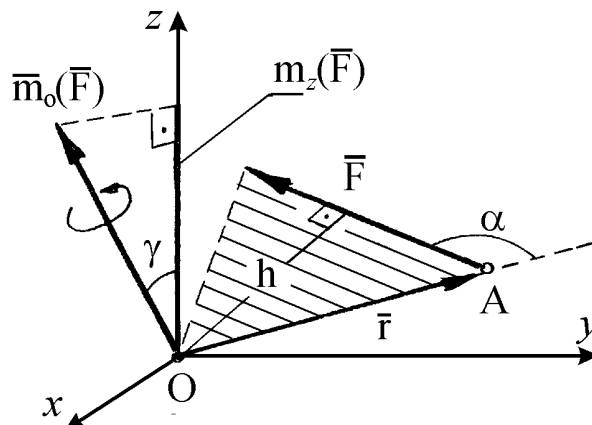


Рис. 1.52.

В самом деле, модуль векторного произведения равен

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot h.$$

Заметим также, что вектор $\bar{m}_O(\bar{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{r}$ и $\bar{F}$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот вектора $\bar{r}$ к направлению вектора $\bar{F}$ представляется происходящим против хода часовой стрелки.

Моментом силы $\bar{F}$ относительно какой-либо оси z , проходящей через центр O (рис. 1.52), называется скалярная величина, равная проекции вектора $\bar{m}_O(\bar{F})$ на эту ось:

$$m_z(\bar{F}) = |\bar{m}_O(\bar{F})| \cdot \cos \gamma.$$

Механический смысл величины $m_z(\bar{F})$ состоит в том, что она характеризует вращательный эффект силы, когда эта сила стремится повернуть тело вокруг оси z . В самом деле, если разложить силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}_{xy}$ и $\bar{F}_z$, где $\bar{F}_z \parallel Oz$ (рис. 1.53), то поворот вокруг оси z будет совершать только составляющая $\bar{F}_{xy}$ и вращательный эффект всей силы $\bar{F}$ будет определяться величиной $m_z(\bar{F}) = \pm F_{xy} \cdot h$. Составляющая же $\bar{F}_z$ повернуть тело вокруг оси z не может (она лишь может сдвинуть тело вдоль оси z).

Момент силы относительно оси z будет иметь знак «плюс», когда с положительного конца этой оси поворот, который стремится совершить сила $\bar{F}_{xy}$ вокруг этой оси, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак «минус» – когда по ходу часовой стрелки.

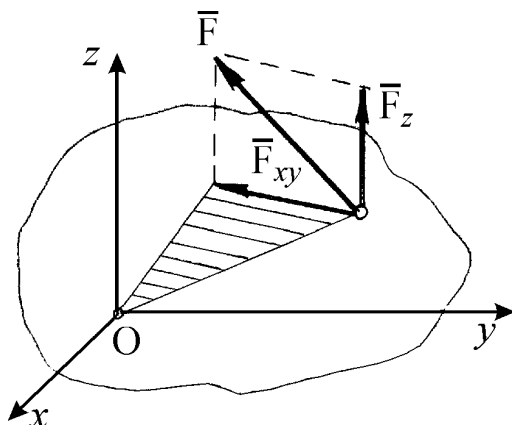


Рис. 1.53.

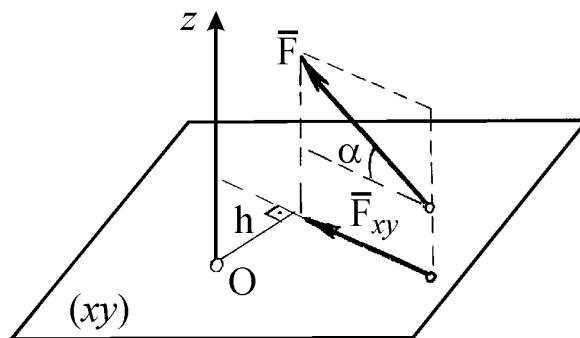


Рис. 1.54.

Для того чтобы определить момент какой-либо силы $\bar{F}$ относительно какой-либо оси z (рис. 1.54), нужно провести любую плоскость (xy) , перпендикулярную к данной оси и, спроектировав силу на эту плоскость, найти алгебраическую величину момента полученной проекции $\bar{F}_{xy}$ относительно точки O пересечения оси z с плоскостью xy .

$$m_z(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{xy}) = F \cdot \cos \alpha \cdot h.$$

Момент силы относительно оси равен нулю, когда сила параллельна оси либо когда линия действия силы пересекает ось.

При рассмотрении равновесия произвольной пространственной системы сил приходится определять моменты пар сил относительно осей, для чего момент пары сил представляют в виде вектора.

Момент пары, как вектор, направлен по перпендикуляру к плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение тела парой сил представляется происходящим против направления вращения часовой стрелки.

Изображенные на рис. 1.55, а и 1.55, б векторы $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ представляют собой соответственно моменты пар $(\overline{F}_1, \overline{F}'_1)$ и $(\overline{F}_2, \overline{F}'_2)$.

Так как пару сил можно переносить в ее плоскости действия и в любую другую плоскость, ей параллельную, то ее момент $\overline{M}$ не имеет определенной точки приложения и является *свободным вектором*. Такие векторы можно переносить параллельно самим себе в любую точку тела.

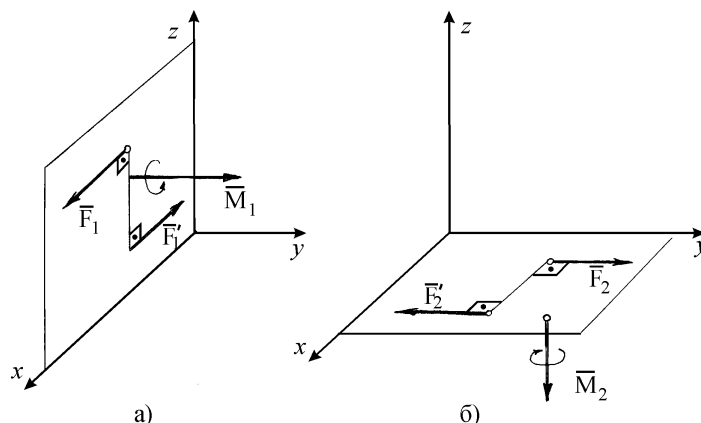


Рис. 1.55.

При определении момента пары сил относительно какой-либо оси достаточно найти проекцию вектора-момента этой пары на данную ось. Так, на примере, изображенном на рис. 1.55 а и 1.55 б, будем иметь:

$$M_{1x} = 0; \quad M_{1y} = M_1; \quad M_{1z} = 0;$$

$$M_{2x} = 0; \quad M_{2y} = 0; \quad M_{2z} = -M_2.$$

Если требуется сложить пары сил, то достаточно сложить их векторы-моменты как свободные векторы, т. е. перенести эти векторы параллельно самим себе в общую точку и применить правило сложения векторов.

Так, на примере двух пар сил $(\overline{F}_1, \overline{F}'_1)$ и $(\overline{F}_2, \overline{F}'_2)$, расположенных в плоскостях xBy и xBz соответственно (рис. 1.56), будем иметь:

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2.$$

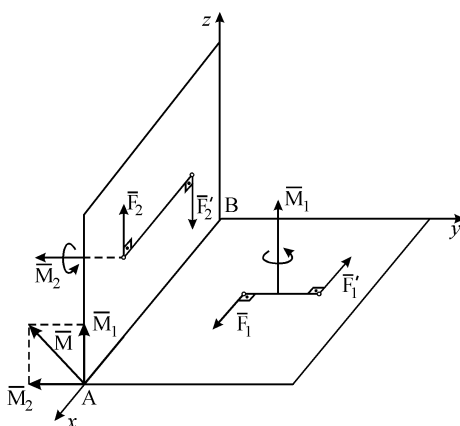


Рис. 1.56.

Модуль M результирующего вектора $\overline{M}$ находим как величину диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$:

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2},$$

или в проекциях на координатные оси:

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} = 0;$$

$$M_y = M_{1y} + M_{2y} = -M_2;$$

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} = M_1,$$

следовательно,

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-M_2)^2 + M_1^2}.$$

Любую пространственную систему сил можно привести к некоторому центру O , в результате чего будет получен главный вектор $\overline{R}$, приложенный в этом центре и главный момент $\overline{M}_O$ относительно этого центра O . Как известно, главный вектор равен геометрической сумме всех сил:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_n = \sum \overline{F}_k,$$

и не зависит от выбора центра приведения, а главный момент $\overline{M}_O$ равен геометрической сумме векторов-моментов всех сил относительно этого центра (включая и векторы-моменты всех пар сил) и зависит от выбора центра приведения:

$$\overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k).$$

Условиями равновесия произвольной пространственной системы сил являются равенство нулю главного вектора этой системы сил и главного момента относительно любого центра, что выражается шестью уравнениями равновесия в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$R_x = \sum F_{kx} = 0;$$

$$R_y = \sum F_{ky} = 0;$$

$$R_z = \sum F_{kz} = 0;$$

$$M_{Ox} = \sum m_x(\overline{F}_k) = 0;$$

$$M_{Oy} = \sum m_y(\overline{F}_k) = 0;$$

$$M_{Oz} = \sum m_z(\overline{F}_k) = 0.$$

Задача 4. Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке А, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке В и невесомым стержнем 1 (рис. 1.57 – 1.64) или же двумя подшипниками в точках А и В и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. 1.65, 1.66); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты $P_1 = 5$ кН, вес меньшей плиты $P_2 = 3$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xy – горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом $M = 4$ кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 1.5; при этом силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xy , сила $\bar{F}_2$ – в плоскости, параллельной xz , и сила $\bar{F}_3$ – в плоскости, параллельной yz . Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках А и В и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять $a = 0,6$ м.

При следующем решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить ее на две составляющие ($\bar{F}'$ и $\bar{F}''$), параллельные координатным осям (или на три); тогда по теореме Вариньона $m_x(\bar{F}) = m_x(\bar{F}') + m_x(\bar{F}'')$ и т. д.

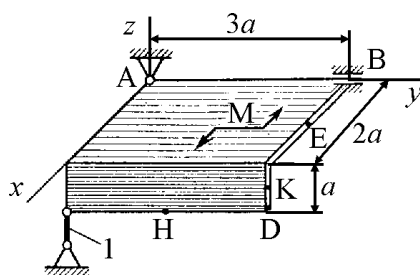


Рис. 1.57.

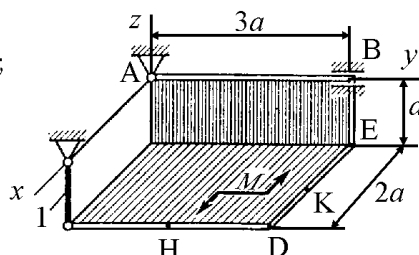


Рис. 1.58.

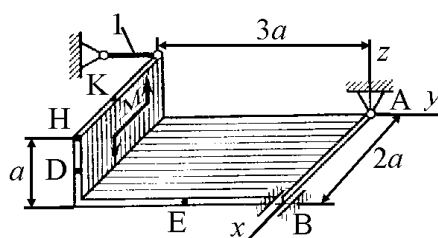


Рис. 1.59.

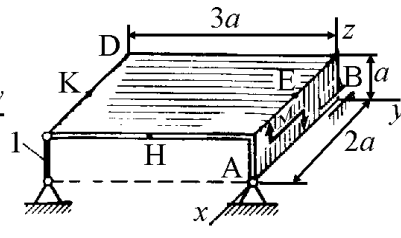


Рис. 1.60.

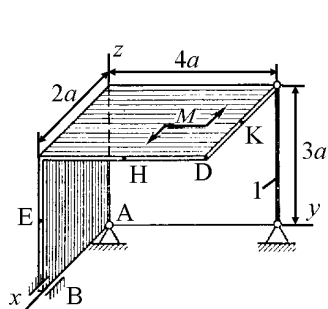


Рис. 1.61.

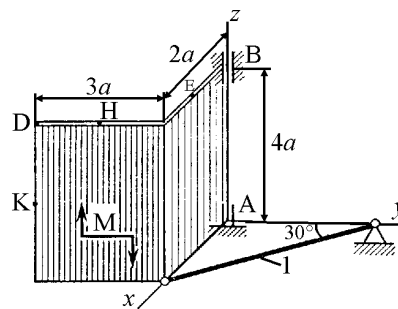


Рис. 1.62.

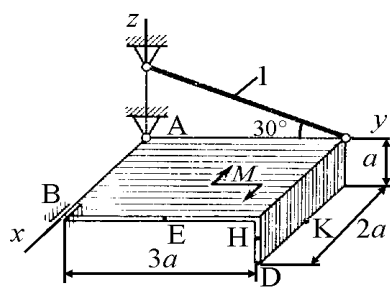


Рис. 1.63.

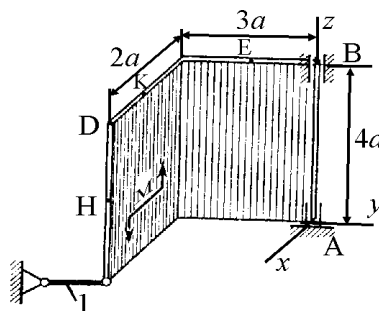


Рис. 1.64.

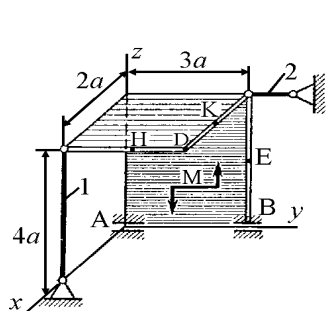


Рис. 1.65.

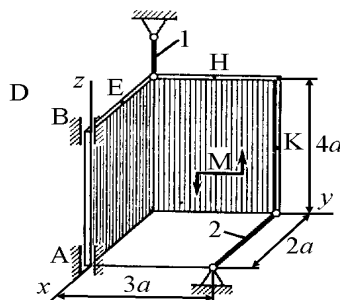


Рис. 1.66.

Пример выполнения задания. Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рис. 1.67) закреплена сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD' . На плиту в плоскости, параллельной xz , действует сила $\vec{F}$, а в плоскости, параллельной yz , – пара сил с моментом M .

Дано: $P = 3 \text{ кН}$, $F = 8 \text{ кН}$, $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\alpha = 60^\circ$, $AC = 0,8 \text{ м}$, $AB = 1,2 \text{ м}$, $BE = 0,4 \text{ м}$, $EH = 0,4 \text{ м}$. Определить реакции опор A , B и стержня DD' .

Решение. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\vec{P}$, $\vec{F}$ и пара с моментом $\vec{M}$, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие: $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$, $\vec{R}_{Az}$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие: $\vec{R}_{Bx}$, $\vec{R}_{Bz}$, (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\vec{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D' , предполагая, что он растянут.

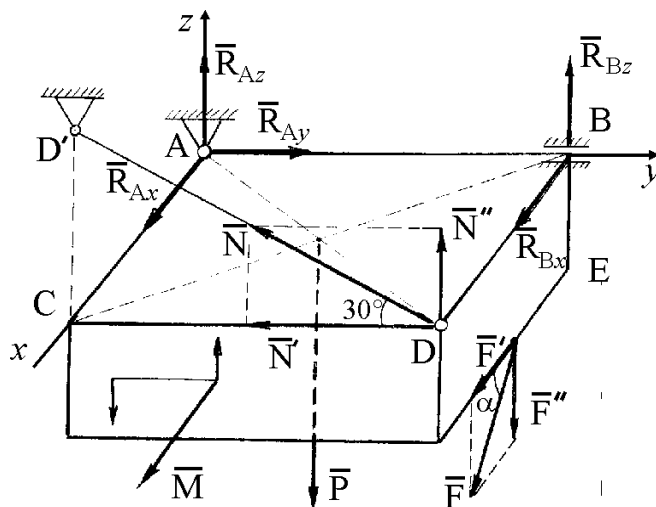


Рис. 1.67.

Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0; R_{Ax} + R_{Bx} + F \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; R_{Ay} - N \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0; R_{Az} + R_{Bz} - P + N \cdot \sin 30^\circ - F \cdot \sin 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = M - P \cdot 0,5 \cdot AB + R_{Bz} \cdot AB - F \cdot \sin 60^\circ \cdot AB + N \cdot \sin 30^\circ \cdot AB = 0; \quad (4)$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = P \cdot 0,5 \cdot AC - N \cdot \sin 30^\circ \cdot AC + F \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,5 \cdot AC - F \cdot \cos 60^\circ \cdot BE = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = -F \cdot \cos 60^\circ \cdot AB - N \cdot \cos 30^\circ \cdot AC - R_{Bx} \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Для определения моментов силы $\bar{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные осям x и z ($F' = F \cdot \cos \alpha$, $F'' = F \cdot \sin \alpha$), и применяем теорему Вариньона.

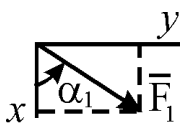
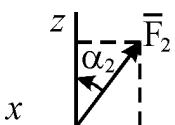
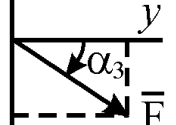
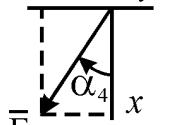
Аналогично поступаем с реакцией $\bar{N}$ ($N' = N \cdot \cos 30^\circ$; $N'' = N \cdot \sin 30^\circ$).

Из уравнения (5) находим:

$$N = \frac{P \cdot 0,5 \cdot AC + F \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,5 \cdot AC - F \cdot \cos 60^\circ \cdot BE}{AC \cdot \sin 30^\circ}.$$

$$N = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 0,8 + 8 \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,5 \cdot 0,8 - 8 \cdot \cos 60^\circ \cdot 0,4}{0,8 \cdot \sin 30^\circ} = 5,928 \text{ кН}.$$

Таблица 1.5.

Номер условия	Сила							
								
	$F_1 = 6 \text{ кН}$		$F_2 = 8 \text{ кН}$		$F_3 = 10 \text{ кН}$		$F_4 = 12 \text{ кН}$	
	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град
1	E	60	H	30	—	—	—	—
2	—	—	D	60	E	30	—	—
3	—	—	—	—	K	60	E	30
4	K	30	—	—	D	0	—	—
5	—	—	E	30	—	—	D	60
6	H	0	K	60	—	—	—	—
7	—	—	H	90	D	30	—	—
8	—	—	—	—	H	60	K	90
9	D	30	—	—	K	0	—	—
10	—	—	D	90	—	—	H	30

Из уравнения (6):

$$R_{Bx} = -\frac{F \cdot \cos 60^\circ \cdot AB + N \cdot \cos 30^\circ \cdot AC}{AB}.$$

$$R_{Bx} = -\frac{8 \cdot \cos 60^\circ \cdot 1,2 + 5,928 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,8}{1,2} = -7,422 \text{ кН}.$$

Из уравнения (4):

$$R_{Bz} = \frac{P \cdot 0,5 \cdot AB - M + F \cdot \sin 60^\circ \cdot AB - N \cdot \sin 30^\circ \cdot AB}{AB}.$$

$$R_{Bz} = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 1,2 - 4 + 8 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,2 - 5,928 \cdot \sin 30^\circ \cdot 1,2}{1,2} = 2,13 \text{ кН.}$$

Из уравнения (1):

$$R_{Ax} = -R_{Bx} - F \cdot \cos 60^\circ.$$

$$R_{Ax} = -(-7,422) - 8 \cdot \cos 60^\circ = 3,422 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2):

$$R_{Ay} = N \cdot \cos 30^\circ.$$

$$R_{Ay} = 5,928 \cdot \cos 30^\circ = 5,133 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3):

$$R_{Az} = -R_{Bz} + P - N \cdot \sin 30^\circ + F \cdot \sin 60^\circ.$$

$$R_{Az} = -2,13 + 3 - 5,928 \cdot \sin 30^\circ + 8 \cdot \sin 60^\circ = 4,834 \text{ кН.}$$

Ответ: $R_{Ax} = 3,422 \text{ кН}$, $R_{Ay} = 5,133 \text{ кН}$, $R_{Az} = 4,834 \text{ кН}$, $R_{Bx} = -7,422 \text{ кН}$, $R_{Bz} = 2,13 \text{ кН}$, $N = 5,928 \text{ кН}$.

Знак «минус» указывает, что реакция $\bar{R}_{Bx}$ направлена противоположно показанной на рис. 1.87.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определить момент силы относительно оси?
2. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
3. Как представить вектор-момент пары сил, расположенной в пространстве?
4. Как складываются пары сил в пространстве?
5. Как вычислить главный вектор и главный момент пространственной произвольной системы сил?
6. Каковы условия и уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил?

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Кинематика точки

Определить движение точки – это значит уметь определить положение точки по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени.

В кинематике применяются три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

При векторном способе определения движения точки радиус-вектор движущейся точки М (рис. 1.68), проведенный из выбранного неподвижного центра О, выражается как векторная функция от времени, т. е. $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Скорость $\vec{V}$ точки, характеризующая быстроту и направление движения точки, равна производной по времени от ее радиуса-вектора:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

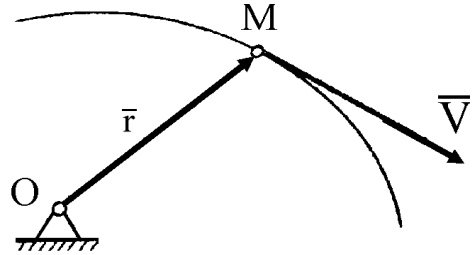


Рис. 1.68.

Ускорение $\vec{a}$ точки, характеризующее изменение скорости по модулю и направлению, равно производной по времени от вектора скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Координатный способ определения (задания) движения точки состоит в том, что координаты движущейся точки в выбранной системе координат выражаются как функции времени t .

Уравнения движения точки в декартовых координатах имеют вид

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Если точка движется в плоскости Оху, то будем иметь только два уравнения движения:

$$x = x(t), y = y(t).$$

Для того чтобы найти траекторию точки, достаточно из уравнений движения исключить время t . Вектор скорости и вектор ускорения определяются по их проекциям на оси декартовых координат, причем

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \\ V_y &= \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \\ V_z &= \dot{z} = \frac{dz}{dt}; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y &= \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z &= \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получаем формулы разложения векторов скорости $\vec{V}$ и ускорения $\vec{a}$ по координатным осям:

$$\bar{V} = \dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k},$$

$$\bar{a} = \ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k}.$$

Модули векторов скорости и ускорения вычисляем по формулам

$$|\bar{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

При естественном способе движение точки задается ее траекторией и уравнением движения по этой траектории:

$$s = \overset{\cup}{OM} = s(t),$$

где O – начало отсчета дуг на траектории; s – дуговая координата точки M или взятая с соответствующим знаком длина дуги, отсчитываемая вдоль траектории от начала отсчета до точки M (рис. 1.69).

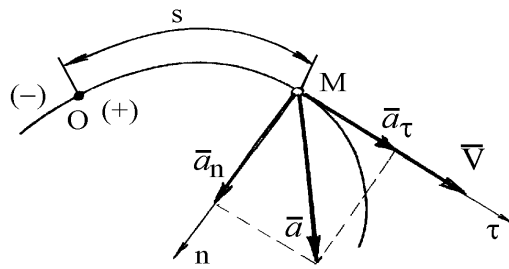


Рис. 1.69.

Если заданы траектория движущейся точки и закон ее движения по этой траектории $s = s(t)$, то вектор скорости направлен по касательной к этой траектории, а его проекция на направление касательной определяется по формуле

$$V = \frac{ds}{dt},$$

причем абсолютное значение этой проекции равно модулю скорости:

$$|V| = \left| \frac{ds}{dt} \right|,$$

Вектор ускорения определяется по его проекциям на естественные оси (касательную, главную нормаль и бинормаль):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad a_g = 0,$$

где ρ – радиус кривизны траектории в данной точке.
Следовательно,

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}.$$

Отметим частные случаи:

1. Если точка движется прямолинейно и неравномерно, то радиус кривизны траектории $\rho \rightarrow \infty$ и, следовательно, $a_n = 0$. В этом случае ускорение направлено вдоль траектории точки и по модулю равно

$$a = |a_{\tau}| = \left| \frac{dV}{dt} \right| = \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right|.$$

2. Если точка движется по криволинейной траектории равномерно, то

$$V = \text{const} \text{ и } a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = 0,$$

и поэтому ускорение направлено по нормали к траектории и по модулю равно

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

3. Если точка движется прямолинейно и равномерно, то $a_n = 0$, $a_{\tau} = 0$ и $a = 0$.

В том случае, когда движение точки задано в координатной форме, касательное ускорение определяется по формуле

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \right), \text{ или } a_{\tau} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{V}.$$

После этого нормальное ускорение можно найти из равенства

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_{\tau}^2},$$

где $a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2$.

Определив a_n , найдем радиус кривизны по формуле

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

Если плоская траектория задана уравнением $y = y(x)$, то радиус кривизны траектории вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''},$$

где $y' = \frac{dy}{dx}$ и $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Задание 1. Определение скорости и ускорения точки

Точка М движется в плоскости xOy (рис. 70 - 79, табл. 6; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t = 1$ с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. 6 (для рис. 1.70-1.72 – в столбце 2, для рис. 1.73 – 1.76 – в столбце 3, для рис. 1.77 – 1.79 – в столбце 4).

Задача относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания ее движения.

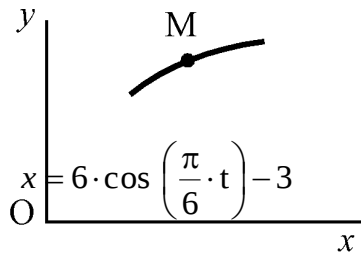


Рис. 1.70.

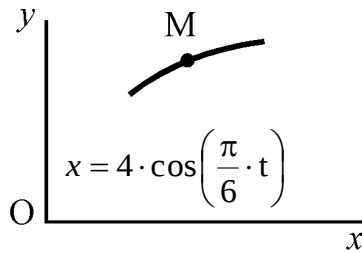


Рис. 1.71.

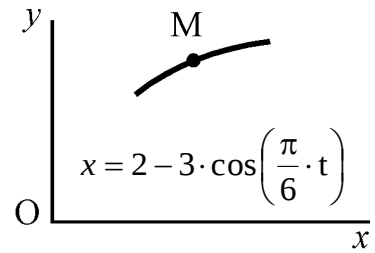


Рис. 1.72.

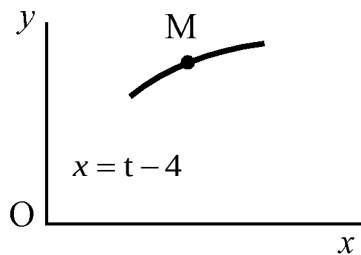


Рис. 1.73

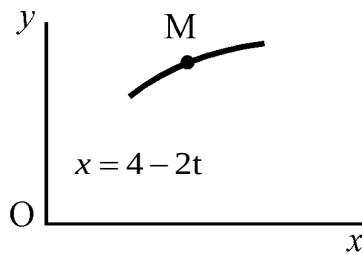


Рис. 1.74.

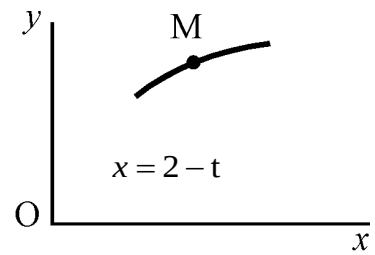


Рис. 1.75.

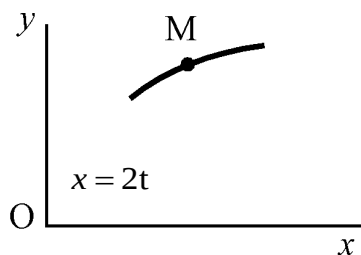


Рис. 1.76.

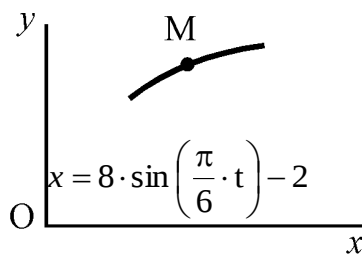


Рис. 1.77.

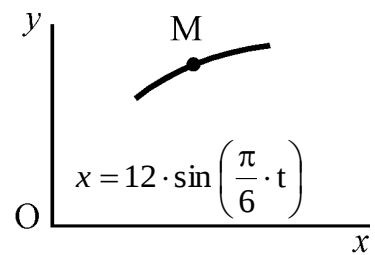


Рис. 1.78.

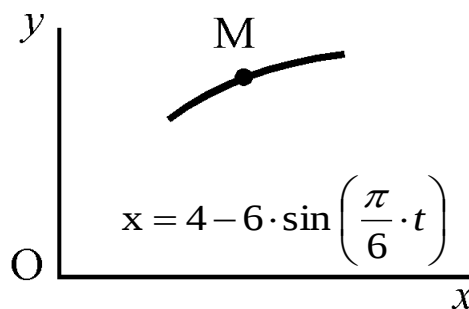


Рис. 1.79.

Таблица 1.6.

Номер условия	$y = f_2(t)$		
	Рис. 70-72	Рис. 73-76	Рис. 77-79
1	$12 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$2 \cdot t^2 + 2$	$4 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$
2	$-6 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$	$8 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)$	$6 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$
3	$-3 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$(2+t)^2$	$4 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$
4	$9 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$2 \cdot t^3$	$10 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$
5	$3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$	$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)$	$-4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$
6	$10 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$2 - 3 \cdot t^2$	$12 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$
7	$6 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)$	$-3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$
8	$-2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$(1+t)^3$	$-8 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$
9	$9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$	$2 - t^3$	$9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$
10	$-8 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$4 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)$	$-6 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$

В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1 = 1$ с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1; \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Пример выполнения задания. Даны уравнения движения точки в плоскости xOy :

$$x = 6 \cdot \cos(\pi \cdot t / 6) - 3, y = -4 \cdot \cos^2(\pi \cdot t / 6)$$

(x, y – в метрах, t – в секундах).

Определить уравнение траектории точки. Для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. Для определения траектории исключим из заданных уравнений движения время t , воспользовавшись подстановкой:

$$\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{x+3}{6},$$

$$y = -\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - 1.$$

Из полученного выражения следует, что траекторией движения точки является парабола с нисходящими ветвями и осью, параллельной оси y ; вершина параболы находится в точке с координатами $x = -3$ м, $y = 0$.

Найдем проекции вектора скорости на оси координат:

$$\dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt} = -\pi \cdot \sin(\pi t / 6),$$

$$\dot{y} = V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot \cos(\pi t / 6) \cdot \sin(\pi t / 6) = \frac{2}{3}\pi \cdot \sin(\pi t / 3).$$

Подставив $t_1 = 1$ с в полученные выражения, находим

$$\dot{x} = V_x = -0,5\pi = -1,57, \quad \dot{y} = V_y = 0,577\pi = 1,81.$$

Скорость точки в момент времени $t_1 = 1$ с

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 0,763\pi = 2,397 \text{ м/с}.$$

Найдем проекции вектора ускорения:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{6} \cos(\pi t / 6),$$

$$a_y = \ddot{y} = \frac{dV_y}{dt} = \frac{2}{9}\pi^2 \cos(\pi t / 3).$$

Для момента времени $t_1 = 1$ с

$$a_x = \ddot{x} = -1,42, \quad a_y = \ddot{y} = 1,096,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1,793 \text{ м/с}^2.$$

Касательное ускорение найдем по формуле

$$a_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{V} = \frac{(-1,57)(-1,42) + 1,81 \cdot 1,096}{2,397} = 1,757 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 0,357 \text{ м/с}^2.$$

Вычислим радиус кривизны траектории в том месте, где находится точка в момент времени $t_1 = 1$ с:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{2,397^2}{0,357} = 16,1 \text{ м}.$$

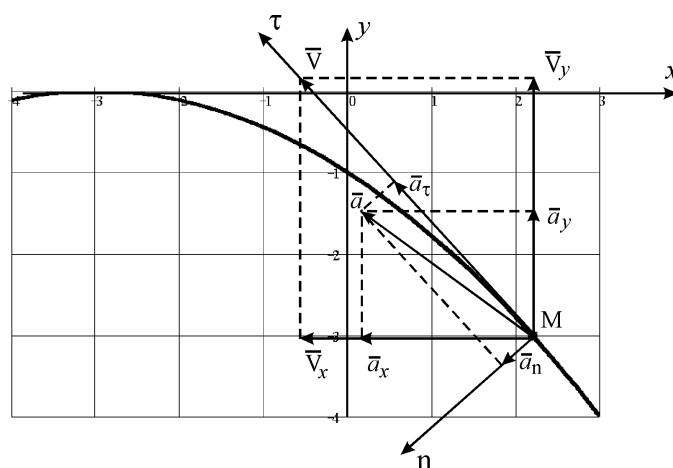


Рис. 1.80.

Пользуясь уравнением траектории, вычерчиваем параболу (рис. 80) и показываем на ней точку М в заданный момент времени по ее координатам. Вектор скорости $\vec{V}$ строим по составляющим $\vec{V}_x$ и $\vec{V}_y$; он должен быть направлен по касательной к траектории. Вектор ускорения $\vec{a}$ находим по его составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$. Далее найденный вектор раскладываем на направления касательной и нормали и получаем векторы касательного $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений. Полученные таким образом значения $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ должны совпасть с результатами их подсчета по формулам.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется траекторией точки?
2. Какие существуют способы задания движения и в чем заключается каждый из них?
3. Как при координатном способе задания движения точки определяется ее траектория?
4. Как найти проекции векторов скорости и ускорения точки на оси декартовой системы координат?
5. Как вычислить модули векторов скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси?
6. Как определяются и что характеризуют нормальное и касательное ускорения точки?
7. Как найти радиус кривизны траектории в какой-либо ее точке?

2.2. Кинематика плоскопараллельного движения твердого тела

Плоскопараллельным (плоским) движением твердого тела называется такое движение, при котором траектории всех его точек лежат в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Пусть тело движется параллельно некоторой неподвижной плоскости Π (рис. 1.81). Если пересечь данное тело плоскостью xOy , параллельной неподвижной плоскости Π , то в сечении получится какая-то плоская фигура S . Эта фигура будет перемещаться при движении тела, оставаясь все время в той же плоскости xOy . Очевидно, что при таком движении тела все его точки, лежащие на перпендикуляре Aa к плоскости фигуры, движутся совершенно одинаково, так же как и точка A этой фигуры. Все точки, расположенные на перпендикуляре Bb к плоскости фигуры, движутся так же, как и точка B этой фигуры, и т. д. Отсюда следует, что для определения плоского движения тела достаточно знать движение плоской фигуры в ее плоскости. Положение неизменяемой плоской фигуры S в ее плоскости вполне определяется положением двух произвольных ее точек A и B . Следовательно, изучение движения плоской фигуры в ее плоскости сводится к изучению движения прямолинейного отрезка AB , с которым фигура неизменно связана. Но положение отрезка AB определяется двумя координатами x_A и y_A точки A , называемой полюсом и углом φ , который образует этот отрезок с некоторой осью неизменного направления, лежащей в плоскости данной фигуры (рис. 1.82).

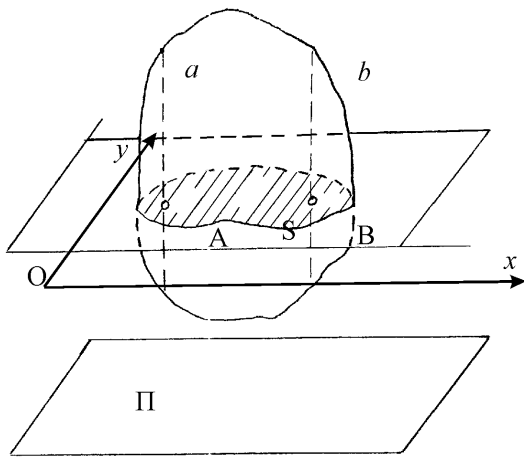


Рис. 1.81.

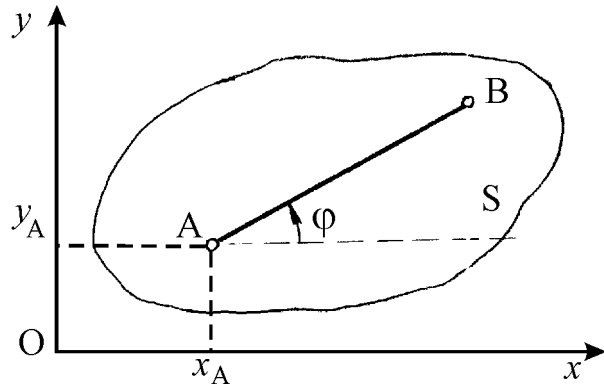


Рис. 1.82.

Таким образом, движение плоской фигуры в ее плоскости можно определить следующими тремя уравнениями:

$$x_A = x_A(t),$$

$$y_A = y_A(t),$$

$$\varphi = \varphi(t).$$

Из этих уравнений следует, что движение плоской фигуры можно разложить на два движения: 1) поступательное движение вместе с полюсом A и определяемое первыми двумя уравнениями и 2) вращательное движение вокруг полюса, определяемое третьим уравнением. При этом угловая скорость вращательного движения не зависит от выбора полюса. Очевидно, что скорость любой точки B плоской фигуры равна геометрической сумме двух скоростей: скорости полюса $\bar{V}_A$ и скорости $\bar{V}_{BA}$ точки B во вращательном движении вокруг полюса (рис. 83), т. е.

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA},$$

причем $\bar{V}_{BA} \perp AB$ и $V_{BA} = \omega \cdot AB$.

Отсюда следует теорема о проекциях скоростей точек плоской фигуры: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось η , проходящую через эти точки, равны между собой.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

Если известны скорость $\bar{V}_A$ какой-либо точки A плоской фигуры и угловая скорость ω этой фигуры, то, повернув вектор $\bar{V}_A$ вокруг точки A на 90° в направлении вращения фигуры и отложив на этой полупрямой отрезок

$$AP = V_A / \omega,$$

получим точку P, которая является МЦС (рис. 1.83).

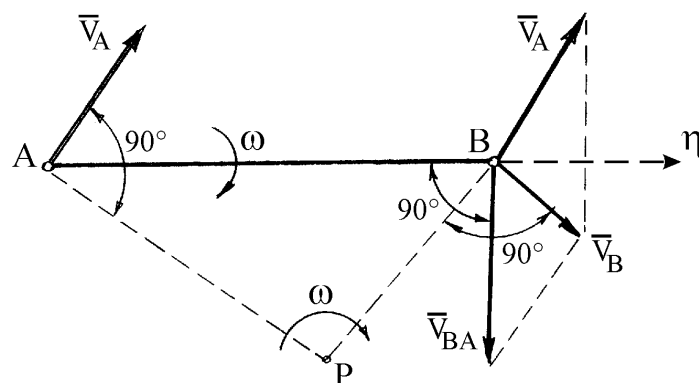


Рис. 1.83.

Если же известны направления скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находят как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в этих точках к направлениям их скоростей.

Если мгновенный центр скоростей P найден и если известна угловая скорость фигуры, то скорость любой точки B фигуры определяется как скорость этой точки во вращательном движении вокруг МЦС, т. е. вектор $\vec{V}_B$ перпендикулярен к отрезку PB и по модулю равен $\omega \cdot PB$. Отсюда следует, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей, т. е.

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{PA}{PB}.$$

Отметим другие случаи нахождения положения МЦС.

Если скорости точек A и B параллельны и $AB \perp \vec{V}_A$, то для определения положения МЦС следует воспользоваться свойством пропорциональности скоростей расстояниям точек до мгновенного центра скоростей. На рис. 1.84, а, б представлено, как находится МЦС в этих случаях.

На рис. 1.84, в показан случай, когда $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, но $\vec{V}_A$ не перпендикулярна отрезку AB . Очевидно, что в этом случае прямые Aa и Bb , перпендикулярные $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$, пересекаются в бесконечности и мгновенного центра скоростей не существует, а угловая скорость фигуры равна нулю ($\omega = 0$). На основании теоремы о проекциях скоростей имеем $V_A \cdot \cos \alpha = V_B \cdot \cos \alpha$, отсюда $V_A = V_B$ и $\vec{V}_A = \vec{V}_B$. Значит, в данный момент времени скорости всех точек плоской фигуры равны по модулю и направлению.

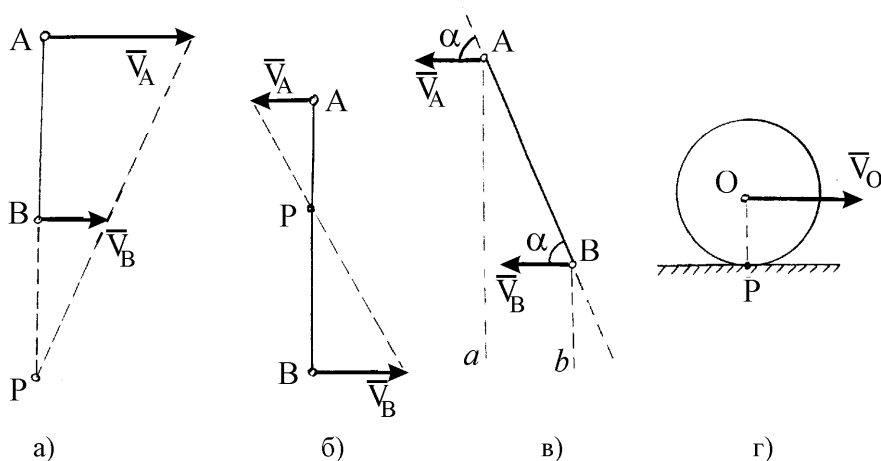


Рис. 1.84.

При качении без скольжения одного тела по поверхности неподвижного другого (рис. 1.84, г) МЦС совпадает с точкой Р соприкосновения тел (так как при отсутствии скольжения скорость точки соприкосновения равна нулю).

Ускорение любой точки движущейся плоской фигуры можно определить как геометрическую сумму ускорений этой точки в поступательном движении вместе с некоторым полюсом и вращательным движением вокруг этого полюса.

Если известны ускорение $\bar{a}_A$ некоторой точки А фигуры (ускорение полюса), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε фигуры, то ускорение любой ее точки В определяется по формуле

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau.$$

Здесь вектор $\bar{a}_{BA}$ – ускорение точки В во вращательном движении вокруг полюса А; $\bar{a}_{BA}^n$ и $\bar{a}_{BA}^\tau$ – нормальная и касательная составляющие этого вектора, которые вычисляем по формулам:

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB, \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB.$$

При этом вектор $\bar{a}_{BA}^n$ направлен вдоль ВА (от точки В к точке А), а вектор $\bar{a}_{BA}^\tau$ перпендикулярен к ВА (рис. 1.85).

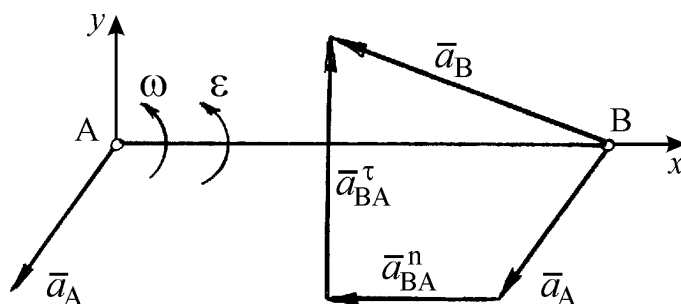


Рис. 1.85.

Ускорение точки В можно определить, если спроецировать векторное равенство

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$$

на оси x и y (см. рис. 1.85) и найти проекции этого ускорения:

$$a_{Bx} = a_{Ax} - a_{BA}^n, \quad a_{By} = a_{Ay} + a_{BA}^\tau.$$

По проекциям находят модуль ускорения точки В:

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}.$$

Задание 2. Исследование плоскопараллельного движения твердого тела

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В или Е (рис. 1.86-1.93) или из стержней 1, 2, 3 и ползуну В и Е (рис. 1.94, 1.95), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 , O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня АВ. Длины стержней равны соответственно $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $l_4 = 0,6$ м. Положение механизма определяется углами α , β , γ , φ , θ . Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. 1.7 (для рис. 1.86 – 1.90) или в табл. 1.8 (для рис. 1.91 – 1.95); при этом в табл. 1.7 заданные ω_1 или ω_4 – величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: *по ходу или против хода часовой стрелки* (например, угол γ на рис. 1.94 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на рис. 1.95 – против хода часовой стрелки и т. д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α ; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере 2 (см. рис. 1.97).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\bar{V}_B$ и ускорение $\bar{a}_B$ – от точки B к b (на рис. 1.91 – 1.95).

Таблица 1.7 (к рис. 1.66-1.70)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1, 1/c$	$\omega_4, 1/c$	V точек	ω звена	a точки	ε звена
1	0	60	30	0	120	6	–	B, E	DE	B	AB
2	90	120	150	0	30	–	4	A, E	AB	A	AB
3	30	60	30	0	120	5	–	B, E	AB	B	AB
4	60	150	150	90	30	–	5	A, E	DE	A	AB
5	30	30	60	0	150	4	–	D, E	AB	B	AB
6	90	120	120	90	60	–	6	A, E	AB	A	AB
7	90	150	120	90	30	3	–	B, E	DE	B	AB
8	0	60	60	0	120	–	2	A, E	DE	A	AB
9	60	150	120	90	30	2	–	D, E	AB	B	AB
10	30	120	150	0	60	–	8	A, E	DE	A	AB

Таблица 1.8 (к рис. 1.71 – 1.75)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1, 1/c$	$\varepsilon_1, 1/c^2$	$V_B, м/с$	$a_B, м/с^2$	V точек	ω звена	a точки	ε звена
1	120	30	30	90	150	2	4	–	–	B, E	AB	B	AB
2	0	60	90	0	120	–	–	4	6	A, E	DE	A	AB
3	60	150	30	90	30	3	5	–	–	B, E	AB	B	AB
4	0	150	30	0	60	–	–	6	8	A, E	AB	A	AB
5	30	120	120	0	60	4	6	–	–	B, E	DE	B	AB
6	90	120	90	90	60	–	–	8	10	D, E	DE	A	AB
7	0	150	90	0	120	5	8	–	–	B, E	DE	B	AB
8	30	120	30	0	60	–	–	2	5	A, E	AB	A	AB
9	90	120	120	90	150	6	10	–	–	B, E	DE	B	AB
10	60	60	60	90	30	–	–	5	4	D, E	AB	A	AB

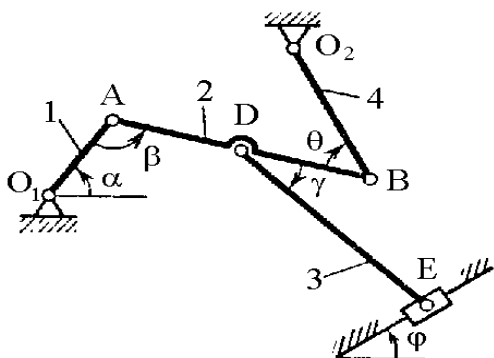


Рис. 1.86.

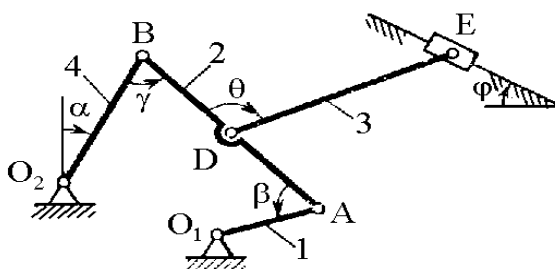


Рис. 1.87.

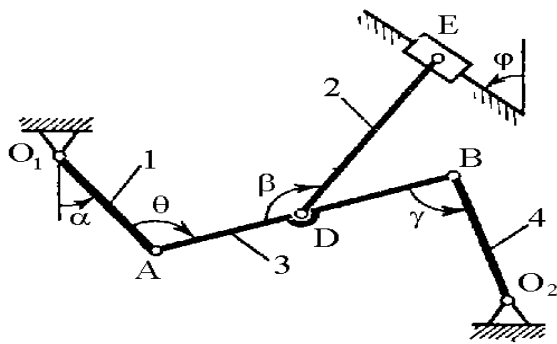


Рис. 1.88.

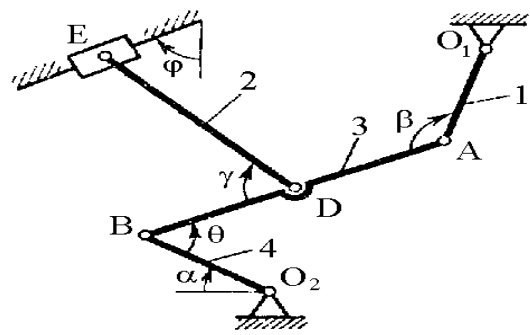


Рис. 1.89.

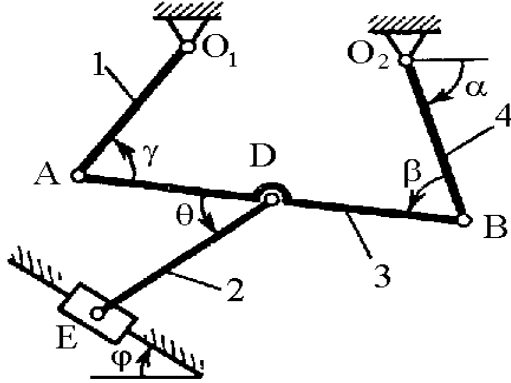


Рис. 1.90.

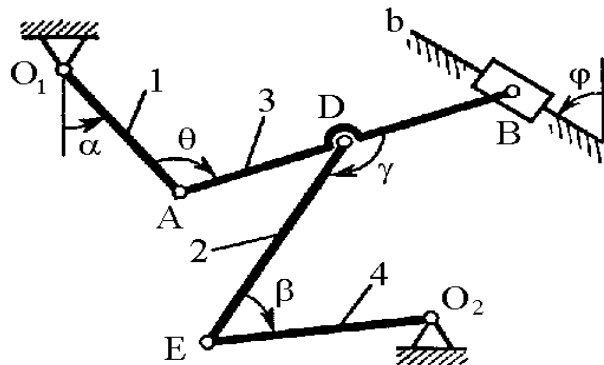


Рис. 1.91.

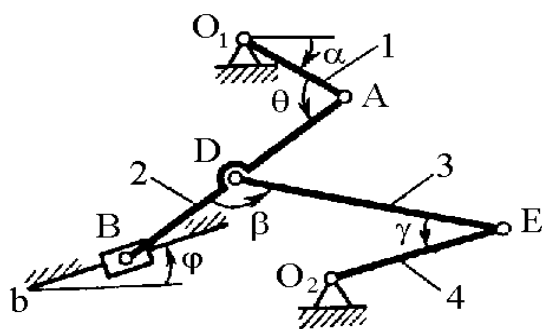


Рис. 1.92.

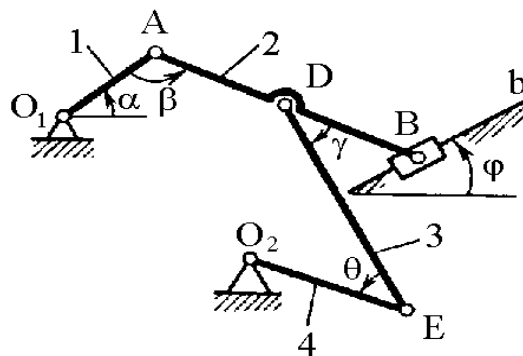


Рис. 1.93.

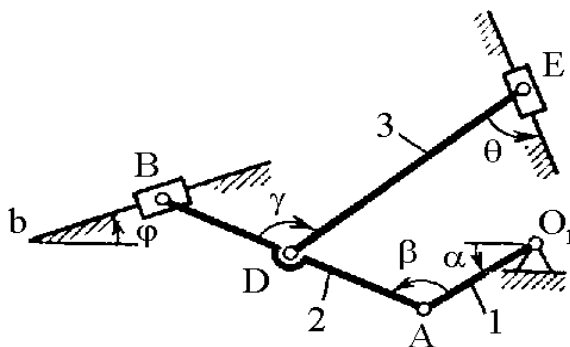


Рис. 1.94.

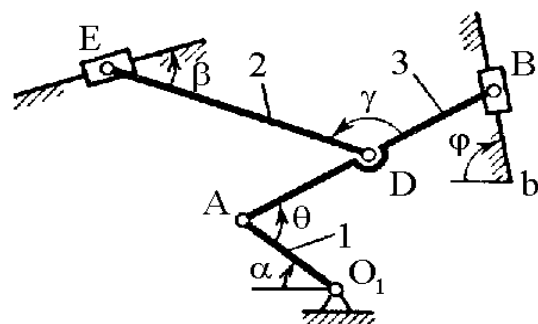


Рис. 1.95.

При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему к каждому звену механизма в отдельности.

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n$, где А – точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка А движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$); В – точка, ускорение $\bar{a}_B$ которой нужно определить (о случае, когда точка В тоже движется по дуге окружности, см. примечание в конце рассмотренного ниже примера К2).

Пример выполнения задания. Механизм (рис. 1.96) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

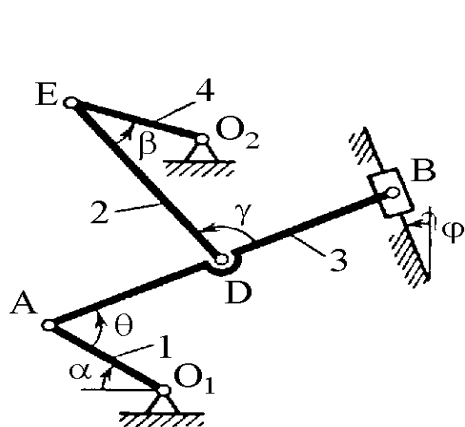


Рис. 1.96.

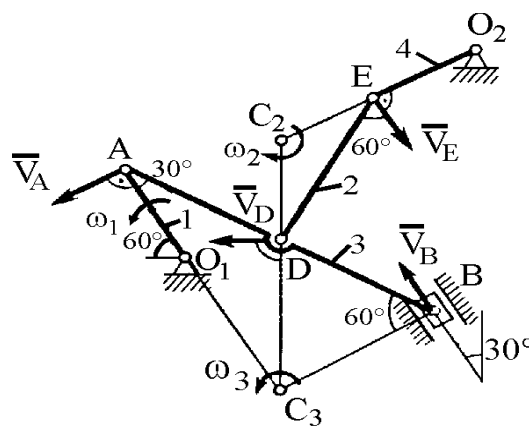


Рис. 1.97.

Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\phi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DB$, $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $\omega_1 = 2$ с⁻¹, $\varepsilon_1 = 7$ с⁻² (направления ω_1 и ε_1 – против хода часовой стрелки). Определить: V_B , V_E , ω_2 , a_B , ε_3 .

Решение. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. 1.97; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

Определяем V_B . Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти V_B , надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{V}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1 , можем определить $\bar{V}_A$; численно

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 0,8 \text{ м/с}; \quad \bar{V}_A \perp O_1A. \quad (1)$$

Направление $\bar{V}_B$ найдем, учтя, что точка В принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{V}_A$ и направление $\bar{V}_B$, используем теорему о проекциях скоростей двух точек тела (стержня АВ) на прямую, соединяющую эти точки (прямая АВ). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar{V}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим:

$$V_B \cdot \cos 30^\circ = V_A \cdot \cos 60^\circ \text{ и } V_B = 0,46 \text{ м/с}. \quad (2)$$

Рассчитываем $\bar{V}_E$. Точка Е принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar{V}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню АВ. Для этого, зная $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня АВ; это точка C_3 , лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$, восстановленных из точек А и В (к $\bar{V}_A$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\bar{V}_A$ определяем направление поворота стержня АВ вокруг МЦС C_3 . Вектор $\bar{V}_D$ перпендикулярен к отрезку C_3D , соединяющему точки D и C_3 , и направлен в сторону поворота. Величину V_D найдем из пропорции

$$\frac{V_D}{C_3D} = \frac{V_B}{C_3B}. \quad (3)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B , заметим, что $\triangle AC_3B$ – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60° , и что $C_3B = AB \cdot \sin 30^\circ = 0,5 \cdot AB = BD$. Тогда $\triangle BC_3D$ является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает:

$$V_D = V_B = 0,46 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_D \perp C_3D. \quad (4)$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E , вращающемуся вокруг O_2 , то $\vec{V}_E \perp O_2E$, тогда, проведя из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_E$ и $\vec{V}_D$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\vec{V}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2 . Вектор $\vec{V}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. 1.97 видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{V_E}{C_2E} = \frac{V_D}{C_2D}, \quad V_E = V_D = 0,46 \text{ м/с}. \quad (5)$$

Определяем ω_2 . Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и $C_2D = l_2/(2 \cdot \cos 30^\circ) = 0,69 \text{ м}$, то

$$\omega_2 = \frac{V_D}{C_2D} = 0,67 \text{ с}^{-1}. \quad (6)$$

Определяем $\vec{a}_B$ (рис. 1.98, на котором изображены все векторы ускорений). Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти $\vec{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 2,8 \text{ м/с}^2; \quad (7)$$

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_1 = 1,6 \text{ м/с}^2.$$

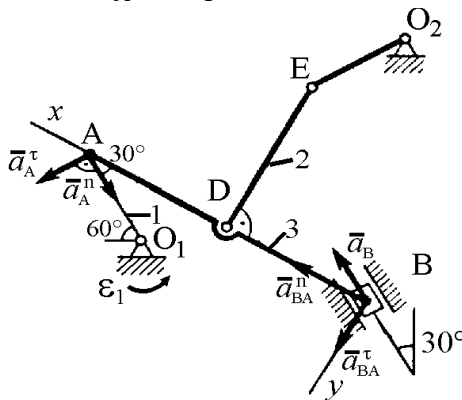


Рис. 1.98.

Вектор $\vec{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1 , а $\vec{a}_A^\tau$ – перпендикулярно к AO_1 ; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. 1.98). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\vec{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\vec{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\vec{V}_B$.

Для определения $\bar{a}_B$ воспользуемся равенством

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \quad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\bar{a}_{BA}^n$ (вдоль ВА от В к А) и $\bar{a}_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно к ВА); численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 \cdot l_3$. Находим ω_3 с помощью МЦС C_3 стержня 3:

$$\omega_3 = \frac{V_A}{C_3 A} = \frac{V_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0,66 \text{ с}^{-1} \text{ и } a_{BA}^n = 0,61 \text{ м/с}^2. \quad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две взаимно перпендикулярные оси.

Чтобы определить a_B , спроектируем обе части равенства (8) на направление ВА (ось x), перпендикулярное к неизвестному вектору $\bar{a}_{BA}^\tau$. Тогда получим:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a_A^\tau \cdot \cos 60^\circ - a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \quad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0,72 \text{ м/с}^2. \quad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\bar{a}_B$ направлен как показано на рис. 1.98.

Находим ε_3 . Чтобы найти ε_3 , сначала вычислим a_{BA}^τ . Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное АВ (ось y). Тогда получим:

$$-a_B \cdot \sin 30^\circ = a_A^\tau \cdot \sin 60^\circ + a_A^n \cdot \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau. \quad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a_{BA}^\tau = -3,58 \text{ м/с}^2$. Знак указывает, что направление $\bar{a}_{BA}^\tau$ противоположно показанному на рис. 1.98. Теперь из равенства $|\bar{a}_{BA}^\tau| = \varepsilon_3 \cdot l_3$ получим:

$$\varepsilon_3 = \frac{|\bar{a}_{BA}^\tau|}{l_3} = 2,56 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $V_B = 0,46 \text{ м/с}$; $V_E = 0,46 \text{ м/с}$; $\omega_2 = 0,67 \text{ с}^{-1}$; $a_B = 0,72 \text{ м/с}^2$; $\varepsilon_3 = 2,56 \text{ с}^{-2}$.

Если точка В, ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. 86-90, где В движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\bar{a}_B$ заранее неизвестно.

В этом случае $\bar{a}_B$ также следует представить двумя составляющими ($\bar{a}_B = \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n$) и исходное уравнение (8) примет вид

$$\bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (13)$$

При этом вектор $\bar{a}_B^n$ (см., например, рис. 1.86) будет направлен вдоль BO_2 , а вектор $\bar{a}_B^\tau$ – перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a_A^τ , a_A^n и a_{BA}^n определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть $a_A^\tau = 0$ или $a_A^n = 0$, если точка А движется прямолинейно).

Значение a_B^n вычисляется по формуле $a_B^n = V_B^2 / \rho = V_B^2 / l$, где l – радиус окружности O_2B , а V_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a_B^τ и a_{BA}^τ и они, как и в рассмотренном примере, находятся проецированием обеих частей равенства (13) на две взаимно-перпендикулярные оси.

Найдя a_B^τ , можем вычислить искомое ускорение $a_B^\tau = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}$. Величина a_{BA}^τ служит для нахождения ϵ_{AB} (как в рассмотренном примере).

Если требуется определить ускорение точки D звена AB (рис. 1.99), то следует воспользоваться векторным равенством:

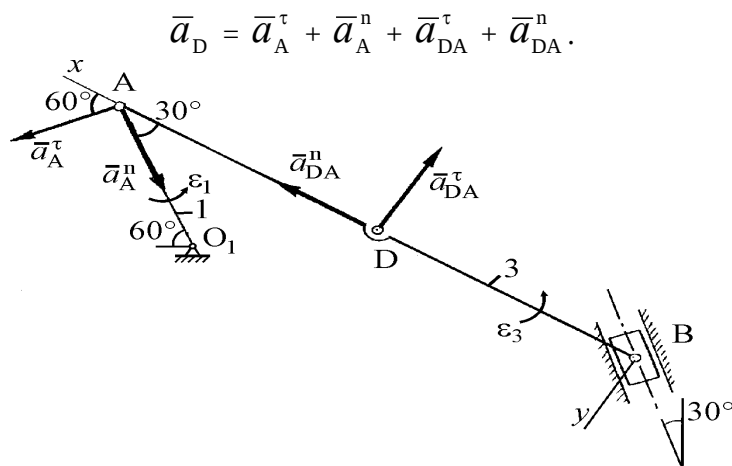


Рис. 1.99.

Ускорение точки D найдем по его проекциям на координатные оси, спроецировав приведенное выше векторное равенство на эти оси:

$$a_{Dx} = a_A^\tau \cdot \cos 60^\circ - a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_{DA}^n,$$

$$a_{Dy} = a_A^\tau \cdot \sin 60^\circ + a_A^n \cdot \sin 30^\circ + a_{DA}^\tau.$$

Здесь $a_{DA}^n = \omega_2^2 \cdot AD$, $a_{DA}^\tau = \epsilon_2 \cdot AD$.

Вектор $\bar{a}_{DA}^n$ направлен от точки D к точке A, а вектор $\bar{a}_{DA}^\tau$ перпендикулярен к DA.

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?
2. Какими уравнениями задается плоскопараллельное движение?
3. Как по уравнениям движения плоской фигуры найти скорость полюса и угловую скорость вращения вокруг полюса?
4. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?
5. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры.
6. Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры и как найти положение МЦС в различных случаях?
7. Сформулируйте теорему об ускорениях точек плоской фигуры.

2.3. Составное (сложное) движение точки

Составное движение точки – это такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или нескольких движениях.

Рассмотрим тело А (рис. 1.100, которое свободно движется по отношению к неподвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$. Пусть точка М совершает движение по поверхности этого тела. Через произвольную точку О движущегося тела проведем неизменно связанные с этим телом оси x, y, z . Систему осей $Oxyz$ называют подвижной системой отсчета.

Движение точки М по отношению к неподвижной системе отсчета называют *абсолютным движением точки*.

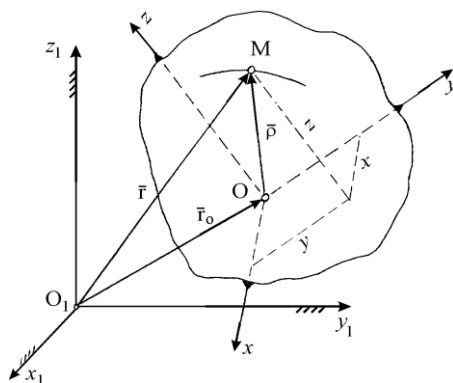


Рис. 1.100.

Абсолютное движение точки характеризуется изменением радиуса-вектора $\bar{r}$ по модулю и направлению.

Скорость и ускорение точки в абсолютном движении называют абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки и обозначают $\bar{V}_{\text{абс}}$ и $\bar{a}_{\text{абс}}$.

Движение точки М по отношению к подвижной системе отсчета называют *относительным движением точки*. Относительное движение характеризуется изменением только радиуса-вектора $\bar{r}_0$ при неизменных радиусах-векторах $\bar{r}$ и $\bar{r}_0$. В этом случае координаты x, y, z точки М в подвижной системе отсчета будут изменяться.

Скорость и ускорение точки в относительном движении называют относительной скоростью и относительным ускорением и обозначают $\bar{V}_{\text{отн}}$ и $\bar{a}_{\text{отн}}$.

Движение подвижной системы отсчета $Oxyz$ и неизменно связанного с ней тела А по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ является для точки М *переносным движением*. Переносное движение точки М характеризуется изменением радиусов-векторов $\bar{r}$ и $\bar{r}_0$ по модулю и направлению при неизменном только по модулю радиусе-векторе $\bar{r}$.

Скорость и ускорение той точки тела А, с которой в данный момент совпадает точка М, называют *переносной скоростью и переносным ускорением точки М* и обозначают $\bar{V}_{\text{пер}}$ и $\bar{a}_{\text{пер}}$.

Желая изучить относительное движение точки, следует мысленно остановить переносное движение. Если необходимо изучить переносное движение точки, то надо мысленно остановить относительное движение и рассмотреть далее движение точки по формулам кинематики точки в абсолютном движении.

Если точка М участвует в составном движении, то имеют место следующие теоремы:

абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей точки, т. е.

$$\bar{V}_{\text{абс}} = \bar{V}_{\text{пер}} + \bar{V}_{\text{отн}};$$

абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова(поворотного) ускорений этой точки, т. е.

$$\bar{a}_{\text{абс}} = \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{отн}} + \bar{a}_{\text{кор}},$$

или

$$\bar{a}_{\text{абс}} = \bar{a}_{\text{пер}}^{\text{н}} + \bar{a}_{\text{пер}}^{\tau} + \bar{a}_{\text{отн}}^{\text{н}} + \bar{a}_{\text{отн}}^{\tau} + \bar{a}_{\text{кор}}.$$

Кориолисово ускорение $\bar{a}_{\text{кор}}$ равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость точки, т. е.

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2 \cdot (\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{V}_{\text{отн}}).$$

Следовательно, модуль этого ускорения

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot \omega_{\text{пер}} \cdot V_{\text{отн}} \cdot \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами $\bar{\omega}_{\text{пер}}$ и $\bar{V}_{\text{отн}}$.

Чтобы найти направление кориолисова ускорения $\bar{a}_{\text{кор}}$ точки М, достаточно в точке М построить векторы $\bar{\omega}_{\text{пер}}$ и $\bar{V}_{\text{отн}}$ и восстановить из этой точки перпендикуляр к плоскости, в которой лежат эти векторы $\bar{\omega}_{\text{пер}}$ и $\bar{V}_{\text{отн}}$. Вектор $\bar{a}_{\text{кор}}$ направлен по этому перпендикуляру так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца этого вектора, видел поворот вектора $\bar{\omega}_{\text{пер}}$ на угол α против хода часовой стрелки до совмещения его с вектором $\bar{V}_{\text{отн}}$ (рис. 1.101).

Направление вектора $\bar{a}_{\text{кор}}$ можно определить и другим способом (правило Н. Е. Жуковского).

Проведем через точку М плоскость Π , перпендикулярную к вектору $\bar{\omega}_{\text{пер}}$ и спроецируем относительную скорость $\bar{V}_{\text{отн}}$ на эту плоскость. Если полученную проекцию $\bar{V}'_{\text{отн}}$ повернем в плоскости Π на 90° вокруг точки М в направлении переносного вращения, то получим направление вектора $\bar{a}_{\text{кор}}$.

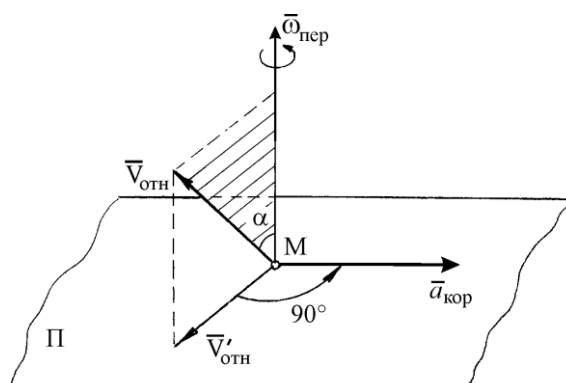


Рис. 1.101.

Задание 3. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения

Прямоугольная пластина (рис. 1.102-1.106) или круглая пластина радиуса $R = 60$ см (рис. 1.107-1.111) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в табл. 9. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 1.102; 1.103; 1.104; 1.107; 1.108 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку

О (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 1.105; 1.106; 1.109; 1.110; 1.111 ось вращения O_1O лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 1.102-1.106) или по окружности радиуса R (рис. 1.107-1.111) движется точка M; закон ее относительного движения, т. е. зависимость $s = AM = f_2(t)$ (s выражено в сантиметрах, t – в секундах), задан в табл. 1.10 отдельно для рис. 1.102 -1.106 и для рис.1.107 – 1.111; там же даны размеры b и l . На рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Для решения задачи следует воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, нужно по условиям задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени $t_1 = 1$ с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. 1.107 – 1.111, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Таблица 1.9.

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 1.102 – 1.106		Для рис. 1.107 – 1.111	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = \overset{\curvearrowright}{AM} = f_2(t)$
1	$4 \cdot (t^2 - t)$	12	$50 \cdot (3t - t^2) - 64$	R	$\pi \cdot R \cdot (4t^2 - 2t^3)/3$
2	$3t^2 - 8t$	16	$40 \cdot (3t^2 - t^4) - 32$	$4R/3$	$\pi \cdot R \cdot (2t^2 - t^3)/2$
3	$6t^3 - 12t^2$	10	$80 \cdot (t^2 - t) + 40$	R	$\pi \cdot R \cdot (2t^2 - 1)/3$
4	$t^2 - 2t^3$	16	$60 \cdot (t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\pi \cdot R \cdot (3t - t^2)/6$
5	$10t^2 - 5t^3$	8	$80 \cdot (2t^2 - t^3) - 48$	R	$\pi \cdot R \cdot (t^3 - 2t)/3$
6	$2 \cdot (t^2 - t)$	20	$60 \cdot (t^3 - 2t^2)$	R	$\pi \cdot R \cdot (t^3 - 2t)/6$
7	$5t - 4t^2$	12	$40 \cdot (t^2 - 3t) + 32$	$3R/4$	$\pi \cdot R \cdot (t^3 - 2t^2)/2$
8	$15t - 3t^3$	8	$60 \cdot (t - t^3) + 24$	R	$\pi \cdot R \cdot (t - 5t^2)/6$
9	$2t^3 - 11t$	10	$50 \cdot (t^3 - t) - 30$	R	$\pi \cdot R \cdot (3t^2 - t)/3$
10	$6t^2 - 3t^3$	20	$40 \cdot (t - 2t^3) - 40$	$4R/3$	$\pi \cdot R \cdot (t - 2t^2)/2$

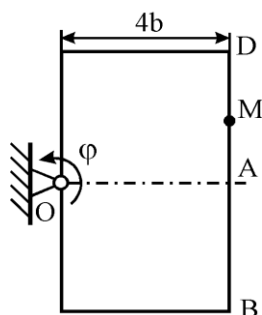


Рис. 1.102.

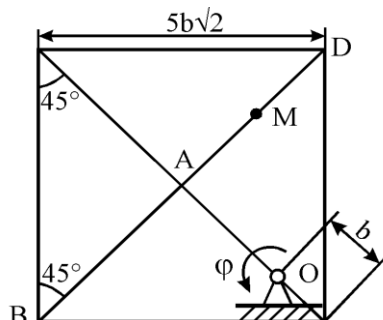


Рис. 1.103 .

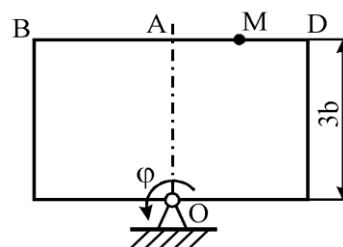


Рис. 1.104.

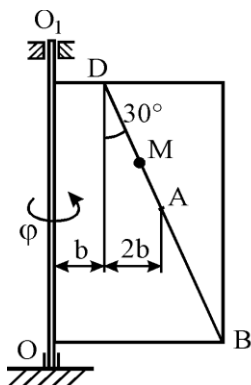


Рис. 1.105.

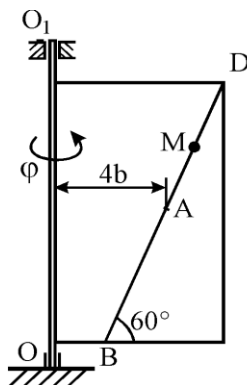


Рис. 1.106.

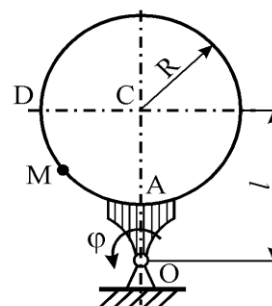


Рис. 1.107.

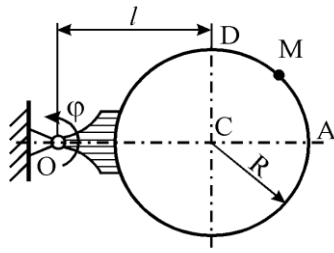


Рис. 1.108.

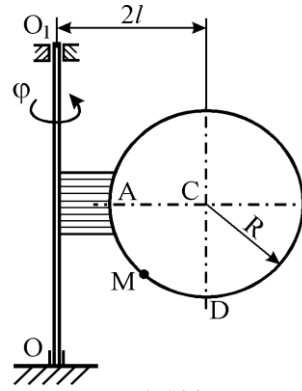


Рис. 1.109.

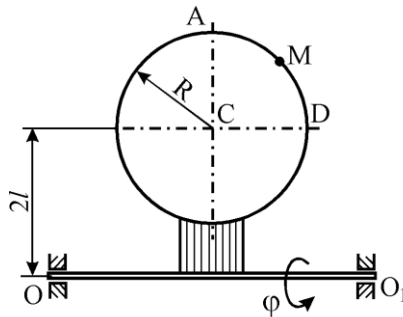


Рис. 1.110.

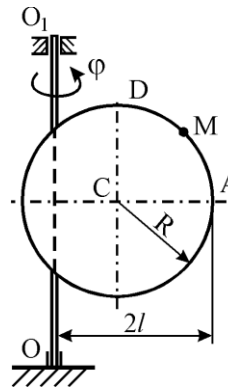


Рис. 1.111.

Рассмотрим два примера решения этой задачи.

Пример выполнения задания. Пластина $OEAB_1D$ ($OE = OD$, рис. 1.112) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = f_1(t)$. По дуге окружности радиуса R движется точка B по закону $s = \overset{\circ}{AB} = f_2(t)$ (положительное направление отсчета s – от A к B).

Дано: $R = 0,5$ м, $\varphi = t^2 - 0,5t^3$, $s = \pi \cdot R \cdot \cos(\pi t/3)$ (φ – в радианах, s – в метрах, t – в секундах).

Определить: $V_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины – переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{V}_{абс}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{абс}$ точки найдутся по формулам:

$$\bar{V}_{абс} = \bar{V}_{пер} + \bar{V}_{отн},$$

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{кор}, \quad (1)$$

где, в свою очередь,

$$\bar{a}_{отн} = \bar{a}_{отн}^{\tau} + \bar{a}_{отн}^n, \quad \bar{a}_{пер} = \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^n.$$

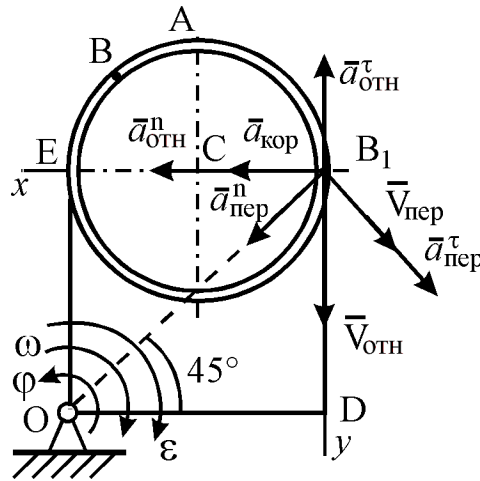


Рис. 1.112.

Определим все входящие в равенства (1) величины.

1. **Относительное движение.** Это движение происходит по закону

$$s = \overset{\curvearrowright}{AB} = \pi \cdot R \cdot \cos(\pi t / 3). \quad (2)$$

Сначала установим, где будет находиться точка B на дуге окружности в момент времени t_1 .

Полагая в уравнении (2) $t_1 = 2$ с, получаем

$$s = \pi \cdot R \cdot \cos(2\pi / 3) = -0,5\pi R.$$

Тогда

$$\angle CAB = \frac{s_1}{R} = -0,5\pi.$$

Знак минус свидетельствует о том, что точка B в момент $t_1 = 2$ с находится справа от точки A. Изображаем ее на рис. 1.112. в этом положении (точка B₁).

Теперь находим числовые значения $V_{отн}$, $a_{отн}^\tau$, $a_{отн}^n$:

$$V_{отн} = \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin(\pi t / 3),$$

$$a_{отн}^\tau = \dot{V}_{отн} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cdot \cos(\pi t / 3), \quad a_{отн}^n = \frac{V_{отн}^2}{\rho_{отн}} = \frac{V_{отн}^2}{R},$$

где $\rho_{отн}$ – радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности R. Для момента $t_1 = 2$ с, учитывая, что $R = 0,5$ м, получаем

$$V_{отн} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin(2\pi / 3) = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{12} = -1,42 \text{ м/с},$$

$$a_{отн}^\tau = -\frac{\pi^3 R}{9} \cdot \cos(2\pi / 3) = \frac{\pi^3}{36} = 0,86 \text{ м/с}^2, \quad a_{отн}^n = \frac{\pi^4}{24} = 4,06 \text{ м/с}^2. \quad (3)$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{a}_{отн}^\tau$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\bar{V}_{отн}$ – в противоположную сторону; вектор $\bar{a}_{отн}^n$ направлен к центру C окружности. Изображаем все эти векторы на рис. 1.112.

Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = t^2 - 0,5 \cdot t^3$. Найдем сначала угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2 \cdot t - 1,5 \cdot t^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 2 - 3 \cdot t;$$

и при $t_1 = 2$ с

$$\omega = -2 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = -4 \text{ с}^{-2}. \quad (4)$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2$ с направления ω и ε противоположны направлению положительного отсчета угла φ ; отметим это на рис. 1.112.

Для определения $\overline{V}_{\text{пер}}$ и $\overline{a}_{\text{пер}}$ находим сначала расстояние $h_1 = OB_1$ точки B_1 от оси вращения O . Из рисунка видно, что $h_1 = 2R \cdot \sqrt{2} = 1,41$ м. Тогда в момент времени $t_1 = 2$ с, учитывая равенства (4), получим

$$V_{\text{пер}} = |\omega| \cdot h_1 = 2,82 \text{ м/с},$$

$$a_{\text{пер}}^{\tau} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 5,64 \text{ м/с}^2, \quad a_{\text{пер}}^n = \omega^2 \cdot h_1 = 5,64 \text{ м/с}^2. \quad (5)$$

Изображаем на рис. К3а векторы $\overline{V}_{\text{пер}}$ и $\overline{a}_{\text{пер}}^{\tau}$ с учетом направлений ω и ε и вектор $\overline{a}_{\text{пер}}^n$ (направлен к оси вращения).

Кориолисово ускорение. Модуль кориолисова ускорения определяем по формуле $a_{\text{кор}} = 2 \cdot |V_{\text{отн}}| \cdot |\omega| \cdot \sin \alpha$, где α – угол между вектором $\overline{V}_{\text{отн}}$ и осью вращения (вектором $\overline{\omega}$). В нашем случае этот угол равен 90° , так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор $\overline{V}_{\text{отн}}$. Численно в момент времени $t_1 = 2$ с, так как в этот момент $|V_{\text{отн}}| = 1,42$ м/с и $|\omega| = 2 \text{ с}^{-1}$, получим

$$a_{\text{кор}} = 5,68 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Направление $\overline{a}_{\text{кор}}$ найдем по правилу Н. Е. Жуковского: так как вектор $\overline{V}_{\text{отн}}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на 90° в направлении ω , т. е. по ходу часовой стрелки. Изображаем $\overline{a}_{\text{кор}}$ на рис. 1.112. (Иначе направление $\overline{a}_{\text{кор}}$ можно найти, учтя, что $\overline{a}_{\text{кор}} = 2 \cdot (\overline{\omega} \times \overline{V}_{\text{отн}})$).

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (1) векторов найдены и для определения $V_{\text{абс}}$ и $a_{\text{абс}}$ остается только сложить эти векторы. Произведем это сложение аналитически.

Определение $V_{\text{абс}}$. Проведем координатные оси $B_1x_1y_1$ (см. рис. 1.112) и спроектируем почленно обе части равенства $\overline{V}_{\text{абс}} = \overline{V}_{\text{отн}} + \overline{V}_{\text{пер}}$ на эти оси. Получим для момента времени $t_1 = 2$ с:

$$\begin{aligned} V_{\text{абс} x} &= V_{\text{отн} x} + V_{\text{пер} x} = 0 - |V_{\text{пер}}| \cdot \cos 45^\circ = -1,99 \text{ м/с}, \\ V_{\text{абс} y} &= V_{\text{отн} y} + V_{\text{пер} y} = |V_{\text{отн}}| + |V_{\text{пер}}| \cdot \cos 45^\circ = 3,41 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

После этого находим

$$V_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{абс} x}^2 + V_{\text{абс} y}^2} = 3,95 \text{ м/с}.$$

Учитывая, что в данном случае угол между $\overline{V}_{\text{отн}}$ и $\overline{V}_{\text{пер}}$ равен 45° , значение $V_{\text{абс}}$ можно еще определить по формуле

$$V_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{отн}}^2 + V_{\text{пер}}^2 + 2|V_{\text{отн}}| \cdot |V_{\text{пер}}| \cdot \cos 45^\circ} = 3,95 \text{ м/с}.$$

Определение $a_{\text{абс}}$. По теореме о сложении ускорений

$$\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a}_{\text{отн}}^{\tau} + \overline{a}_{\text{отн}}^n + \overline{a}_{\text{пер}}^{\tau} + \overline{a}_{\text{пер}}^n + \overline{a}_{\text{кор}}. \quad (7)$$

Для определения $a_{\text{абс}}$ спроецируем обе части равенства (7) на проведенные оси $B_1x_1y_1$. Получим:

$$\begin{aligned} a_{\text{абс} x} &= a_{\text{отн}}^n + a_{\text{кор}} + a_{\text{пер}}^n \cdot \cos 45^\circ - |a_{\text{пер}}^{\tau}| \cdot \cos 45^\circ, \\ a_{\text{абс} y} &= a_{\text{пер}}^n \cdot \cos 45^\circ + |a_{\text{пер}}^{\tau}| \cdot \cos 45^\circ - |a_{\text{отн}}^n|. \end{aligned}$$

Подставив сюда значения, которые все величины имеют в момент времени $t_1 = 2$ с, найдем, что в этот момент

$$a_{абс\ x} = 9,74 \text{ м/с}^2; a_{абс\ y} = 7,15 \text{ м/с}^2.$$

Тогда $a_{абс} = \sqrt{a_{абс\ x}^2 + a_{абс\ y}^2} = 12,08 \text{ м/с}^2.$

Ответ: $V_{абс} = 3,95 \text{ м/с}, a_{абс} = 12,08 \text{ м/с}^2.$

2. Пример выполнения задания. Треугольная пластина ADE вращается вокруг оси z по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. 1.113 дуговой стрелкой). По гипотенузе AD движется точка B по закону $s = AB = f_2(t)$; положительное направление отсчета s – от A к D.

Дано: $\varphi = 0,1 \cdot t^3 - 2,2 \cdot t$, $s = AB = 2 + 15 \cdot t - 3 \cdot t^2$; (φ – в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах). Определить: $V_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 2 \text{ с}$.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение по прямой AD относительным, а вращение пластины – переносным. Тогда абсолютная скорость $\bar{V}_{абс}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{абс}$ найдутся по формулам:

$$\bar{V}_{абс} = \bar{V}_{пер} + \bar{V}_{отн}, \quad \bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \quad (1)$$

где, в свою очередь, $\bar{a}_{пер} = \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^n$.

Определим все входящие в равенство (1) величины.

Относительное движение – это движение прямолинейное и происходит по закону

$$s = AB = 2 + 15t - 3t^2, \quad (2)$$

поэтому

$$V_{отн} = \dot{s} = 15 - 6t, \quad a_{отн} = \dot{V}_{отн} = -6.$$

В момент времени $t_1 = 2 \text{ с}$ имеем

$$s_1 = AB_1 = 20 \text{ см}, V_{отн} = 3 \text{ см/с}, a_{отн} = -6 \text{ см/с}^2. \quad (3)$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{V}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s , а вектор $\bar{a}_{отн}$ – в противоположную сторону. Изображаем эти векторы на рис. 113.

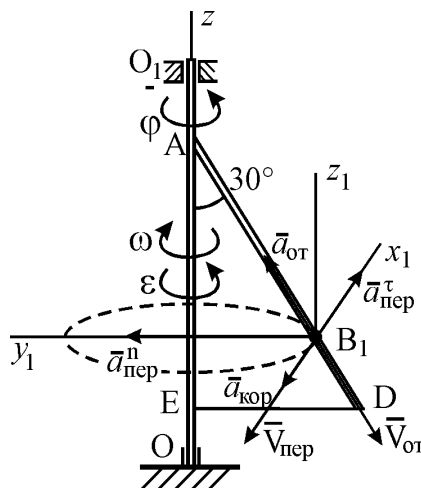


Рис. 1.113.

Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 0,1 \cdot t^3 - 2,2t$.

Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения: $\omega = \dot{\varphi} = 0,3t^2 - 2,2$; $\varepsilon = \dot{\omega} = 0,6t$ и при $t_1 = 2 \text{ с}$,

$$\omega = -1 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = 1,2 \text{ с}^{-2}. \quad (4)$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2 \text{ с}$ направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ , а направление ω ему противоположно; отметим это на рис. 113 соответствующими дуговыми стрелками.

Из рисунка находим расстояние h_1 точки B_1 от оси вращения z : $h_1 = AB_1 \cdot \sin 30^\circ = 10 \text{ см}$. Тогда в момент $t_1 = 2 \text{ с}$, учитывая равенства (4), получаем:

$$V_{\text{пер}} = |\omega| \cdot h_1 = 10 \text{ см/с},$$

$$a_{\text{пер}}^{\tau} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 12 \text{ см/с}^2, \quad a_{\text{пер}}^n = \omega^2 \cdot h_1 = 10 \text{ см/с}^2. \quad (5)$$

Изобразим на рис. 1.133 векторы $\overline{V}_{\text{пер}}$ и $\overline{a}_{\text{пер}}^{\tau}$ (с учетом знаков ω и ε) и $\overline{a}_{\text{пер}}^n$; направлены векторы $\overline{V}_{\text{пер}}$ и $\overline{a}_{\text{пер}}^{\tau}$ перпендикулярно плоскости ADE, а вектор $\overline{a}_{\text{пер}}^n$ – по линии B₁C к оси вращения.

Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\overline{V}_{\text{отн}}$ и осью вращения (вектором $\overline{\omega}$) равен 30°, то численно в момент времени $t_1 = 2 \text{ с}$

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot |V_{\text{отн}}| \cdot |\omega| \cdot \sin 30^\circ = 3 \text{ см/с}^2. \quad (6)$$

Направление $\overline{a}_{\text{кор}}$ найдем по правилу Н. Е. Жуковского. Для этого вектор $\overline{V}_{\text{отн}}$ спроецируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\overline{a}_{\text{пер}}^n$) и затем эту проекцию повернем на 90° в сторону ω , т. е. по ходу часовой стрелки; получим направление вектора $\overline{a}_{\text{кор}}$. Он направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор $\overline{V}_{\text{пер}}$ (см. рис. 1.113).

Определение $V_{\text{абс}}$. Так как $\overline{V}_{\text{абс}} = \overline{V}_{\text{пер}} + \overline{V}_{\text{отн}}$, а векторы $\overline{V}_{\text{пер}}$ и $\overline{V}_{\text{отн}}$ взаимно перпендикулярны, то $V_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{отн}}^2 + V_{\text{пер}}^2}$; в момент времени $t_1 = 2 \text{ с}$ $V_{\text{абс}} = 10,44 \text{ см/с}$.

Определение $a_{\text{абс}}$. По теореме о сложении ускорений

$$\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a}_{\text{отн}} + \overline{a}_{\text{пер}}^{\tau} + \overline{a}_{\text{пер}}^n + \overline{a}_{\text{кор}}. \quad (7)$$

Для определения $a_{\text{абс}}$ проведем координатные оси B₁xуz₁ и вычислим проекции $\overline{a}_{\text{абс}}$ на эти оси.

Учтем при этом, что векторы $\overline{a}_{\text{пер}}^{\tau}$ и $\overline{a}_{\text{кор}}$ лежат на оси x₁, а векторы $\overline{a}_{\text{пер}}^n$ и $\overline{a}_{\text{отн}}$ расположены в плоскости B₁xуz₁, т. е. в плоскости пластины. Тогда, проецируя обе части равенства (7) на оси B₁xуz₁ и учитывая одновременно равенства (3), (5), (6), получаем для момента времени $t_1 = 2 \text{ с}$:

$$a_{\text{абс} \ x} = |a_{\text{пер}}^{\tau}| - a_{\text{кор}} = 9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{абс} \ y} = a_{\text{пер}}^n + |a_{\text{отн}}| \cdot \sin 30^\circ = 13 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{абс} \ z} = |a_{\text{отн}}| \cdot \cos 30^\circ = 5,20 \text{ см/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{\text{абс}}$:

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a_{\text{абс} \ x}^2 + a_{\text{абс} \ y}^2 + a_{\text{абс} \ z}^2} = 16,64 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $V_{\text{абс}} = 10,44 \text{ см/с}$, $a_{\text{абс}} = 16,64 \text{ см/с}^2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под составным(сложным) движением точки?
2. Что называется абсолютным, переносным и относительным движением точки?
3. Сформулируйте, что такое переносная скорость и переносное ускорение точки.
4. В чем заключается теорема об абсолютной скорости точки, совершающей составное движение.
5. Сформулируйте теорему об ускорениях точки в составном движении.
6. Как определить модуль и направление кориолисова ускорения точки?

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Сопротивление материалов – это раздел «Технической механики», в которой излагаются теоретико-экспериментальные основы и методы расчета наиболее распространенных элементов, конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

В сопротивлении материалов пользуются данными смежных дисциплин: физики, математики, теоретической механики, материаловедения и др. В свою очередь сопротивление материалов как наука является опорной базой для целого ряда технических дисциплин.

Любые создаваемые конструкции должны быть не только прочными и надежными, но и недорогими, простыми в изготовлении и обслуживании, с минимальным расходом материалов, труда и энергии.

1.1. Основные положения. Гипотезы и допущения

Механические свойства материалов

Прочность – способность материала не разрушаться под нагрузкой.

Жесткость – способность незначительно деформироваться под нагрузкой.

Устойчивость – способность сохранять первоначальную форму упругого равновесия.

Виды расчетов

Расчет на прочность обеспечивает неразрушение конструкции.

Расчет на жесткость обеспечивает деформации конструкции под нагрузкой в пределах допустимых норм.

Расчет на устойчивость обеспечивает сохранение необходимой формы равновесия и предотвращает внезапное искривление длинных стержней.

Допущения о свойствах материалов

Материалы *однородные* – в любой точке материалы имеют одинаковые физико-механические свойства.

Материалы представляют *сплошную среду* – кристаллическое строение и микроскопические дефекты не учитываются.

Материалы *изотропны* – механические свойства не зависят от направления нагружения.

Материалы обладают *идеальной упругостью* – полностью восстанавливают форму и размеры после снятия нагрузки.

В реальных материалах эти допущения выполняются лишь отчасти, но принятие таких допущений упрощает расчет.

Допущения о характере деформации

Все материалы под нагрузкой деформируются, т.е. меняют форму и размеры. Характер деформации легко отследить при испытании материалов на растяжение.

Для примера представлена диаграмма растяжения малоуглеродистой стали.

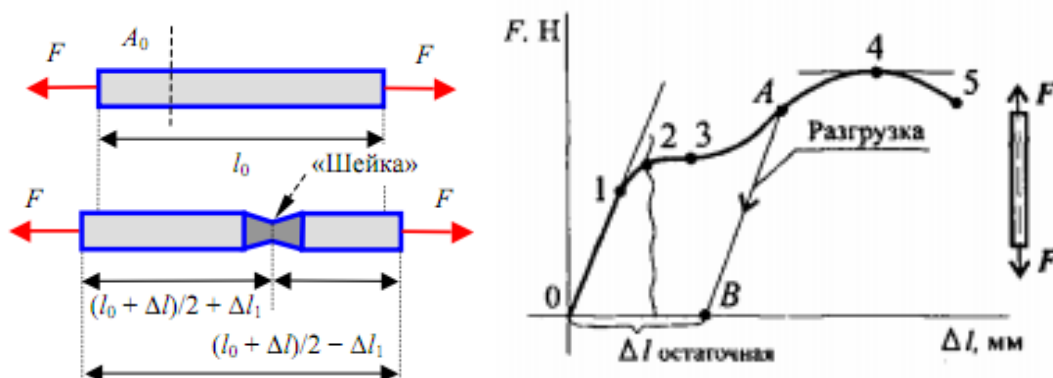


Рис. 2.1. Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

На диаграмме отмечают особые точки:

- от точки 0 до точки 1 – прямая линия (деформация прямо пропорциональна нагрузке);
- от точки 2 до точки 5 деформации быстро нарастают и образец разрушается, разрушению предшествует появление утончения (шейки) в точке 4.

Если прервать испытания до точки 2, образец вернется к исходным размерам; эта область называется *областью упругих деформаций*. Упругие деформации исчезают после снятия нагрузки.

При продолжении испытаний после точки 2 образец уже не возвращается к исходным размерам, деформации начинают накапливаться.

При выключении машины в точке А образец несколько сжимается по линии АВ. Деформации после точки 2 называются *пластическими*, они полностью не исчезают; сохранившиеся деформации называют *остаточными*.

На участке 01 выполняется закон Гука: *в пределах упругости деформации прямо пропорциональны нагрузке*. Считают, что все материалы подчиняются закону Гука.

Поскольку упругие деформации малы по сравнению с геометрическими размерами детали, при расчетах считают, что размеры под нагрузкой не изменяются. Расчеты ведут используя принцип начальных размеров. При работе конструкции деформации должны оставаться упругими.

1.2. Классификация нагрузок

По характеру изменения силы во времени различают нагрузки статические и динамические. *Статические нагрузки* не меняются со временем или меняются очень медленно. При действии статических нагрузок проводится расчет на прочность.

Динамические нагрузки меняют свое значение в короткий промежуток времени, они вызывают большие ускорения и силы инерции и могут привести к внезапному обрушению конструкции.

По способу приложения нагрузки могут быть:

Сосредоточенные силы – силы, действующие на небольших участках поверхности деталей (например, давление колеса на рельсы, давление моста на опору).

Распределённые силы – силы, приложенные к значительным участкам поверхности (например, давление жидкости или газа на стенки сосуда).

Объёмные или массовые силы – силы, приложенные к каждой частице материала (например, силы тяжести или силы инерции).

1.3. Формы элементов конструкции

1. Брус – любое тело, у которого длина значительно больше других размеров. В зависимости от форм продольной оси и поперечных сечений различают несколько видов брусев:

- прямой брус постоянного сечения (рис. 2.2 а)
- прямой ступенчатый брус (рис. 2.2 б)
- криволинейный брус (рис. 2.2 в).

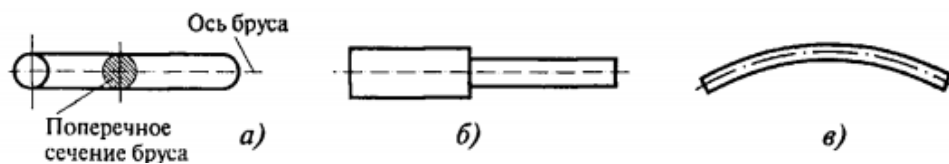


Рис. 2.2.

2. Пластина – любое тело, у которого толщина значительно меньше других размеров (рис. 2.3)



Рис. 2.3.

3. Массив – тело, у которого три размера одного порядка. Это – фундаменты сооружений подпорные стенки, станины станков и т.п.

1.4. Метод сечений

Метод сечений позволяет определить внутренние силы, которые возникают в стержне, находящемся в равновесии под действием внешней нагрузки.

Рассмотрим идеально упругий призматический стержень прямоугольного поперечного сечения (рис. 2.4, а).

Выделим внутри стержня какие-либо две частицы К и L, расположенные на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Для большей наглядности предположим, что между этими частицами имеется некоторая пружинка, удерживающая их на определенном расстоянии друг от друга. Пусть натяжение пружинки равно нулю.

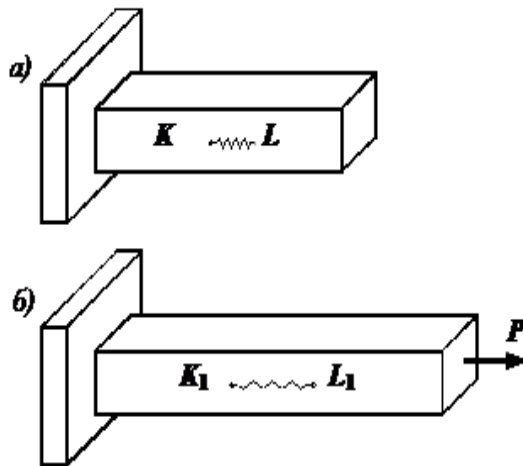


Рис. 2.4.

Приложим теперь к стержню растягивающую силу P (рис. 2.4, б). Пусть в результате деформации стержня, частица К перейдет в положение K_1 , а частица L – в положение L_1 . Соединяющая эти частицы пружинка при этом растянется. После снятия внешней нагрузки частицы вернуться в первоначальное положение К и L благодаря усилию, которое возникло в пружинке. Сила, которая возникла между частицами (в пружинке) в результате деформации идеально упругого стержня, называется силой упругости или внутренней силой. Она может быть найдена методом сечений.

Если тело находится в равновесии, то и каждая его часть находится в равновесии под действием внешних и внутренних сил. Внутренние силы находятся из уравнения равновесия, составленных для рассматриваемой части тела.

Рассекаем тело поперек плоскостью (рис. 2.5, а). Рассматриваем правую часть. На нее действуют внешние силы F_4, F_5, F_6 и внутренние силы упругости q_k , распределенные по сечению. Систему распределенных сил можно заменить главным вектором R_0 (рис. 2.5 б), помещенным в центр тяжести сечения, и суммарным моментом сил M_0 : $R_0 =$

$$\sum_0^n q_k; M_0 = \sum_0^n m_k.$$

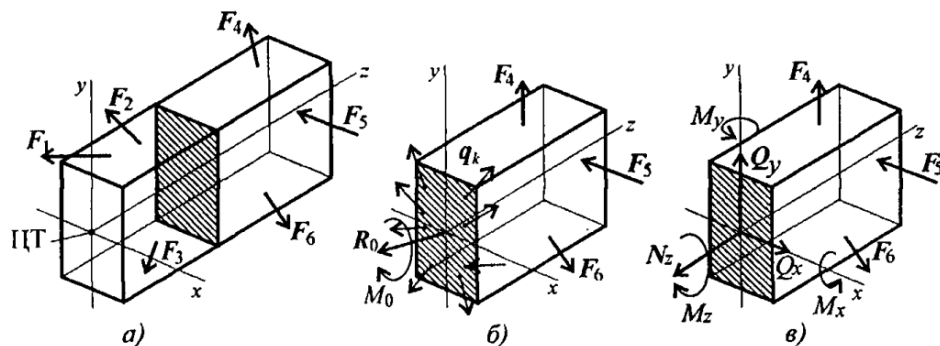


Рис. 2.5.

Разложив главный вектор R_0 по осям, получим три составляющие:

$$R_0 = N_z + Q_x + Q_y;$$

где N_z - продольная сила;

Q_x - поперечная сила по оси x ;

Q_y - продольная сила по оси y .

Главный момент тоже принято представлять в виде моментов пар сил в трех плоскостях проекции:

$$M_0 = M_x + M_y + M_z;$$

где M_x - момент сил относительно оси x , M_y - момент относительно оси y , M_z - момент относительно оси z .

Полученные составляющие сил упругости носят название *внутренних силовых факторов*. Каждый из внутренних силовых факторов вызывает определенную деформацию детали. Внутренние силовые факторы уравнивают приложенные к этому элементу детали внешние силы. Используя шесть уравнений равновесия можно получить величину внутренних силовых факторов:

$$\begin{aligned} N_z &= \sum_0^n F_{kz}; & M_z &= \sum_0^n m_z(F_k); \\ Q_x &= \sum_0^n F_{kx}; & M_x &= \sum_0^n m_x(F_k); \\ Q_y &= \sum_0^n F_{ky}; & M_y &= \sum_0^n m_y(F_k). \end{aligned}$$

Из приведенных уравнений следует, что:

N_z - *продольная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось Oz внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса; вызывает растяжение или сжатие;

Q_x - *поперечная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось Ox внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса; вызывает сдвиг сечения;

Q_y - *поперечная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось Oy внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса; вызывает сдвиг сечения;

M_z - *крутящий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно продольной оси Oz , вызывает скручивание бруса;

M_x - *изгибающий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси Ox ;

M_y - *изгибающий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси Oy ;

Моменты M_x и M_y вызывают изгиб бруса в соответствующей плоскости.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключаются задачи курса «Сопротивление материалов»?
2. Что называется прочностью, жесткостью и устойчивостью?
3. По какому принципу классифицируют нагрузки?
4. Какое тело называют брусом?
5. Что называется деформацией? Какие деформации называют упругими? Какие деформации называют остаточными?

6. При каких деформациях выполняется закон Гука? Сформулируйте закон Гука.
7. Какие бывают формы элементов конструкций?
8. Для чего применяют метод сечений? Что такое внутренние силовые факторы? Дайте определения каждого внутреннего силового фактора?

2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ СЖАТИИ И РАСТЯЖЕНИИ

2.1. Основные понятия

Центральным *растяжением* (*сжатием*) называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только продольная сила (растягивающая или сжимающая), а все остальные внутренние усилия равны нулю.

Растягивающие продольные силы принято считать положительными, а сжимающие – отрицательными.

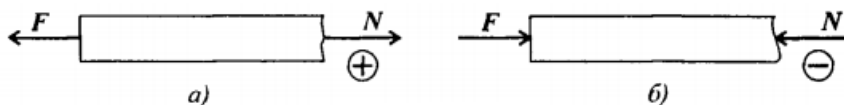


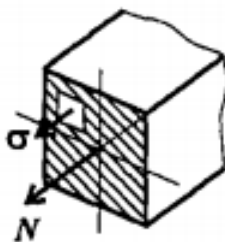
Рис. 2.6.

Центральное растяжение (сжатие) вызывается действием сил или систем сил, равнодействующая которых совпадает с осью бруса (при растяжении его называют стержнем).

Определяются продольные силы с использованием метода сечений.

График, показывающий изменения продольных сил по длине стержня, называется *эпюрой продольных сил*.

При растяжении и сжатии в сечении действует только нормальное напряжение. Напряжения в поперечных сечениях могут рассматриваться как силы, приходящиеся на единицу площади.



Таким образом, *направление и знак напряжения в сечении совпадают с направлением и знаком силы в сечении*.

Исходя из гипотезы плоских сечений, можно предположить, что напряжения при растяжении и сжатии в пределах каждого сечения не меняются. Поэтому напряжение можно рассчитать по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N – продольная сила в сечении, A – площадь поперечного сечения.

Величина напряжения прямо пропорциональна продольной силе и обратно пропорциональна площади поперечного сечения.

Размерность (единица измерения) напряжений – Н/м^2 (Па), практически напряжения рассчитывают Н/мм^2 (МПа): $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2$.

При определении напряжений брус разбивают на участки нагружений, в пределах которых продольные силы не изменяются, и учитывают места изменений площади поперечных сечений.

Рассчитывают напряжения по сечениям, и расчет оформляют в виде *эпюры нормальных напряжений*.

Рассмотрим приемы определения этих продольных сил и построение эпюры N для конкретного бруса (рис. 2.7).

Для определения продольной силы разделим брус на участки. Границы участков определяются местами приложения внешних нагрузок (участки нагружения) и не зависят от размеров поперечного сечения. В нашем примере таких участков два (AB и BC).

На участке AB ($0 \leq x \leq 1,4$ м) проводим произвольное сечение I-I на расстоянии x от нижнего конца бруса. Усилие N_1 в произвольном сечении можно определить из условия равновесия как верхней, так и нижней частей бруса. При рассмотрении верхней части необходимо определить величину опорной реакции в верхней жесткой заделке. Чтобы этого не выполнять, будем определять продольную силу N_1 , рассматривая равновесие нижней части. Действие верхней части на нижнюю заменим усилием N_1 положительного направления.

Из $\sum x=0$ получим: $-100-20x+N_1=0$, отсюда $N_1=100+20x$, при $x=0$ $N_1=100$ кН, $x=1,4$ м $N_1=128$ кН. Эти значения и откладываем на эпюре продольных сил.

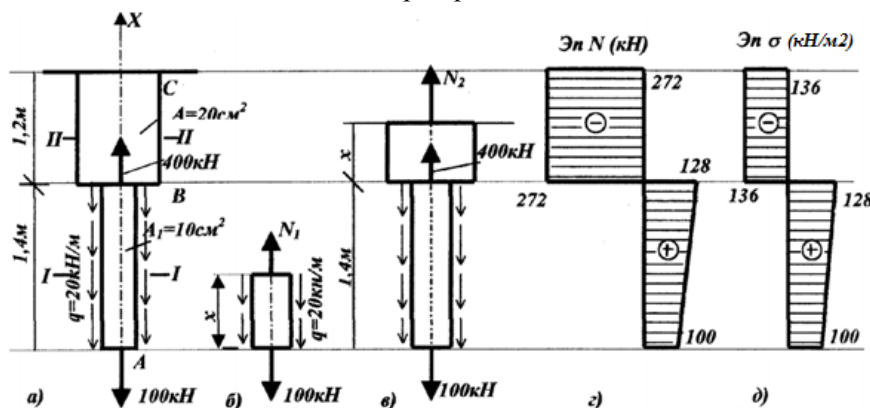


Рис. 2.7.

На участке BC также проводим произвольное сечение на расстоянии x от начала второго участка. Отбрасывая верхнюю часть бруса и заменяя действие ее на нижнюю продольной силой N_2 положительного направления, из условия равновесия нижней части имеем:

$\sum x=0$; $N_2+400-100-20 \cdot 1,4=0$, отсюда $N_2=-272$ кН, т.е. продольная сила – сжимающая и постоянная на этом участке. Полученное значение откладываем на эпюре N (рис. 2.7, г).

Определяем нормальные напряжения. Сопоставляя участки нагружения с границами изменения площади, видим, что образуется тоже два участка напряжений (AB и BC).

На первом участке $\sigma = \frac{N_1}{A_1}$:

$$\text{При } x=0 \quad \sigma = \frac{100}{10} = 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 100 \text{ МПа},$$

$$\text{При } x=1,4 \text{ м} \quad \sigma = \frac{128}{10} = 12,8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 128 \text{ МПа}.$$

На втором участке $\sigma = \frac{N_2}{A_2}$:

$$\text{При } x=0 \quad \sigma = -\frac{272}{20} = -13,6 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -136 \text{ МПа},$$

$$\text{При } x=1,2 \text{ м} \quad \sigma = -\frac{272}{20} = -13,6 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -136 \text{ МПа}.$$

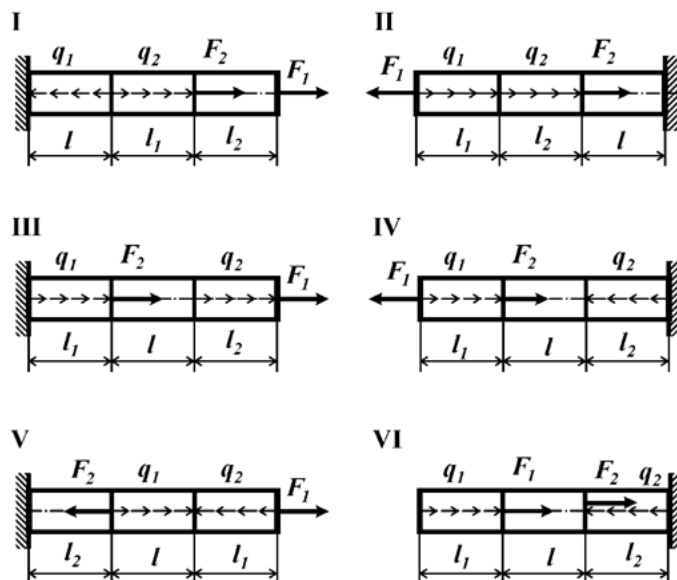
Полученные значения напряжений откладываем на эпюре σ (рис. 2.7, д).

Вопросы для самоконтроля

1. Какие внутренние силовые факторы возникают в сечении бруса при растяжении и сжатии?
2. Как распределяются по сечению силы упругости при растяжении и сжатии?
3. Какого характера напряжения возникают в поперечном сечении при растяжении и сжатии: нормальные и касательные?
4. Как распределены напряжения по сечению при растяжении и сжатии?
5. Запишите формулу для расчета нормальных напряжений при растяжении и сжатии.
6. Как назначаются знаки продольной силы и нормального напряжения?

7. Что показывает эпюра продольной силы?
8. Как изменится величина напряжения, если площадь поперечного сечения возрастет в 4 раза?
9. В каких единицах измеряется напряжение?

Задание. Консольный стержень нагружен равномерно распределенными нагрузками интенсивностью $q_1 = 10 \text{ кН/м}$ и $q_2 = 5 \text{ кН/м}$ и сосредоточенными силами $F_1 = 15 \text{ кН}$ и $F_2 = 20 \text{ кН}$, $l = 2 \text{ м}$, $l_1 = 3 \text{ м}$, $l_2 = 4 \text{ м}$. Площадь поперечного сечения считать постоянным по длине стержня $A = 20 \text{ см}^2$. Построить эпюру нормальной силы и напряжений.



2.2. Продольные и поперечные деформации. Закон Гука

Деформации при растяжении и сжатии

Рассмотрим однородный стержень с одним концом, жёстко заделанным, и другим – свободным, к которому приложена центральная продольная сила F (рис. 2.8).

До нагружения стержня его длина равнялась l , после нагружения она стала равной $l + \Delta l$ (см. рис. 2.8). Величину Δl называют абсолютной деформацией стержня.

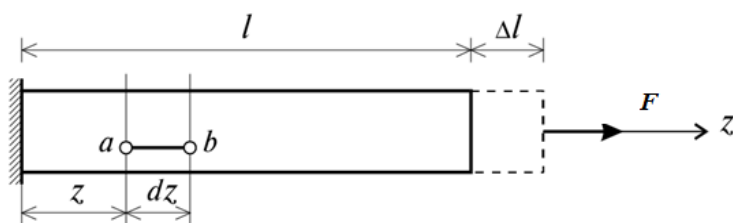


Рис. 2.8.

Отношение абсолютной деформации Δl к первоначальной длине образца l называют относительной деформацией: $\epsilon = \Delta l / l$.

Если же по длине стержня возникает неоднородное напряженное состояние, то для определения его абсолютного удлинения необходимо рассмотреть бесконечно малый элемент длиной dz (см. рис. 2.8). При растяжении он увеличит свою длину на величину dz и его деформация составит $\epsilon = \Delta dz / dz$.

В пределах малых деформаций при простом растяжении или сжатии закон Гука записывается в следующем виде:

механическое напряжение прямо пропорционально модулю относительной деформации: $\sigma = E \cdot \epsilon$.

Коэффициент пропорциональности E в законе Гука называется модулем продольной упругости (модулем Юнга). Физический смысл: модуль Юнга численно равен такому нормальному

напряжению, которое должно было бы возникнуть в теле при увеличении его длины в 2 раза (если бы для такой большой деформации выполнялся закон Гука). В СИ модуль Юнга выражают в паскалях (1 Па = 1 Н/м²).

В пределах упругих деформаций деформации прямо пропорциональны нагрузке:

$$F = k \cdot \Delta l,$$

где F – действующая нагрузка, k – коэффициент.

В современной форме напряжения и деформации:

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

Получим зависимость $\sigma = E\varepsilon$, где E – модуль упругости, характеризует жесткость материала.

В пределах упругости нормальные напряжения пропорциональны относительному удлинению

Значение E для сталей в пределах (2÷2,1) 10^5 МПа.

Формулы для расчета перемещений поперечных сечений бруса при растяжении и сжатии:

Закон Гука $\sigma = E\varepsilon$, откуда $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$. Относительное удлинение $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$.

В результате получим зависимость между нагрузкой, размерами бруса и возникающей деформацией:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}; \quad \sigma = \frac{N}{A};$$

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E} \quad \text{или} \quad \Delta l = \frac{Nl}{AE};$$

где Δl – абсолютное удлинение, мм;

σ – нормальное напряжение, МПа;

l – начальная длина, мм;

E – модуль упругости материала, МПа;

N – продольная сила, Н;

A – площадь поперечного сечения, мм²;

Произведение EA называют *жесткостью сечения*.

Таким образом:

1. Абсолютное удлинение бруса прямо пропорционально величине продольной силы в сечении, длине бруса и обратно пропорционально площади поперечного сечения и модулю упругости

2. Связь между продольной и поперечной деформациями зависит от свойств материала, связь определяется *коэффициентом Пуассона*, называемым *коэффициентом поперечной деформации*.

Коэффициент Пуассона: у стали μ от 0,25 до 0,3; у пробки $\mu=0$, у резины $\mu=0,5$.

3. Поперечные деформации меньше продольных и редко влияют на работоспособность детали ; при необходимости поперечная деформация рассчитывается через продольную.

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{\Delta a}{a_0}; \quad \text{откуда} \quad \Delta a = \varepsilon' a_0,$$

где Δa – поперечное сужение, мм; a_0 – начальный поперечный размер, мм.

4. Закон Гука выполняется в зоне упругих деформаций, которая определяется при испытаниях на растяжение по диаграмме растяжения (рис. 2.1).

При работе пластические деформации не должны возникать, упругие деформации малы по сравнению с геометрическими размерами тела. Основные расчеты в сопротивлении материалов проводятся в зоне упругих деформаций, где действует закон Гука.

Пример. Дана схема нагружения и размеры бруса до деформации(рис.2.9). Брус защемлен, определить перемещение свободного конца.

Решение:

1. Брус ступенчатый, поэтому следует построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

Делим брус на участки нагружения, определяем продольные силы, строим эпюру продольных сил.

2. Определяем величины нормальных напряжений по сечениям с учетом изменений площади поперечного сечения.

Строим эпюру нормальных напряжений.

3. На каждом участке определяем абсолютное удлинение. Результаты алгебраически суммируем.

Балка защемлена, в заделке возникает неизвестная реакция в опоре, поэтому расчет начинаем со свободного конца (справа).

1. Два участка нагружения:

Участок 1: $N_1 = 25 \text{ кН}$; **растянут**;

Участок 2: $25 - 60 + N_2 = 0$; $N_2 = -35 \text{ кН}$, **сжат**.

2. Три участка по напряжениям

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_1 = \frac{25 \cdot 10^3}{500} = 50 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_1}{A_2}; \quad \sigma_2 = \frac{25 \cdot 10^3}{1000} = 25 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2}; \quad \sigma_3 = \frac{-35 \cdot 10^3}{1000} = -35 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}.$$

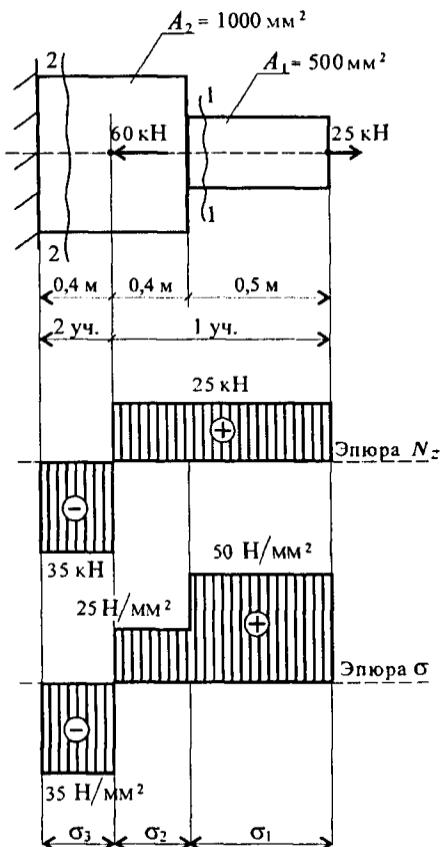


Рис. 2.9.

3. Удлинения участков (материал - сталь $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$):

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 \cdot l_1}{E} = \frac{50 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 0,125 \text{ мм}$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 \cdot l_2}{E} = \frac{25 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 0,05 \text{ мм}$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 \cdot l_3}{E} = \frac{-35 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = -0,07 \text{ мм}$$

4. Суммарное удлинение бруса(перемещение свободного конца).

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 \\ &= 0,125 + 0,05 - 0,07 = 0,105 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Стальной стержень длиной 1,5 м вытянулся под нагрузкой на 3 мм. Чему равно относительное удлинение? Чему равно относительное сужение? ($\mu=0,25$).
2. Что характеризует коэффициент поперечной деформации?
3. Что характеризует модуль упругости материала? Какова единица измерения модули упругости материала?
4. Запишите формулы для определения удлинения бруса. Что характеризует произведение EA и как оно называется?

Задание.

Для стального стержня круглого поперечного сечения диаметром D требуется:

- 1) построить эпюру продольной силы;
- 2) построить эпюру перемещений.

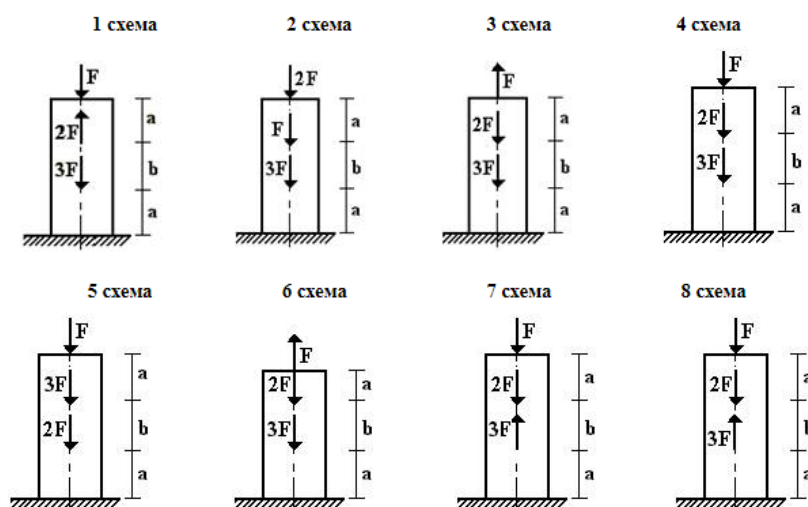


Схема	D , м	a , м	b , м	F , кН
1	0,01	1	1,1	12
2	0,02	2	1,2	10
3	0,03	3	1,3	12
4	0,04	3	1,4	6
5	0,05	2	1,5	8
6	0,06	1	1,6	10
7	0,07	2	1,7	6
8	0,08	3	1,8	8

2.3. Механические характеристики материала. Предельные и допускаемые напряжения

На рис.2.10 представлена диаграмма растяжения стали.

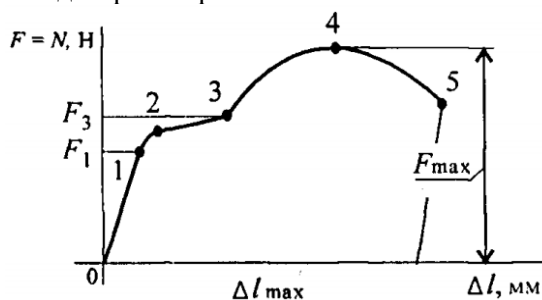


Рис. 2.10

Особые точки диаграммы растяжения обозначены точками 1,2,3,4,5:

1) точка 1 соответствует пределу пропорциональности: после нее прямая линия (прямая пропорциональность) заканчивается и переходит в кривую;

Участок 01 – удлинение Δl растет пропорционально нагрузке; подтверждается закон Гука;

2) точка 2 соответствует пределу упругости материала: материал теряет упругие свойства – способность вернуться к исходным размерам;

3) точка 3 является концом участка, на котором образец сильно деформируется без увеличения нагрузки. Это явление называют текучестью; текучесть – удлинение при постоянной нагрузке;

4) точка 4 соответствует максимальной нагрузке, в этот момент на образце появляется «шейка» - резкое уменьшение площади поперечного сечения. Напряжение в этой точке называют временным сопротивлением разрыву, или условным пределом прочности. Зона 3-4 называется зоной упрочнения.

Механические характеристики

При построении приведенной диаграммы рассчитываются величины, имеющие условный характер, усилия в каждой из точек делят на величину начальной площади поперечного сечения, хотя в каждый момент идет деформация и площадь образца уменьшается. Приведенная диаграмма растяжения не зависит от абсолютных размеров образца (рис. 2.11).

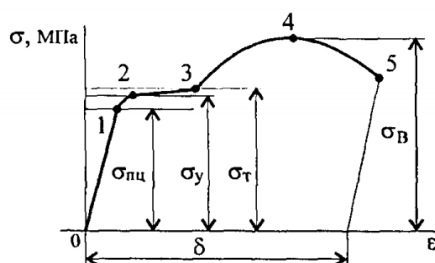


Рис. 2.11

Основные характеристики прочности:

- предел пропорциональности $\sigma_{пц} = \frac{F_1}{A_0}$;

- предел упругости $\sigma_y = \frac{F_2}{A_0}$;

- предел текучести $\sigma_t = \frac{F_3}{A_0}$;

- предел прочности, или временное сопротивление разрыву, $\sigma_B = \frac{F_{max}}{A_0}$, $A_0 = (\pi d_0^2)/4$ -

начальная площадь сечения.

Характеристика пластичности материала

δ - максимальное удлинение в момент разрыва

$$\delta = \frac{\Delta l_{max}}{l_0} \cdot 100\%,$$

где Δl_{max} - максимальное остаточное удлинение(рис. 2.11)

ψ - максимальное сужение при разрыве

$$\psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} \cdot 100\%,$$

где $A_{ш}$ – площадь образца в месте разрыва.

Характеристики пластичности определяют способность материала к деформированию, чем выше значения δ и ψ , тем материал пластичнее.

Виды диаграмм растяжения

Различные материалы по-разному ведут себя под нагрузкой, характер деформаций и разрушения зависит от типа материалов.

Принято делить материалы по типу их диаграмм растяжения на три группы. К первой группе относят *пластичные материалы*, эти материалы имеют на диаграмме растяжения *площадку текучести* (диаграмму первого типа, рис. 2.12, а). Ко второй группе относятся *хрупкие материалы*, эти материалы *мало деформируются*, разрушаются по хрупкому типу. На диаграмме нет площадки текучести (рис. 2.12, б).

К третьей группе *относят материалы, не имеющие площадки текучести*, но значительно деформирующиеся под нагрузкой, их называют *пластично-хрупкими* (рис. в).

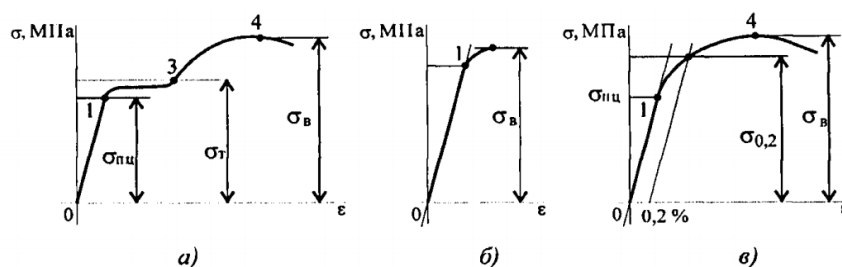


Рис. 2.12.

Таким образом, хрупкий и пластично-хрупкий материалы не имеют площадки текучести. Пластично-хрупкие материалы значительно деформируются, этого нельзя допустить в работающей конструкции. Поэтому их деформацию ограничивают. Максимально-возможная деформация $\varepsilon = 0,2\%$. По величине максимально возможной деформации определяется соответствующее нормальное напряжение $\sigma_{0,2}$, за которое принимают за предельное.

2.4. Предельные и допустимые напряжения

Предельным напряжением считают напряжение, при котором в материале возникает опасное состояние (разрушение или опасная деформация).

Для *пластичных* материалов предельным напряжением считают предел текучести, т.к. возникающие пластические деформации не исчезают после снятия нагрузки:

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}}.$$

Для *хрупких* материалов, где пластические деформации отсутствуют, а разрушение возникает по хрупкому типу (шейки не образуется), за предельное напряжение принимают *предел текучести*:

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{в}}.$$

Для *пластично-хрупких* материалов предельным напряжением считают напряжение, соответствующее максимальной деформации 0,2 %:

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{0,2}.$$

Допускаемое напряжение – максимальное напряжение, при котором материал должен нормально работать. Допускаемые напряжения получают по предельным напряжениям с учетом запаса прочности:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]},$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение, n – коэффициент запаса прочности, $[n]$ – допускаемый коэффициент запаса прочности.

Допускаемый коэффициент запаса прочности зависит от качества материала, условий работы детали, назначения детали, расчета и т.д. Он может колебаться от 1,25 для простых деталей до 12,5 для сложных деталей, работающих в условиях удара и вибраций.

Особенности поведения материалов при испытаниях на сжатие

1. Пластичные материалы практически одинаково работают при растяжении и сжатии. Механические характеристики при растяжении и сжатии одинаковы.

2. Хрупкие материалы обычно обладают большей прочностью при сжатии, чем при растяжении: $\sigma_{\text{вр}} < \sigma_{\text{вс}}$.

Если допускаемое напряжение при растяжении и сжатии различно, их обозначают $[\sigma_p]$ – растяжение, $[\sigma_c]$ – сжатие.

Расчеты на прочность по условиям прочности:

$$\sigma \leq [\sigma], \quad \text{где } \sigma = \frac{N}{A}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}.$$

Пример. Прямой брус растянут силой 150 кН, материал – сталь $\sigma_{\text{т}} = 570$ МПа, $\sigma_{\text{в}} = 720$ МПа, запас прочности $[n] = 1,5$. Определить размеры поперечного сечения бруса.

Решение. 1. Условие прочности $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$.

2. Требуемая площадь поперечного сечения определяется соотношением $A \geq \frac{N}{[\sigma]}$.

3. Допускаемое напряжение для материала рассчитывается из заданных механических характеристик.

Наличие предела текучести означает, что материал – пластичный.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{[n]}, \quad [\sigma] = \frac{570}{1,5} = 380 \text{ МПа}.$$

4. Определим величину требуемой площади поперечного сечения бруса и подбираем размеры для двух случаев.

а) $A \geq \frac{150 \cdot 10^3}{380} = 394,7 \text{ мм}^2.$

Сечение – круг, определим диаметр.

$$A = \pi r^2, \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}; \quad r = \sqrt{\frac{394,7}{3,14}} = 11,2 \text{ мм}.$$

Полученную величину округляем большую сторону $d=2r=25$ мм, $A=4,91 \text{ см}^2$.

б) Сечение равнополочный уголок № 5 по ГОСТ 8509-86.

Ближайшая площадь поперечного сечения уголка – $A=4,29 \text{ см}^2$.

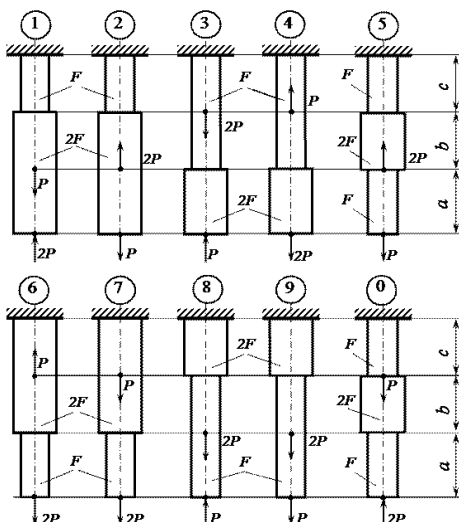
Вопросы для самоконтроля

1. Для чего необходимо знать механические характеристики материала?
2. Какие характерные точки имеет диаграмма растяжения стали?
3. Что называется пределом пропорциональности, пределом упругости, пределом текучести и пределом прочности?
4. Какое явление называют текучестью?
5. Что такое «шейка», в какой точке диаграммы растяжения она образуется?
6. Почему полученные при испытаниях механические характеристики носят условный характер?
7. В чем различия между упругими и пластичными деформациями?
8. Перечислите характеристики прочности?
9. Перечислите характеристики пластичности?
10. Чем отличается абсолютная продольная и относительная продольная деформации?
11. Какова размерность относительной деформации?
12. Назовите все характеристики прочности материала. Сколько их?
13. Какие материалы считаются хрупкими? Какие из механических характеристик выступают в качестве порогового критерия?

14. Что называется модулем продольной упругости E ? Как сказывается величина E на деформации бруса?
15. Как формулируется закон Гука?

Задание.

Стальной стержень (модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^4$ кН/см²) находится под действием внешних осевых сил P и $2P$. Построить эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ . Оценить прочность стержня, если предельное напряжение (предел текучести) $\sigma_{\text{ж}} = 24$ кН/см², а допускаемый коэффициент запаса $[n] = 1,5$. Найти удлинение стержня Δl .



Номер схемы	F, см ²	a, м	b, м	c, м	P, кН
1	2	2	1	3	11
2	2,2	2	1	3	12
3	2,4	2	1	3	13
4	2,6	2	1	3	14
5	3	2	1	3	15
6	3,2	2	1	3	16
7	3,4	2	1	3	17
8	3,6	2	1	3	18
9	3,8	2	1	3	19
0	4	2	1	3	20

3. СДВИГ (СРЕЗ). СМЯТИЕ

3.1. Деформации при сдвиге. Расчет конструкций на сдвиг(срез)

Если на брус действуют две равные силы P , весьма близко расположенные друг к другу, перпендикулярные оси бруса и направленные в противоположные стороны, то при достаточной величине сил происходит срез (рис. 2.13). При сдвиге (срезе) возникает только один силовой фактор – поперечная сила.

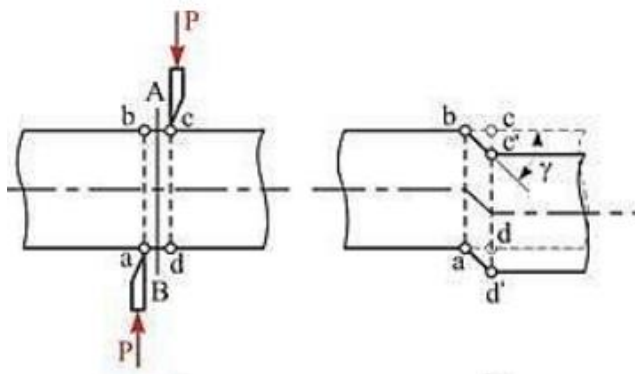


Рис.2.13. Срез бруса под действием двух сил:
а) – сдвиг до среза, б) – сдвиг во время среза

Правая часть тела отделяется от левой по некоторому сечению АВ (рис. 2.13, а). Деформация, предшествующая срезу, которая заключается в перекашивании прямых углов

элементарного параллелепипеда, называется *сдвигом*. Сдвиг происходит в параллелепипеде, т.е. когда прямоугольник $abcd$ превращается в параллелограмм $abc'd'$.

Величина cc' , на которую сечение cd сдвинулось относительно соседнего сечения ab , называется абсолютным сдвигом (рис. 2.13, б). Угол γ , на который изменяются прямые углы параллелепипеда, называется *относительным сдвигом*.

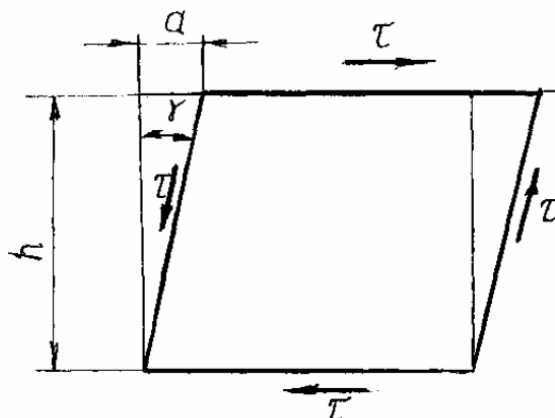


Рис. 2.14. Схема сдвига: α – абсолютный сдвиг, γ – относительный сдвиг ($\tan \alpha \approx \gamma = \frac{\alpha}{h}$)

При расчёте ряда элементов конструкций встречается частный случай плоского напряженного состояния, когда на четырёх гранях прямоугольного элемента действуют только касательные напряжения, и он превращается в ромб (рис. 2.14). Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*. Закон Гука при сдвиге: $\tau = \gamma G$, где $G = E / [2(1 + \mu)] \approx 0,4E$ – модуль сдвига, или модуль упругости (способность материала сопротивляться деформациям при сдвиге; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона (для металлов $\mu = 0,25 - 0,42$)).

Расчет конструкций на сдвиг

Многие детали (склеенные, сварные, ...) подвержены сдвигу под действием растягивающих сил F (рис. 2.15).

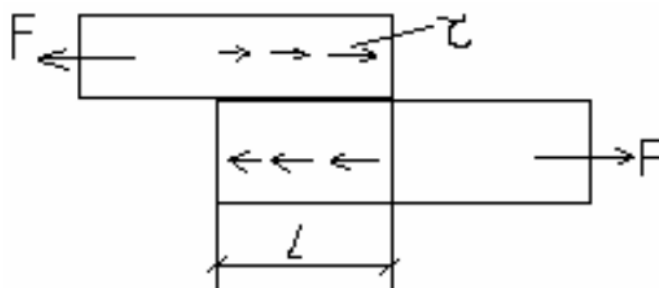


Рис. 2.15

Условие прочности заданного соединения $\tau = F/\delta l \leq [\tau]$, где δ – толщина детали; l – длина контактной площади; $[\tau]$ – допускаемое напряжение на срез: $[\tau] = (0,5 \dots 0,6) [\sigma_p]$ для пластичных материалов; $[\tau] = (0,7 \dots 1,0) [\sigma_p]$ для хрупких материалов.

3.2. Смятие. Условие прочности при смятии

Довольно часто одновременно со сдвигом происходит смятие боковой поверхности в месте контакта в результате передачи нагрузки от одной поверхности к другой. При этом на поверхности возникают сжимающие напряжения, называемые напряжениями смятия $\sigma_{см}$.

Условие прочности при смятии можно выразить соотношением

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \leq [\sigma_{см}];$$

$A_{см} = d\delta$, - расчетная площадь смятия, где d - диаметр окружности сечения; δ - наименьшая высота соединяемых пластин; $[\sigma_{см}]$ - допускаемое напряжение смятия $[\sigma_{см}] = (0,35 \div 0,4)\sigma_T$; F - сила взаимодействия между деталями.

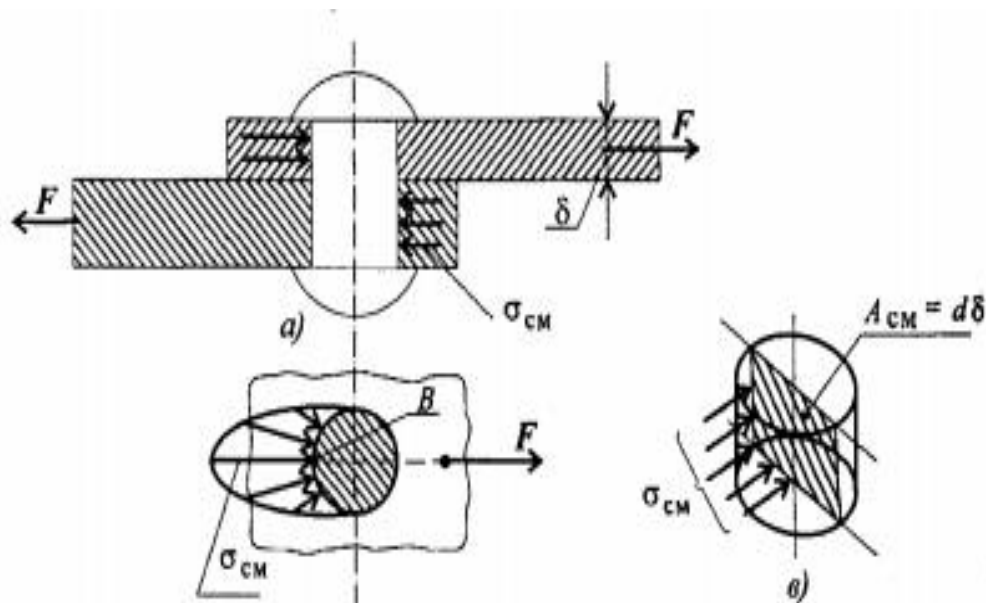


Рис. 2.16

3.3. Практические расчеты на срез и смятие

Пример. Проверить прочность заклепочного соединения на срез и смятие (рис. 2.16). Нагрузка на соединение 60 кН, $[\tau] = 100$ МПа, $[\sigma_{см}] = 240$ МПа.

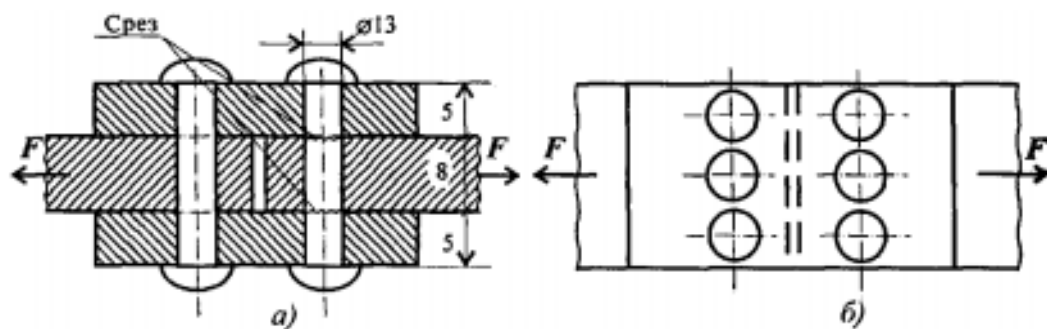


Рис. 2.16

Решение.

1. Соединение двухсрезными заклепками последовательно воспринимается тремя заклепками в левом ряду, а затем тремя заклепками в правом ряду.

Площадь сдвига каждой заклепки $A_c = 2\pi r^2$.

Площадь смятия боковой поверхности $A_{см} = d\delta_{min}$.

2. Проверим прочность соединения на сдвиг (срез).

$Q = \frac{F}{z}$ - поперечная сила в поперечном сечении заклепки,

z - количество заклепок.

$$\tau = \frac{F}{zA_c}; \quad \tau = \frac{60 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 6,5^2} = 75,4 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа}.$$

Прочность на сдвиг обеспечена.

3. Проверим прочность соединения на смятие.

$$\sigma_{см} = \frac{F}{zA_{см}} = \frac{60 \cdot 10^3}{3 \cdot 13 \cdot 8} = 192,3 \text{ МПа} < 240 \text{ МПа}.$$

Пример. Проверить прочность сварного соединения угловыми швами с накладкой. Действующая нагрузка 60 кН, допускаемое напряжение металла шва на сдвиг 80 МПа.

Решение.

1. Нагрузка передается последовательно через два шва слева, а далее – два шва справа (рис. 2.17). Разрушение угловых швов происходит по площадкам, расположенным под углом 45° к поверхности соединяемых листов.

2. Проверим прочность сварного соединения на срез.

Двусторонний угловой шов можно рассчитать по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A_c} \leq [\tau_c],$$

где $Q = F$; $A_c = 2 \cdot 0,7 K \cdot b$, A_c - расчетная площадь среза шва; K – катет шва, равен толщине накладки; b - длина шва.

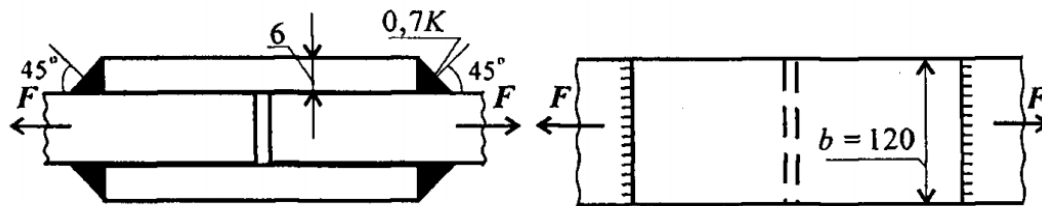


Рис. 2.17

Следовательно,

$$\tau = \frac{60 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,7 \cdot 6 \cdot 120} = 59,5 \text{ МПа},$$

$59,5 \text{ МПа} < 80 \text{ МПа}$. Расчетное напряжение меньше допустимого, прочность обеспечена.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие внутренние силовые факторы возникают при сдвиге и смятии?
2. Запишите закон Гука при сдвиге.
3. Какой физический смысл у модуля упругости?
4. Укажите единицы измерения напряжений сдвига и смятия и модуля упругости.
5. Запишите условия прочности при сдвиге и смятии.
6. Чем отличается расчет на прочность при сдвиге односрезной заклепки от двухсрезной?

IV. ИЗГИБ. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

4.1. Основные определения

Изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникает два внутренних силовых факторов – *изгибающий момент* и *поперечная сила*.

Брус, работающий на изгиб, называют *балкой*. Балка может быть нагружена сосредоточенными силами и распределенными нагрузками. Если распределенная на некоторой площади нагрузка имеет постоянную интенсивность, то она называется равномерно-распределенной. При расчете балок равномерно-распределенную нагрузку удобно приводить к сосредоточенной: $Q=ql$.

На рис. 2.18 изображен брус, закрепленный справа (защемление), нагруженный внешними силами: равномерно-распределенной нагрузкой и моментом.

Плоскость, в которой расположены внешние силы и моменты, называют *силовой плоскостью*.

Если все силы лежат в одной плоскости, изгиб называют *плоским*.

Плоскость, проходящая через продольную ось бруса и одну из главных центральных осей его поперечного сечения, называется *главной плоскостью бруса*.

Если силовая плоскость совпадает с главной плоскостью бруса, изгиб называют *прямым*.

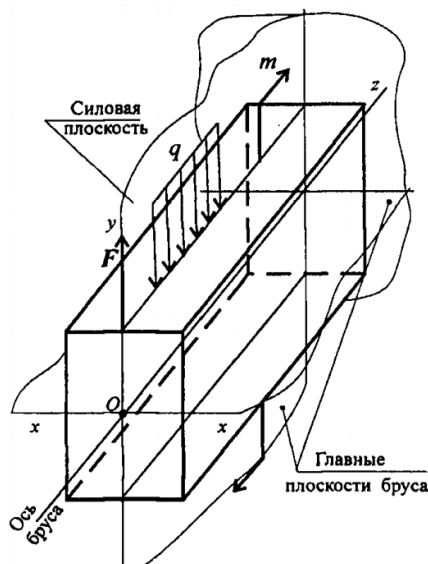


Рис.2.18

Если силовая плоскость не проходит через главную плоскость бруса, изгиб называют *косым изгибом*.

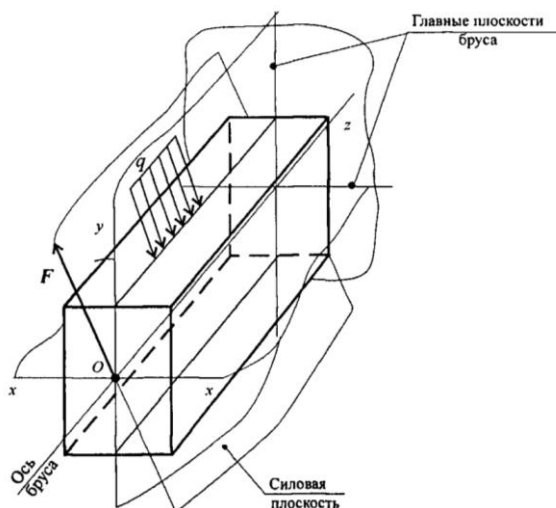


Рис. 2.19

4.2. Опоры балок и опорные реакции

При расчете балок различают три основных вида опор:

– *шарнирно подвижная опора* (рис. 2.20, а, б) представляет собой такое устройство, при котором конец балки может свободно перемещаться параллельно плоскости катания опоры; может поворачиваться, но не может перемещаться перпендикулярно к плоскости катания. Соответственно этому на подвижной опоре может возникнуть только опорная реакция, перпендикулярная к плоскости перемещения опоры;

– *шарнирно неподвижная опора* (рис. 2.20, в, г) представляет собой такое закрепление конца, при котором он может только поворачиваться, но не может перемещаться ни параллельно, ни перпендикулярно к оси балки. Следовательно, в шарнирно-неподвижной опоре может возникнуть опорная реакция в двух направлениях. Ее удобно представлять в виде двух составляющих – горизонтально направленной к оси балки (горизонтальная составляющая H) и перпендикулярно (вертикальная составляющая V);

– *жесткая заделка или заземляющая неподвижная опора* – такой вид закрепления, при котором конец балки лишен всех перемещений. Следовательно, в заделке могут возникнуть: вертикальная составляющая реакция V , горизонтальная составляющая реакция H и реактивный момент M .

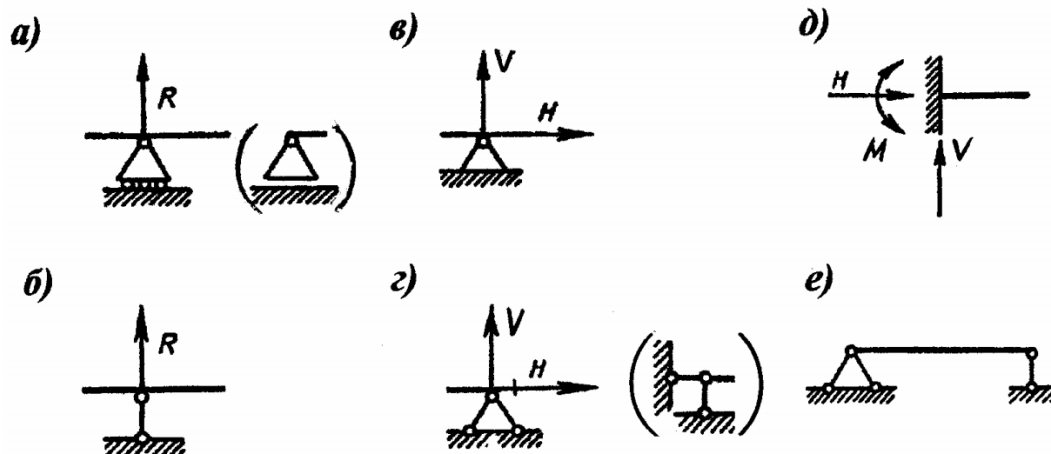


Рис. 2.20.

Опорные реакции определяются с использованием уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

4.3. Внутренние силовые факторы при изгибе

После определения опорных реакций, используя метод сечений, можно определить внутренние усилия: изгибающий момент M и поперечную силу Q . Внутренние усилия являются одним из факторов, определяющих появляющиеся в строительном элементе напряжения, а следовательно, и его прочность. Поэтому при подборе сечения конкретной балки необходимо знать, какие в ней действуют внутренние силы и каково их значение.

Правило знаков для Q_y и M_x :

Поперечная сила положительна, если она стремится вращать элемент балки по ходу часовой стрелки, и наоборот (рис. 2.21). При этом на эпюре ординаты $Q_y > 0$ откладываются вверх, а отрицательные – вниз от оси z .

Изгибающий момент будем считать положительным, если он создает такую кривизну элемента балки, что его выпуклость обращена вниз (при этом растянутыми оказываются нижние продольные волокна балки). Для отрицательного момента наоборот выпуклость вверх и удлинение верхних продольных волокон (рис. 2.21).

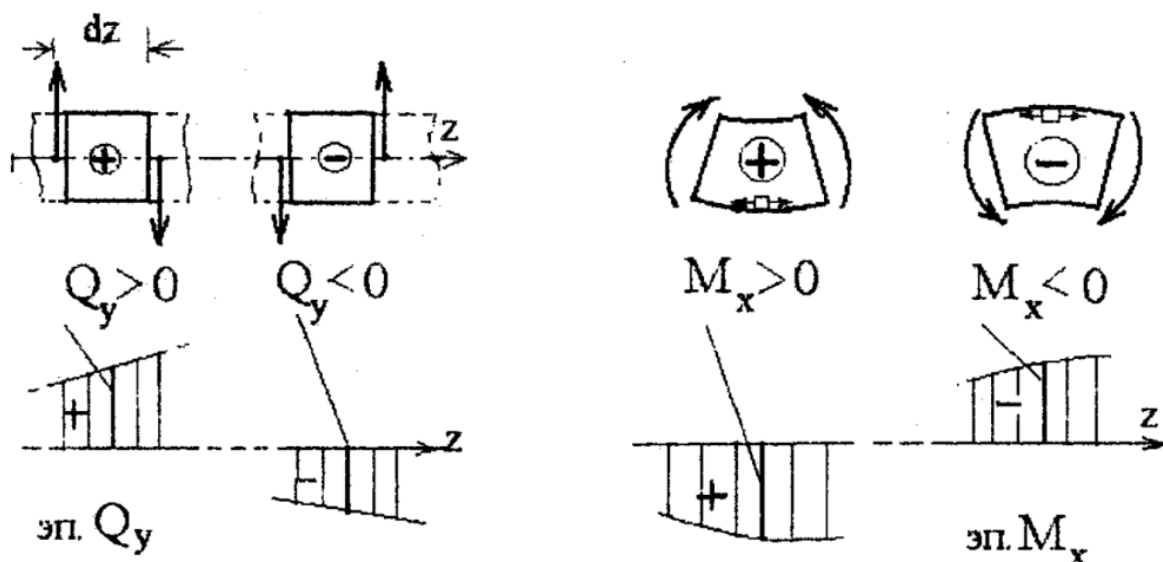


Рис. 2.21

Особенность эпюры M_x состоит в том, что на графике ординаты $M_x > 0$ откладываются не вверх, а вниз от оси z , а отрицательные - вверх (сравните эп. Q_y и эп. M_x на рис.2.21). Можно сказать, что ордината M_x при любом знаке момента всегда откладывается в сторону растянутых волокон. Говорят, что эпюра M_x строится всегда «на растянутых волокнах изгибаемого стержня». Это последнее утверждение особенно полезно - при построении эпюр в наклонных и вертикальных стержнях, чем будем пользоваться в дальнейших разделах курса.

Пример построения эпюр Q_y и M_x в консольной балке

Балка имеет два участка, для которых указаны местные системы координат $0_1 - z_1$ и $0_2 - z_2$ (рис. 2.22, а). На первом участке в качестве отсеченной части будем рассматривать левую часть балки относительно линии разреза 1, а на втором - правую по отношению к сечению 2.

Участок 1. ($0 \leq z_1 \leq 6$ м) В сечении разреза 1 (рис.2.22, б) надо приложить поперечную силу Q_1 и изгибающий момент M_1 , предполагая их направления положительными. Только в этом случае мы найдем эти внутренние усилия из уравнений равновесия правильными и по величине и по знаку. Для левой отсеченной части найдем:

$$\sum Y = 0; Q_1 - 4 + 1 \cdot z_1; \Rightarrow Q_1 = 4 - 1 \cdot z_1; 0 \leq z_1 \leq 6;$$

$$\sum m_1 = 0; M_1 - 4 \cdot z_1 + 1z_1 \cdot \left(\frac{z_1}{2}\right); \Rightarrow M_1 = 4z_1 - 1 \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2}; 0 \leq z_1 \leq 6.$$

Прямую строим по крайним точкам: $z_1=0$, $Q_1(0)=4$; и $z_1=6$, $Q_1(6)=4-6=-2$ кН. Для момента в крайних точках получим $M_1(0)=0$ и $M_1(6)=24 - 18=6$ кНм.

Нулевая точка в эпюре поперечных сил соответствует локальному экстремуму изгибающего момента в этой точке, что изображено на рис.2.22, с. Это следует из правила отыскания экстремума кривых, известного в аналитической геометрии.

Согласно этому правилу надо приравнять нулю первую производную, найти абсциссу z_{1B} и вычислить $M_1(z_{1B})$, что для кривой $M_1(z_1)$ дает

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y = 0 \Rightarrow Q_1 = 4 - z_{1B} = 0; \Rightarrow z_{1B} = 4,$$

$$M_{1,\max} = 4z_{1B} - 1 \cdot z_{1B} \cdot \frac{z_{1B}}{2} = 16 - 8 = 8 \text{ кНм.}$$

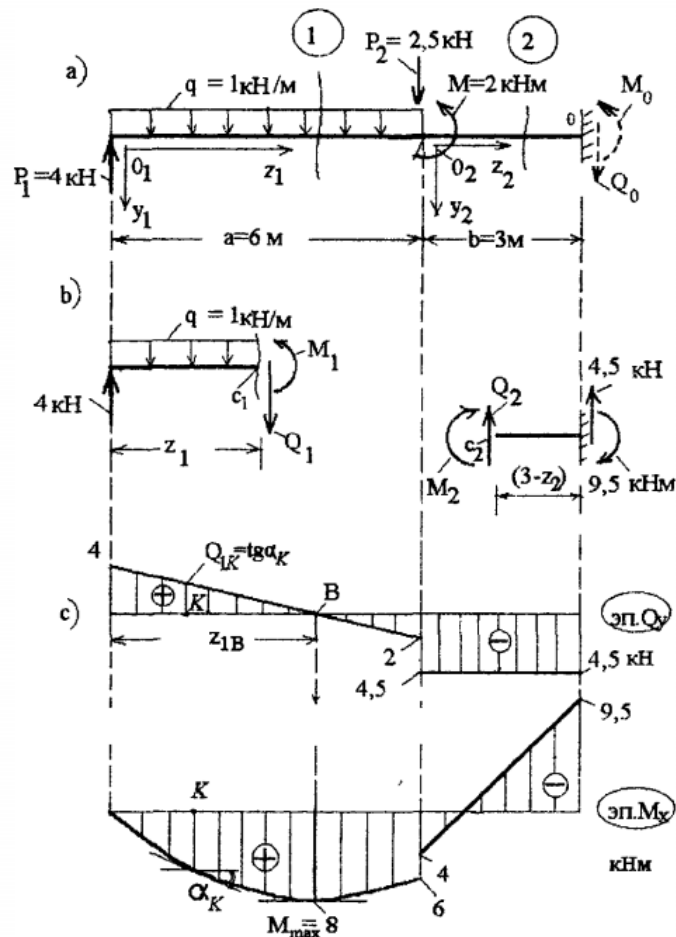


Рис. 2.22.

Участок 2. Так как рассматриваем правую отсеченную часть, необходимо заранее вычислить реакции в заделке Q_0 и M_0 . Составляем условия равновесия всей балки и из них вычисляем реакции

$$\begin{aligned} \sum Y = 0; \quad Q_0 - 4 + 1 \cdot 6 + 2,5 = 0 \quad Q_0 = -4,5 \text{ кН}, \\ \sum m_0 = 0; \quad M_0 - 4 \cdot 9 + 1 \cdot 6 \cdot 6 + 2,5 \cdot 3 + 2 = 0 \quad M_0 = -9,5 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Знаки минусы указывают на то, что фактические направления реакций противоположны указанным на рис.2.22,а. На рисунке 2.22, б, на отсеченной части второго участка показаны их истинные направления, а числовые значения - без знаков минусов. Теперь найдем формулы

для $Q_2(z_2)$ и $M_2(z_2)$:

$$\begin{aligned} Y = 0; \quad Q_2 + 4,5 = 0; \quad Q_2 = -4,5 \text{ кН}, \quad (0 \leq z_2 \leq 3); \\ \sum m_2 = 0; \quad M_2 + 9,5 \cdot (3 - z_2) + 4,5 \cdot (3 - z_2) = 0; \quad M_2 = -9,5 + 4,5 \cdot (3 - z_2), \\ (0 \leq z_2 \leq 3); \end{aligned}$$

Для крайних точек имеем: $M_2(0) = 4 \text{ кНм}$ и $M_2(3) = -9,5 \text{ кНм}$.

Общий вид эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x приведен на рис. 2.22,с. Качественная проверка по разрывам в эпюрах («по скачкам») показывает, что везде, где имеют место точки приложения сосредоточенных внешних сил (включая реакции) на эпюре Q_y имеются соответствующие скачки. Сосредоточенные моменты дают скачки в эпюре M_x . При этом скачки (разрывы) точно соответствуют значениям сил и моментов.

На участке, нагруженном распределенной нагрузкой - эпюра M_x криволинейная, а на свободном от нее - линейная.

Пример построения внутренних сил в двухопорной балке

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 2.23, а, где показана разбивка балки на участки и их нумерация. В состав внешней нагрузки, кроме указанной на схеме, входят и опорные реакции, которые надо предварительно определить из условий равновесия всей балки.

Определение опорных реакций. Реакции V_a и V_b находим из условий $\sum m_a = 0$ и $\sum m_b = 0$, а равенство нулю суммы проекций на вертикальную ось $\sum Y = 0$ используем как проверку:

$$\sum m_a = 0; V_b \cdot 8 + 8 - 4 \cdot 4 \cdot 6 - 6 \cdot 10 = 0; V_b = -1 + 12 + 7,5 = 18,5 \text{ кН};$$

$$\sum m_b = 0; V_a \cdot 8 - 8 - 4 \cdot 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 0; V_a = 1 + 4 - 1,5 = 3,5 \text{ кН}.$$

Проверка $\sum Y = 0; 3,5 - 4 \cdot 4 + 18,5 - 6 = 0$ выполняется.

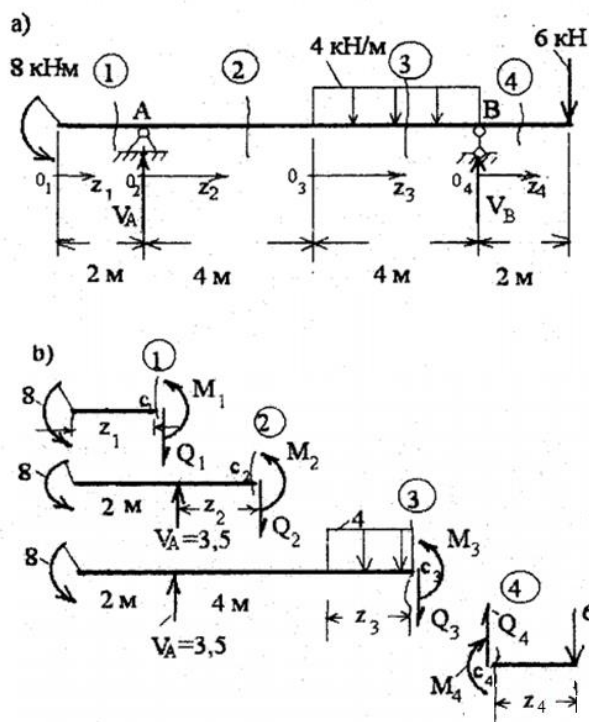


Рис. 2.23

Последовательно составляем условия равновесия отсеченных частей балки (рис.2.23, б), откуда получаем формулы для внутренних усилий в балке Q и M .

Напомним, что к отсеченным частям искомые внутренние усилия прикладываем как заведомо положительные, в соответствии с принятым правилом знаков.

Участок 1. $0 \leq z_1 \leq 2$. (рис. 2.23, б)

$$\sum Y = 0; Q_1 = 0;$$

$$\sum m_{c1} = 0; M_1 = -8 \text{ кНм}.$$

Участок 2. $0 \leq z_2 \leq 4$.

$$\sum Y = 0; Q_2 = 3,5 \text{ кН}$$

$$\sum m_{c2} = 0; M_2 = -8 + 3,5 \cdot z_2;$$

при $z_2=0$
 $M_2 = -8 + 3,5 \cdot 4 = 6 \text{ кНм.}$

Участок 3. $0 \leq z_3 \leq 4$.

$$\sum Y = 0; \quad Q_3 = 3,5 - 4z_3;$$

при $z_3 = 0$; $Q_3 = 3,5 \text{ кН}$; при $z_3 = 4$ $Q_3 = 3,5 - 4 \cdot 4 = -12,5 \text{ кН}$.

$$\sum m_{c3} = 0; \quad M_3 = -8 + 3,5 \cdot (4 + z_3) - 4 \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2};$$

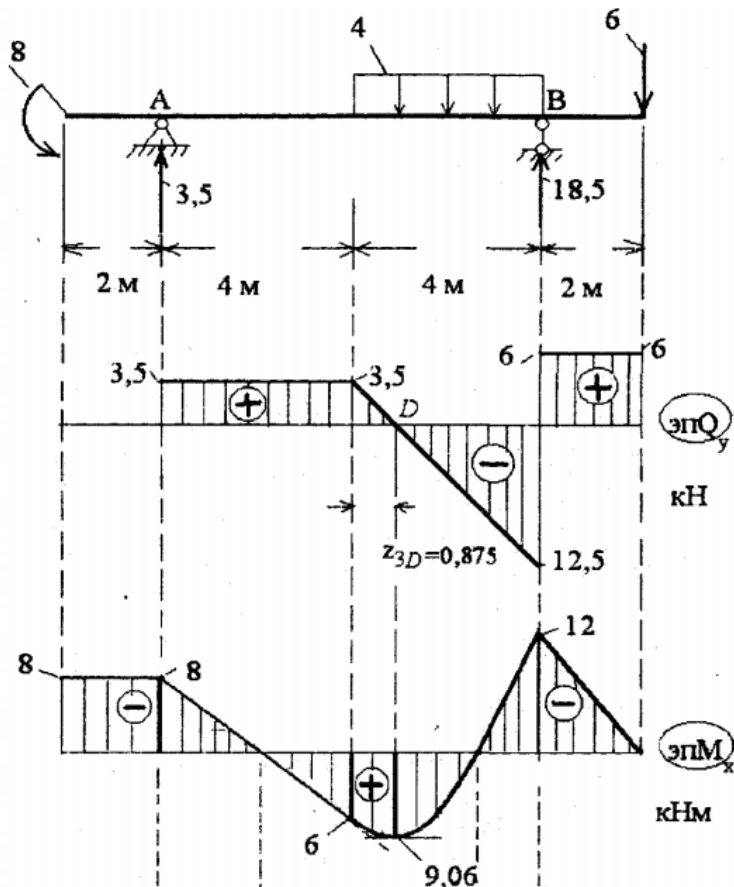
Для момента квадратную параболу строим по крайним точкам при $z_3 = 0$; $M_3 = 6 \text{ кНм}$; при $z_3 = 4$ $M_3 = -12 \text{ кНм}$, а также делаем вычисления для точки D, где функция $M_3(z_3)$ имеет локальный экстремум. В этой точке первая производная от момента, равная поперечной силе, обращается в ноль, т.е. $Q_3(z_{3D}) = 3,5 - 4z_{3D} = 0 \Rightarrow z_{3D} = 0,875 \text{ м}$. Теперь находим $M_3(0,875) = -8 + 3,5 \cdot (4 + 0,875) - 4 \cdot 0,875 \cdot \frac{0,875}{2} = 9,06 \text{ кНм}$.

Участок 4. $0 \leq z_4 \leq 2$.

Более просто рассмотреть правую отсеченную часть, для которой получим:

$$\sum Y = 0; \quad Q_4 = 6 \text{ кН};$$

$$\sum m_{c4} = 0; \quad M_4 = -6 \cdot z_4; \text{ при } z_4 = 0 \quad M_4 = 0; \text{ при } z_4 = 2 \quad M_4 = -12 \text{ кНм.}$$

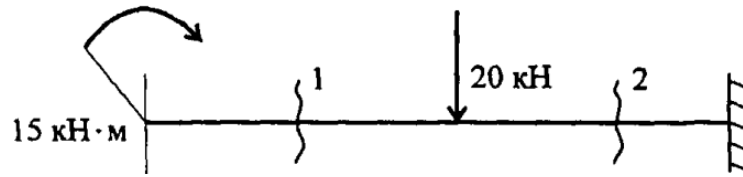


Полные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов вместе с нагрузкой на балку даны на рис 2.24. Для правильного изображения эпюры изгибающих моментов следует особое внимание обращать на точки сопряжения соседних участков. Так например, сопряжение 2-го и 3-го участков должно быть плавным, так как производная функции момента в этой точке не имеет разрыва. Это видно по эпюре Q_y , где нет скачка. Напротив, в точке B эпюра Q_y имеет разрыв и на эпюре моментов это отражается в виде «перелома касательных». При этом острие перелома направлено в сторону действия силы V_B . Подчеркнем, что получить правильное очертание эпюр можно, только тщательно соблюдая масштаб и ординат и длин участков при изображении эпюры.

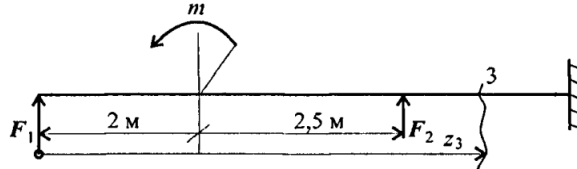
Рис. 2.24

Вопросы для самоконтроля

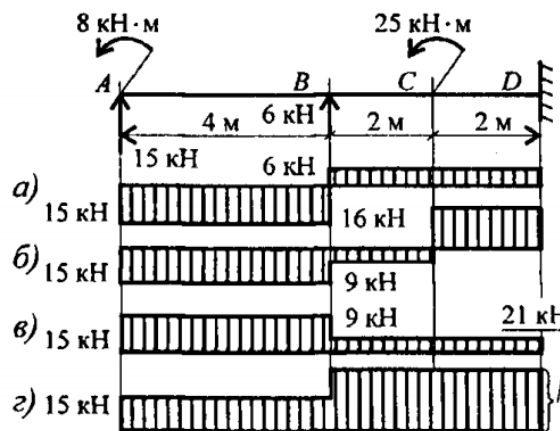
1. Определите величины поперечных сил в сечении 1 и сечении 2.



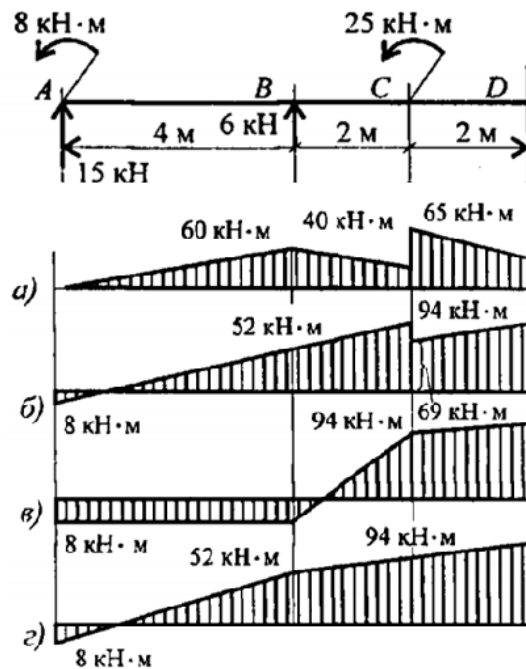
2. Напишите формулу для расчета изгибающего момента в сечении 3.



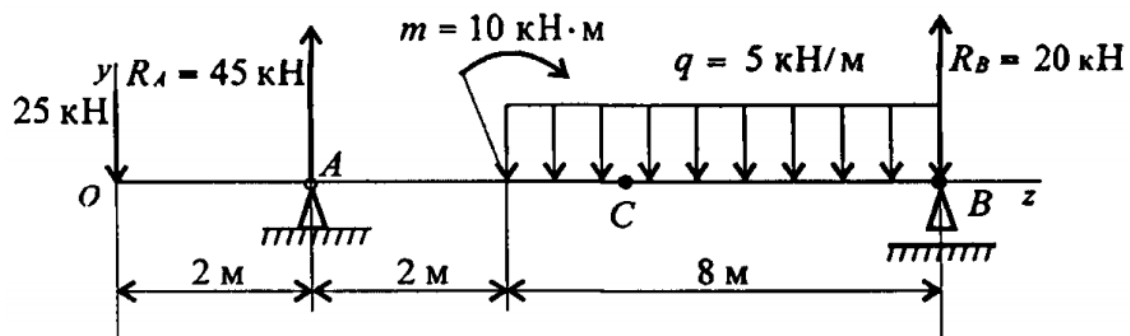
3. Из представленных эпюр выберите эпюру поперечной силы для изображенной балки.



4. Из представленных эпюр выберите эпюру изгибающего момента

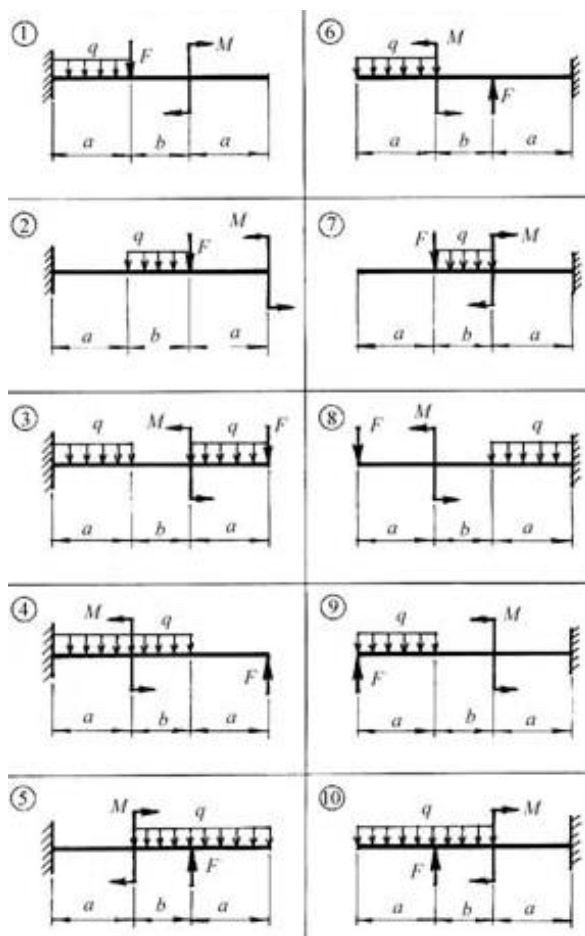


5. Определите координату z , в которой поперечная сила равна нулю. Определите величину изгибающего момента в точке C ($z=5$ м).

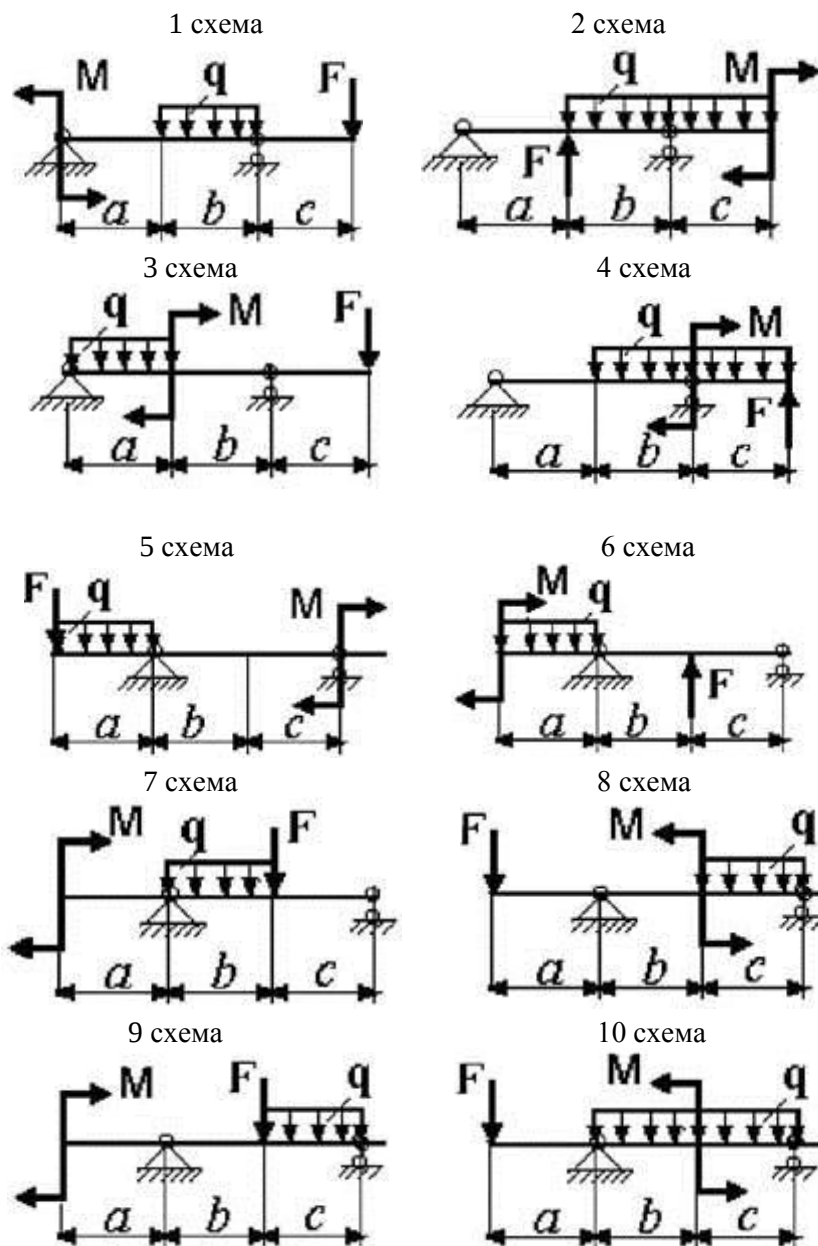


Задание. Для заданной консольной балки построить эпюры внутренних усилий.

Номер строки	Схема по рис.	F, кН	a, м	b, м	c, м	M, кНм	q, кН/м		
01	1	12	1	2	3	24	5		
02	2	10	2	2	4	16	4		
03	3	12	3	2	1	12	6		
04	4	6	2	3	1	18	2		
05	5	8	1	3	2	20	4		
06	6	10	3	1	2	12	2		
07	7	6	2	2	4	12	3		
08	8	8	1	2	4	12	6		
09	9	6	2	1	4	16	5		
10	10	12	1	3	2	10	6		



Задание 5. Для заданной двухопорной балки построить эпюры внутренних усилий, значения нагрузок брать из таблицы задания 6.



4.4. Геометрические характеристики поперечных сечений

Сопротивление тела (стержня, балки) различным видам деформации зависит не только от его материала и его геометрических размеров, но и от формы поперечных сечений. Кроме обычных геометрических характеристик (длина, площадь, объем), которые имеют определенный физический смысл, в формулах сопротивления материалов используются новые характеристики: статический моменты и моменты инерции площади сечения. Эти величины не имеют физического смысла и их нельзя измерить.

Статические моменты площади сечения используются при определении положения центра тяжести сечения, при расчете касательных напряжений при изгибе. Моменты инерции площади сечения используются при расчете напряжений и перемещений очень часто (при изгибе, при кручении и т.д.).

Геометрические характеристики – числовые величины (параметры), определяющие размеры, форму, расположение поперечного сечения однородного по упругим свойствам деформируемого

элемента конструкции (и, как следствие, характеризующие сопротивление элемента различным видам деформации).

Площадь плоских сечений

Площадь сечения является одной из геометрических характеристик, используемых, главным образом, в расчетах на растяжение и сжатие. При расчетах на кручение, изгиб, а также на устойчивость используются более сложные геометрические характеристики: статические моменты, моменты инерции, моменты сопротивления и т.д.

Проектирование конструкций с оптимальными формами и размерами сечений является одним из путей снижения веса и стоимости машин и сооружений.

Площадь, ограниченная произвольной кривой, есть

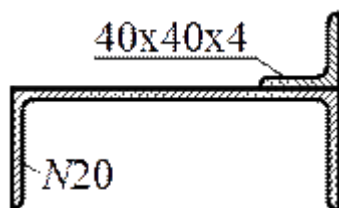
$$A = \int_A dA$$

Для вычисления геометрических характеристик сложных сечений, состоящих из простейших фигур, они разбиваются на конечное число n простейших частей. В этом случае

$$A = \sum_{i=1}^n A_i.$$

Площадь является простейшей геометрической характеристикой сечения, имеет размерность м^2 . Отметим два важных свойства: площадь всегда положительна и не зависит от выбора системы координат.

Для сечений, составленных из профилей стандартного проката, площадь каждого профиля и остальные необходимые для расчетов размеры принимаются по таблицам ГОСТов на прокатную сталь.



При расчетах на изгиб, кручение, сложное сопротивление и устойчивость используются более сложные геометрические характеристики: статические моменты, моменты инерции сечений, которые зависят не только от формы и размеров сечений, но также от положения осей и точек (полюсов), относительно которых они вычисляются.

Статические моменты сечения

Статическим моментом плоского сечения относительно некоторой оси называется, взятая по всей его площади A , сумма произведений площадей элементарных площадок dA на их расстояния от этой оси (рис. 2.25):

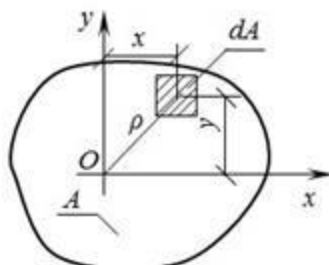


Рис. 2.25

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A y dA, & S_y &= \int_A x dA; \\ S_x &= \iint_A y dx dy, & S_y &= \iint_A x dx dy; \\ S_x &= A y_c, & S_y &= A x_c, \end{aligned} \quad (1)$$

где y_c – расстояние от центра тяжести всего плоского сечения до оси x ; x_c – расстояние от центра тяжести всего сечения до оси y .

Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме статических моментов всех частей этого сечения относительно той же оси:

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{i=1}^n A_i y_i;$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \sum_{i=1}^n A_i x_i. \quad (2)$$

В формулах (2) введены обозначения: $A_1, A_2, \dots, A_n$ – площади простых элементов, составляющих плоское сложное сечение; $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_n, y_n$ – координаты центров тяжести простых составляющих сложного плоского сечения относительно выбранных осей x и y .

Из выражений можно определить координаты центра тяжести плоского сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}.$$

Для сложного поперечного сечения формулы можно представить в следующем виде:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}. \quad (3)$$

Зависимости между статическими моментами одного и того же сечения относительно двух параллельных друг другу осей x и x_1 , а также y и y_1 имеют вид:

$$S_{x_1} = S_x - aA; \quad S_{y_1} = S_y - bA,$$

где параметры a, b показаны на рис. 2.26.

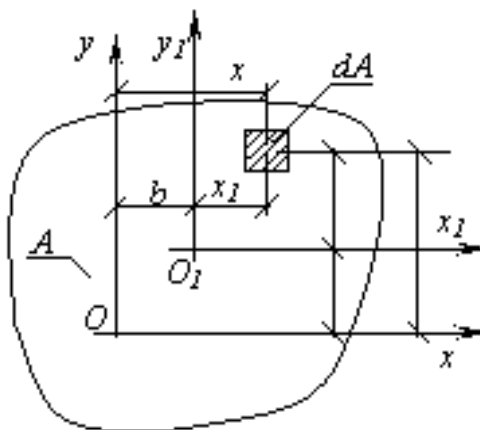


Рис. 2.26.

У к а з а н и я.

1. Изменение положительного направления оси y вызывает изменение знака статического момента S_x . Аналогично, изменение положительного направления оси x вызывает изменение знака статического момента S_y .

2. Статический момент сечения равен нулю относительно любой оси, проходящей через центр тяжести этого сечения.

3. Если плоское сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда проходит через центр тяжести плоского сечения, а поэтому, согласно п.2, статический момент сечения относительно оси симметрии всегда равен нулю.

4. Если плоское сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести сечения лежит на пересечении этих осей симметрии.

Пример 1.

Определить статический момент полукруга радиусом R (рис. 2.27) относительно горизонтальной оси z , совпадающей с диаметром, и координату центра тяжести y_c .

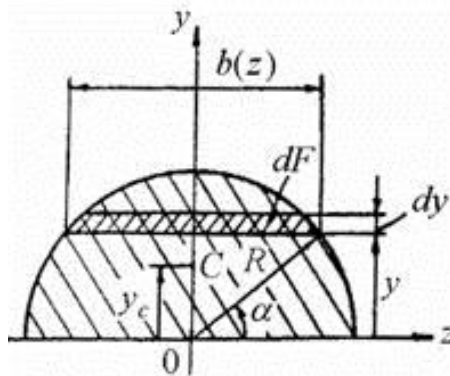


Рис. 2.27

Решение.

По формуле имеем $S_z = \int_F y dF$. Выделим на рис. 2.27 на расстоянии y элементарную площадку dF с помощью двух хорд, параллельных оси z , на расстоянии dy друг от друга. Как следует из рис. 2.27

$$y = R \cdot \sin \alpha, b(z) = 2R \cdot \cos \alpha,$$

тогда

$$dy = (R \cdot \sin \alpha)' \cdot d\alpha = R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \text{ и } dF = b(z) \cdot dy = 2R^2 \cos^2 \alpha \cdot d\alpha$$

Подставляя найденные значения y и dF в выражение S_z , получим

$$\begin{aligned} S_z &= \int_F y dF = \int_0^{\pi/2} R \cdot \sin \alpha \cdot 2R^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = 2R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \\ &= -2R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \cdot d(\cos \alpha) = -\frac{2R^3 \cdot \cos^3 \alpha}{3} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2R^3}{3} (0 - 1) \\ &= \frac{2}{3} R^3. \end{aligned}$$

Координата центра тяжести сечения y_c определяется по формуле:

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,424R.$$

Пример 2.

Найти положения центра тяжести фигуры, имеющей форму тавра (рис. 2.28).

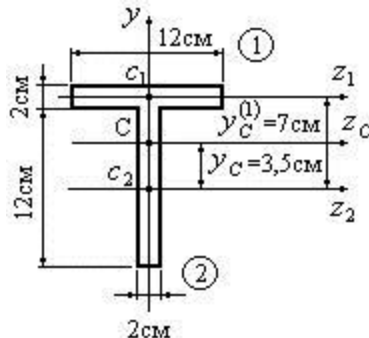


Рис.2.28

Решение.

1. Разбиваем изображенную на рис. 2.28 фигуру на простые и присваиваем им номера 1 и 2. Центры тяжести каждой из простых фигур обозначаем соответственно c_1 и c_2 .

2. Проводим через центры тяжести каждой из фигур оси z_1 , z_2 и ось y . Ось y является осью симметрии фигуры, проходит через центры тяжести обеих простых фигур и всей фигуры также и поэтому индексации не имеет.

3. Выбираем в качестве начала координат центр тяжести второй фигуры c_2 и в качестве оси, относительно которой будем производить все вычисления, ось z_2 .

4. Вычислим статический момент площади фигуры относительно оси z_2 :

$$S_{z_2} = A_1 y_c^{(1)} + A_2 y_c^{(2)} = 12 \cdot 2 \cdot 7 + 12 \cdot 2 \cdot 0 = 168 \text{ см}^3.$$

В формуле (а) координата центра тяжести второй простой фигуры $y_c^{(2)} = 0$, так как ось z_2 , относительно которой определялся статический момент площади, проходит через центр тяжести второй фигуры. В соответствии с основным своим свойством статический момент площади относительно любой центральной оси равен нулю. В связи с этим для сокращения арифметических вычислений при определении положения центра тяжести сложных фигур рекомендуется выбирать в качестве начала координат центр тяжести одной из простых фигур.

4. Находим координату центра тяжести всей фигуры:

$$y_c = \frac{S_{z_2}}{A} = \frac{S_{z_2}}{A_1 + A_2} = \frac{168}{12 \cdot 2 + 12 \cdot 2} = 3,5 \text{ см.}$$

Найденное значение координаты центра тяжести отложим вдоль оси y вверх от точки c_2 , так как это значение положительное. Полученную точку обозначим буквой C . Ось z_c , проведенная через центр тяжести всей фигуры будет одной из центральных осей фигуры. Вторая центральная ось фигуры в данном примере не определяется, так как этой осью является ось симметрии y . Статические моменты S_y простых фигур и всей фигуры относительно этой оси равны нулю. Координата центра тяжести всей фигуры $z_c = 0$.

Анализируя полученное решение, можно сделать вывод о том, что при определении центра тяжести для сложных фигур очень важно удачно выбрать начало координат и, соответственно, оси, относительно которых производятся все вычисления. Как уже отмечалось выше, начало координат следует помещать в центр тяжести одной из простых фигур.

Пример 3.

Определить положение центра тяжести неравнобокого уголка $160 \times 100 \times 10$ (пренебрегая закруглениями его полук) относительно осей z и y , совпадающих с наружными сторонами контура (рис. 2.29). Найденные значения координат сравнить с табличными значениями по ГОСТ 8510-57.

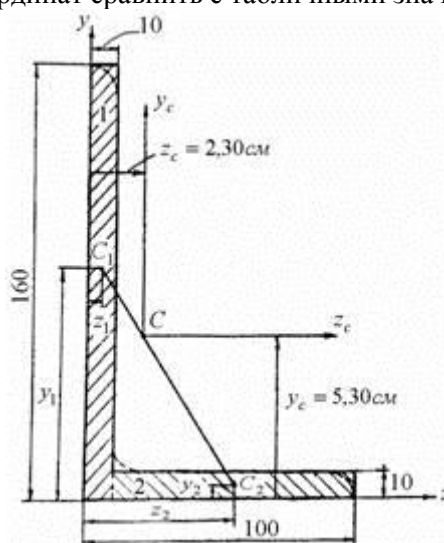


Рис. 2.29

Решение.

Пренебрегая закруглением полук уголка, разбиваем фигуру на два прямоугольника, как показано на рис. 2.29. Для первого (1) прямоугольника

$$F_1 = 160 \cdot 10 = 1600 \text{ мм}^2 = 16 \text{ см}^2,$$

$$y_1 = 80 \text{ мм} = 8 \text{ см},$$

$$z_1 = 5 \text{ мм} = 0,5 \text{ см.}$$

Для второго (2) прямоугольника

$$F_2 = 90 \cdot 10 = 900 \text{ мм}^2 = 9 \text{ см}^2,$$

$$y_2 = 5 \text{ мм} = 0,5 \text{ см},$$

$$z_2 = 5,5 \text{ см.}$$

Координаты центра тяжести сечения определяем по формулам:

$$z_c = \frac{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2}{F_1 + F_2} = \frac{16 \cdot 0,5 + 9 \cdot 5,5}{16 + 9} = 2,30 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2} = \frac{16 \cdot 8 + 9 \cdot 0,5}{16 + 9} = 5,30 \text{ см.}$$

По данным сортамента с учетом закруглений координаты центра тяжести равны $z_c = 2,28 \text{ см}$; $y_c = 5,23 \text{ см}$.

Для проверки правильности вычислений определим статические моменты относительно центральных осей, которые должны быть равны нулю:

$$S_z = \frac{F_1(y_1 - y_c) + F_2(-y_c - y_2)}{F_1 + F_2} = \frac{16 \cdot (8 - 5,30) + 9 \cdot (-(5,30 - 0,5))}{16 + 9} = 0$$

$$S_{y_c} = \frac{F_1(-(z_c - z_1)) + F_2(z_2 - z_c)}{F_1 + F_2} = \frac{16 \cdot (-(2,30 - 0,5)) + 9 \cdot (5,5 - 2,30)}{16 + 9} = 0.$$

Графическая проверка: точка С должна находиться на отрезке С1С2.

Моменты инерции плоских сечений простой формы

В дополнение к статическим моментам в системе координат xOy рассмотрим три интегральных выражения:

$$I_x = \int_A y^2 dA;$$

$$I_y = \int_A x^2 dA;$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA.$$
(4)

Первые два интегральных выражения называются осевыми моментами инерции относительно осей x и y , а третье – центробежным моментом инерции сечения относительно осей x , y .

Для сечений, состоящих из n -числа областей формулы для вычисления момента инерции будут иметь вид:

$$I_x = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} y^2 dA = \sum_{k=1}^n I_x^{(k)};$$

$$I_y = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} x^2 dA = \sum_{k=1}^n I_y^{(k)};$$

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} xy dA = \sum_{k=1}^n I_{xy}^{(k)}.$$
(5)

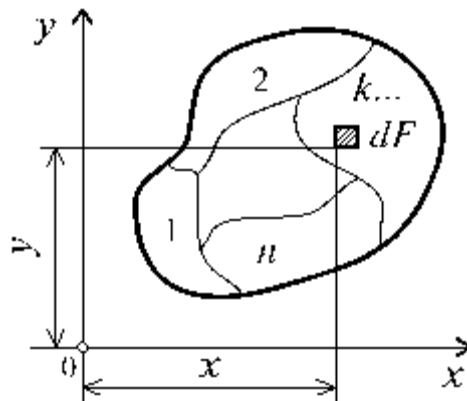


Рис. 2.30

Рассмотрим, как изменяются моменты инерции сечения при параллельном переносе координатных осей x и y (см. рис. 2.31). Преобразуя формулы (5), получим:

$$I_x = I_{x_1} + 2bS_{x_1} + b^2A;$$

$$I_y = I_{y_1} + 2aS_{y_1} + a^2A;$$

$$I_{xy} = I_{x_1y_1} + aS_{x_1} + bS_{y_1} + abA.$$
(6)

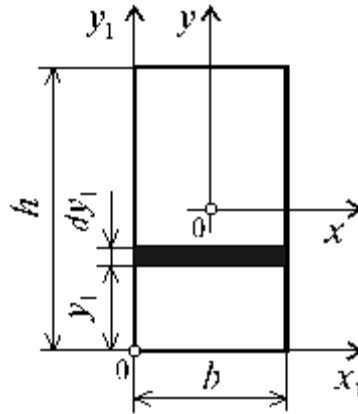


Рис. 2.31

Если предположить, что оси x_1 и y_1 (см. рис. 2.31) являются центральными, тогда $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$ и выражения (6) упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_1} + b^2 A; \\ I_y &= I_{y_1} + a^2 A; \\ I_{xy} &= I_{x_1 y_1} + abA. \end{aligned} \quad (7)$$

Оси называются центральными, если они проходят через центр тяжести фигуры, т. е. статические моменты относительно этих осей равны нулю. Главными осями инерции фигуры называются оси относительно которых центробежный момент инерции равен нулю. Если фигура имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось является главной осью.

Определим осевые моменты инерции прямоугольника относительно осей x и y , проходящих через его центр тяжести (рис. 2.31). В качестве элементарной площадки dA возьмем полоску шириной b и высотой dy (рис. 2.31). Тогда будем иметь:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dA b dy = \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогичным образом можно установить, что $I_y = \frac{bh^3}{12}$.

Центробежный момент инерции сечения относительно осей, хотя бы одна из которых является осью симметрии, равен нулю.

Для систем, рассматриваемых в полярной системе координат (рис. 2.32, а), вводится также полярный момент инерции:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA.$$

где ρ – радиус-вектор точки тела в заданной полярной системе координат.

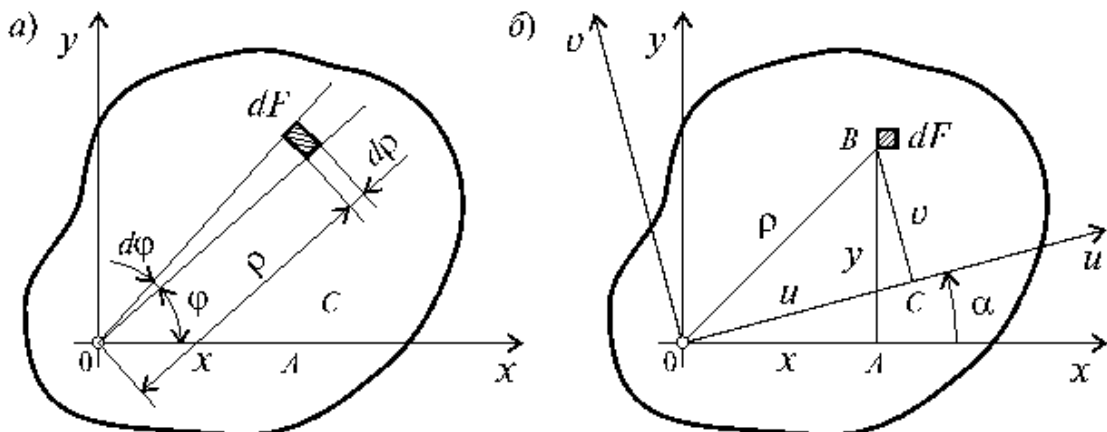


Рис. 2.32

Вычислим полярный момент инерции круга радиуса R . На рис. 2.32, а показана элементарная площадка, очерченная двумя радиусами и двумя концентрическими поверхностями, площадью

$$dF = \rho d\rho d\varphi.$$

Интегрирование по площади заменим двойным интегрированием:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Найдем зависимость между полярным и осевыми моментами инерции для круга. Из геометрии видно (рис. 2.32, б), что

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

следовательно,

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_x + I_y.$$

Данное условие называется условием инвариантности. Формулируется условие инвариантности следующим образом: сумма осевых моментов инерции относительно двух любых взаимно перпендикулярных осей есть величина постоянная и равная полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей.

Так как оси x и y для круга равнозначны, то $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$.

Полярный момент инерции кольца может быть найден как разность моментов инерции двух кругов: наружного (радиусом R) и внутреннего (радиусом r):

$$I_\rho^K = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4).$$

Размерность моментов инерции m^4 . Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным, равным нулю.

Для фигур, имеющих более двух осей симметрии, осевые моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой. К таким фигурам относятся равносторонний треугольник, квадрат, круг и т.д.

Моменты инерции простых сечений

Вычислим моменты инерции простейших фигур.

Прямоугольник (рис. 2.34)

Определим моменты инерции относительно осей, совпадающих со сторонами, и относительно центральных осей.

По определению $I_x = \int_A y^2 dA$.

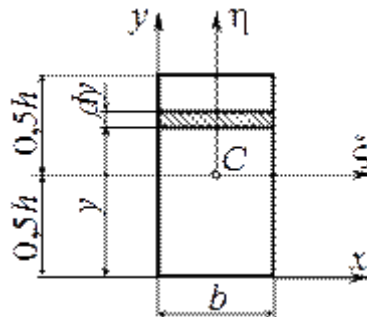


Рис. 2.34

Элемент площади равен $dA = bdy$,

следовательно $I_x = b \int_0^h y^2 dy = bh^3/3$.

По формуле $I_x = I_{\xi} + y_c^2 A$, откуда, учитывая что $A = bh$, $y_c = 0,5h$, находим

$$I_{\xi} = I_x - y_c^2 A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично получим $I_y = b^3 h/3$ и $I_{\eta} = b^3 h/12$.

Треугольник (рис. 2.35)

Момент инерции относительно оси x , совпадающей с основанием,

$$I_x = \int_A y^2 dA.$$

Но $dA = b(y)dy$, $b(y) = (b/h)(h-y)$.

Следовательно,

$$I_x = \left(\frac{b}{h}\right) \int_0^h y^2(h-y) dy = \frac{bh^3}{12}.$$



Рис. 2.35

По формуле параллельного переноса $I_{\xi} = I_x - y_c^2 A$, откуда

$$I_{\xi} = I_x - y_c^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \left(\frac{bh}{2}\right) = \frac{bh^3}{36}.$$

Круг (рис. 2.36)

Для любых центральных осей $I_{\xi} = I_{\eta}$, поэтому $I_p = 2I_{\xi}$.

Как известно, полярный момент инерции круга равен $I_p = \left(\frac{\pi}{32}\right) d^4$.

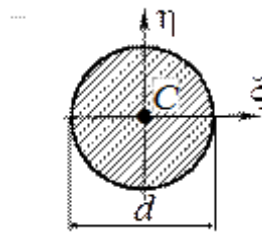


Рис. 2.36

Следовательно, $I_{\xi} = I_{\eta} = \frac{I_p}{2} = \pi d^4 / 64$.

Кольцо $\left(\alpha = \frac{d_{\text{вн}}}{d_{\text{вн}}}\right)$ (рис. 2.37)

Момент инерции относительно оси ξ (рис. 2.37) можно определить как разность моментов инерции наружного и внутреннего круга:

$$I_{\xi} = \left(\frac{\pi}{64}\right) d_{\text{вн}}^4 - \left(\frac{\pi}{64}\right) d_{\text{вн}}^4 = \left(\frac{\pi}{64}\right) d_{\text{вн}}^4 (1 - \alpha^4).$$

Для тонкого кольца существует приближенная формула $I_{\xi} = \pi d_{\text{ср}}^3 t / 8$, где $d_{\text{ср}}$ – средний диаметр, t – толщина кольца.

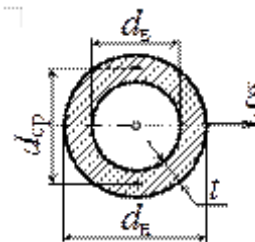


Рис. 2.37

Моменты инерции сечений сложной формы

Момент инерции сечения сложной формы относительно некоторой оси равен сумме моментов инерций его составных частей относительно той же оси:

$$I_x = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III} + \dots, \quad (8)$$

что непосредственно следует из свойств определенного интеграла. Таким образом, для вычисления момента инерции сложной фигуры надо разбить ее на ряд простых фигур, вычислить моменты инерции этих фигур, а затем просуммировать их.

Пример 4.

Определить осевые моменты инерции фигуры, приведенной на рис. 2.38, относительно центральных осей z_c и y_c .

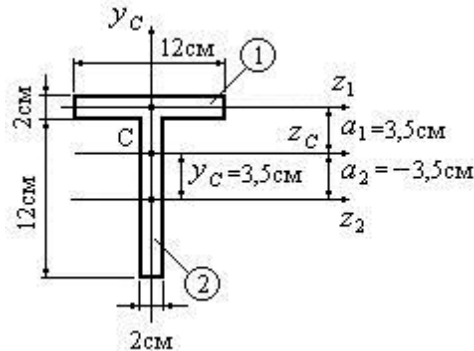


Рис.2.38

Решение:

В примере 2 для изображенной на рис.2.38 фигуры было определено положение центра тяжести C . Координата центра тяжести откладывалась от оси z_2 и составила $y_c = 3,5$ см. Вычислим расстояния a_1 и a_2 между осями z_1 и z_c и осями z_2 и z_c . Эти расстояния составили соответственно $a_1 = 3,5$ см и $a_2 = -3,5$ см. Так как исходные оси z_1 и z_2 являются центральными осями для простых фигур в виде прямоугольников, для определения момента инерции фигуры относительно оси z_c воспользуемся формулой.

$$I_{z_c} = J_{z_1}^{(1)} + a_1^2 A_1 + J_{z_2}^{(2)} + a_2^2 A_2 = \frac{12 \cdot 2^3}{12} + 3,5^2 \cdot 24 + \frac{2 \cdot 12^3}{12} + 3,5^2 \cdot 24 = 884 \text{ см}^4.$$

Момент инерции относительно оси y_c получим путем сложения моментов инерции простых фигур относительно этой же оси, так как ось y_c является общей центральной осью для простых фигур и для всей фигуры.

$$I_{y_c} = J_{y_1}^{(1)} + J_{y_2}^{(2)} = \frac{12^3 \cdot 2}{12} + \frac{12 \cdot 2^3}{12} = 296 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции относительно осей z_c и y_c равен нулю, так как ось инерции y_c является главной осью (осью симметрии фигуры).

Пример 5.

Определить момент инерции сечения, показанного на рис. 2.39, относительно оси симметрии, $a=10$ см.

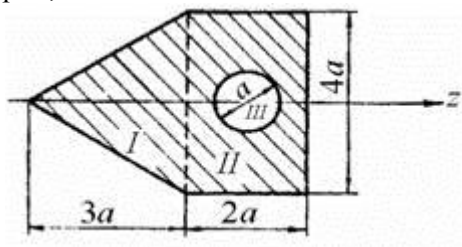


Рис. 2.39

Решение.

Разбиваем заданное сечение на простейшие элементы: I - Равнобедренный треугольник, II - прямоугольник, III - круг.

Момент инерции сложной фигуры относительно оси z согласно формуле:

$$I_z = \sum_{i=1}^3 (I_z)_i = I_z^I + I_z^{II} - I_z^{III}.$$

Определяем моменты инерции слагаемых простейших элементов:

Для равнобедренного треугольника:

$$I_z^I = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{48} = \frac{3a \cdot (4a)^3}{48} = 4,00a^4;$$

для прямоугольника согласно формуле:

$$I_z^{II} = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} = \frac{2a \cdot (4a)^3}{12} = 10,67a^4;$$

для круга согласно формуле:

$$I_z^{III} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi a^4}{64} = 0,0491a^4.$$

Окончательно получим:

$$I_z = 4,0a^4 + 10,67a^4 - 0,0491a^4 = 14,6a^4 = 14,6 \times 10^4 = 1,46 \times 10^5 \text{ см}^4.$$

Пример 6.

Определить момент инерции симметричного сечения, показанного на рис. 2.40, относительно вертикальной оси симметрии y . Двутавр №10 (ГОСТ 8239-56). Швеллер №5 (ГОСТ 8240-56).

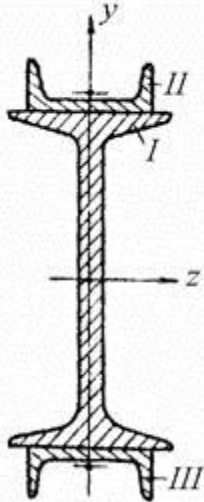


Рис. 2.40

Решение.

Разбиваем исходное сечение на простейшие элементы, моменты инерций которых приводятся в справочниках: I - двутавр, II и III - швеллеры.

По сортаменту на стандартные прокатные профили имеем:

Для двутавра №10 (ГОСТ 8239-56): $H=10$ см, $B=7$ см, $F=14,2$ см², $I_x=244$ см⁴, $I_y=35,3$ см⁴.

Для швеллера №5 (ГОСТ 8240-56): $h=5$ см, $b=3,7$ см, $F=6,90$ см², $I_x=26,1$ см⁴, $I_y=8,41$ см⁴, $x_0=1,35$ см.

Момент инерции сечения относительно оси y :

$$I_y = \sum_{i=1}^3 (I_y)_i = I_y^I + I_y^{II} + I_y^{III} = I_y^I + 2I_y^{II},$$

т.к. оба швеллера расположены идентично относительно оси y .

Для двутавра $I_y^I = (I_y^I)_{\text{сортам.}} = 35,3 \text{ см}^4$.

Для швеллера $I_y^{II} = (I_x^C)_{\text{сортам.}} = 26,1 \text{ см}^4$.

Окончательно имеем: $I_y = 35,3 + 2 \cdot 26,1 = 87,5 \text{ см}^4$.

Пример 7.

Какая из фигур, изображенных на рис.2.41, имеет больший момент инерции относительно оси z , если обе фигуры имеют одинаковую площадь $A=400$ см²?

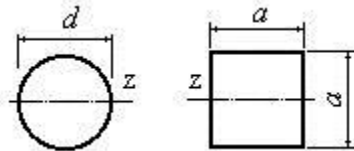


Рис. 2.41

Решение.

1. Выразим площади фигур через их размеры и определим:

а) диаметр сечения для круглого сечения:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 400 \text{ см}^2.$$

Откуда

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 400}{\pi}} = 22,57 \text{ см}.$$

б) размер стороны квадрата:

$$A = a^2.$$

Откуда

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{400} = 20 \text{ см.}$$

2. Вычисляем момент инерции для круглого сечения:

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 22,57^4}{64} = 12732,39 \text{ см}^4.$$

3. Вычисляем момент инерции для сечения квадратной формы:

$$I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{20^4}{12} = 13333,33 \text{ см}^4.$$

Сравнивая полученные результаты, приходим к выводу, что наибольшим моментом инерции будет обладать сечение квадратной формы по сравнению с сечением круглой формы при одинаковой у них площади.

Пример 8.

Определить полярный момент инерции (в см^4) сечения прямоугольной формы относительно его центра тяжести, если ширина сечения $b=8$ см, высота сечения $h=24$ см.

Решение.

1. Найдем моменты инерции сечения относительно горизонтальной z и вертикальной y центральных осей инерции:

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{8 \cdot 24^3}{12} = 9216 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{24 \cdot 8^3}{12} = 1024 \text{ см}^4.$$

2. Определяем полярный момент инерции сечения как сумму осевых моментов инерции:

$$I_p = I_z + I_y = 10240 \text{ см}^4.$$

Пример 9.

Определить момент инерции фигуры треугольной формы изображенной на рис. 2.42, относительно центральной оси z , если момент инерции фигуры относительно оси z_1 равен 2400 см^4 .

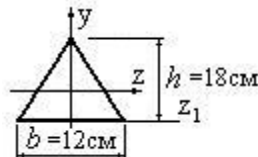


Рис.2.42

Решение.

Момент инерции сечения треугольной формы относительно главной оси инерции z будет меньше по сравнению с моментом инерции относительно оси z_1 на величину $a^2 A$. Поэтому при $a = h/3 = 6$ см момент инерции сечения относительно оси z найдем следующим образом:

$$I_z = I_{z_1} - a^2 A = 2400 - 6^2 \cdot \frac{12 \cdot 18}{2} = 456 \text{ см}^4.$$

Изменение моментов инерции сечения при повороте осей координат

Найдем зависимость между моментами инерции относительно осей x, y и моментами инерции относительно осей x_1, y_1 , повернутых на угол α . Пусть $J_x > J_y$ и положительный угол α отсчитывается от оси x против часовой стрелки. Пусть координаты точки M до поворота – x, y , после поворота – x_1, y_1 (рис. 2.43).

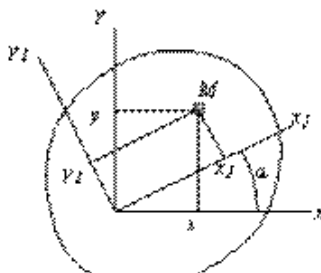


Рис.2.43

Из рисунка 2.43 следует:

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha; y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Теперь определим моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 :

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF \\ &= \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F xy dF + \sin^2 \alpha \int_F x^2 dF, \\ \text{или } I_{x_1} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично:

$$I_{y_1} = \int_F x_1^2 dF = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha - J_{xy} \cos 2\alpha. \quad (10)$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \quad (11)$$

Сложив почленно уравнения (9), (10), получим:

$$I_{x_1 y_1} = J_x (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = J_x + J_y = J_\rho,$$

т.е. сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей остается постоянной и не изменяется при повороте системы координат (условие инвариантности).

Пример 10.

Найти моменты инерции прямоугольника (рис. 2.44) относительно осей y_1 и z_1 и центробежный момент его относительно тех же осей.

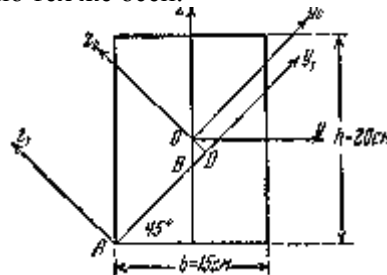


Рис. 2.44

Решение.

Центральные оси y и z как оси симметрии будут главными осями; моменты инерции сечения относительно этих осей равны:

$$I_y = \frac{20^3 \cdot 15}{12} = 10^4 \text{ см}^4,$$

$$I_z = \frac{15^3 \cdot 20}{12} = 5625 \text{ см}^4$$

Центральные моменты относительно повернутых осей y_0 и z_0 равны:

$$I_{y_0} = J_y \cos^2 45^\circ + J_z \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2} [10000 + 5625] = 7813 \text{ см}^4 = J_{z_0}^0$$

Центробежный момент инерции относительно осей y_0 и z_0 равен:

$$I_{yz}^0 = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 90^\circ = \frac{10000 - 5625}{2} = 2188 \text{ см}^4$$

Координаты центра тяжести прямоугольника относительно осей y_1 и z_1 равны:

$$y_1 = AB + BD = 7,5\sqrt{2} + 2,5 \cdot 0,7 = 12,35 \text{ см}$$

$$z_1 = OD = BD = 2,5 \cdot 0,7 = 1,75 \text{ см}$$

Моменты инерции относительно осей y_1 и z_1 равны:

$$I_{y_1}' = J_{y_0}^0 + F z_1^2 = 7813 + 300 \cdot 1,75^2 = 8734 \text{ см}^4$$

$$I_{z_1}' = J_{z_0}^0 + F y_1^2 = 7813 + 300 \cdot 12,35^2 = 53616 \text{ см}^4$$

Центробежный момент инерции равен:

$$I_{yz}' = I_{yz}^0 + F y_1 z_1 = 2188 + 300 \cdot 1,75 \cdot 12,35 = 8678 \text{ см}^4$$

Пример 11.

Моменты инерции сечения прямоугольной формы относительно главных осей равны соответственно $J_z = 400 \text{ см}^4$, $J_y = 200 \text{ см}^4$. При повороте на 45° моменты инерции относительно новых осей оказались одинаковыми. Чему равна их величина?

Решение.

Для решения задачи воспользуемся выражением (а) с учетом того, что центробежный момент инерции относительно главных осей равен нулю:

$$J_u = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha. \quad (\text{а}).$$

Подставим в формулу (а) численные значения для моментов инерции и угла поворота осей:

$$J_u = J_v = 400 \cos^2 45^\circ + 200 \sin^2 45^\circ = \frac{400 + 200}{2} = 300 \text{ см}^4.$$

Моменты сопротивления

Осевой момент сопротивления относительно рассматриваемой оси – величина равная моменту инерции относительно той же оси отнесенному к расстоянию до наиболее удаленной от этой оси точки

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}};$$

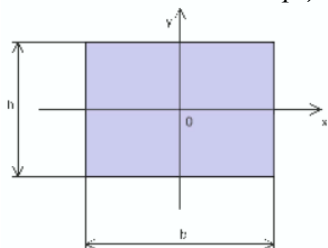
$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}.$$

Полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}$$

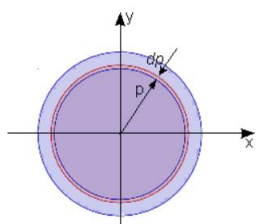
Осевой и полярный моменты инерции имеют размерность м^3 .

Осевые моменты инерции для некоторых сечений:

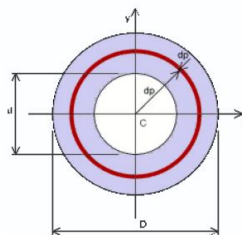


$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{J_y}{b/2} = \frac{b^2h}{6}$$



$$W_x = W_y = \frac{J_x}{R} = \frac{\pi R^3}{4}$$



$$W_x = W_y = \frac{J_x}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4),$$

Стандартные прокатные профили (двутавр, швеллер, уголок равнобокий, уголок неравнобокий), которые могут быть использованы как готовые элементы конструкций (балки, стойки, элементы ферм и т.д.). Размеры прокатных профилей стандартизированы и сведены в таблицы сортаментов прокатной стали, которые приводятся в приложениях почти всех учебников и сборников задач по сопротивлению материалов. В этих таблицах приводятся все размеры сечений и основные геометрические характеристики прокатных профилей в соответствии с их номером.

4.5. Нормальные и касательные напряжения при изгибе

При прямом и поперечном изгибе в сечениях балки возникают два силовых фактора (внутренних усилия): изгибающий момент M и поперечная сила Q . Расчетная практика показывает,

что изгибающий момент в большинстве случаев имеет решающее значение при подборе сечения и проверке прочности балочных конструкций.

Под действием нагрузки балка прогибается так, что ее нижние волокна удлиняются, а верхние укорачиваются, т.е. изгиб сопровождается появлением нормальных напряжений. При постепенном переходе от удлиняющихся волокон к укорачивающимся (или наоборот) встречается промежуточный слой волокон, который не меняет своей длины. Этот слой называется нейтральным, а линия его пересечения с плоскостью поперечного сечения балки – нейтральной линией или осью. Таким образом, нейтральная линия является геометрическим местом концентрации точек, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Для выяснения характера распределения и значения напряжений, вызываемых изгибающим моментом, обратимся к случаю чистого изгиба, характерный пример которого приведен ниже на рис. 2.44 (а).

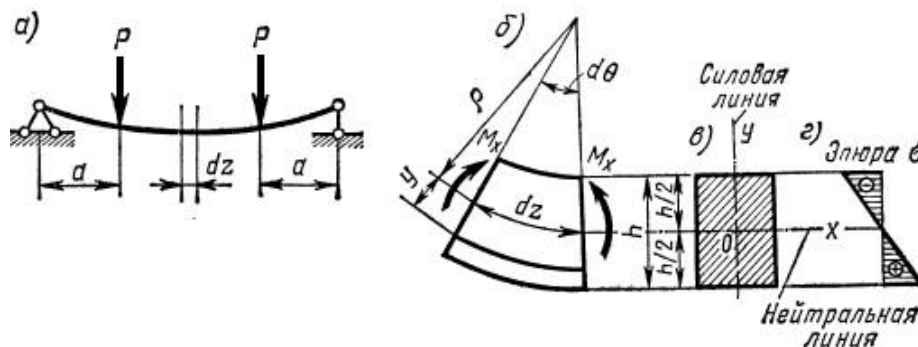


Рис. 2.44.

На выше представленной схеме (рис.2.44, а) двумя бесконечно близкими сечениями выделен участок балки длиной dz и изображен в укрупненном масштабе (рис. 2.44, б). Будучи параллельными друг другу до деформации оба сечения взаимно повернутся вокруг своих нейтральных линий на угол $d\theta$ после приложения нагрузки. Длина отрезка нейтрального слоя при этом не изменится.

Любое волокно, лежащее выше или ниже нейтрального слоя, изменит свою длину. Так, относительное удлинение волокон, расположенных на расстоянии « y » от нейтрального слоя, составляет:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (12)$$

где ρ – радиус кривизны изогнутой оси балки.

Эта зависимость выражает геометрическую сторону задачи о чистом изгибе: деформации волокон пропорциональны их расстоянию от нейтрального слоя. Осталось перейти от деформаций к напряжениям, т.е. рассмотреть физическую сторону задачи. Подставляем зависимость (12) в выражение закона Гука при осевом растяжении (сжатии) и получаем:

$$\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho} \quad (13)$$

т.е. нормальные напряжения изменяются по высоте сечения линейно.

После некоторых преобразований выражение (13) превращается в следующую формулу:

$$\sigma = \left(\frac{M_x}{J_x} \right) \cdot y \quad (14),$$

которая позволяет вычислять нормальные напряжения при чистом изгибе балки в любой точке ее поперечного сечения. Изгибающий момент « M_x » и координату « y » удобнее всего брать по абсолютному значению, а знак напряжения устанавливать исходя из характера деформирования балки (при растяжении – плюс, при сжатии – минус), т.е. по эпюре « M », ординаты которой откладывают со стороны растянутых волокон. Нетрудно догадаться, что максимальные значения напряжений возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии.

Проверку прочности выполняют по формуле:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (15)$$

В случае прямого поперечного изгиба в сечениях балки, кроме нормальных напряжений σ от изгибающего момента, возникают касательные напряжения τ от поперечной силы Q .

Закон распределения касательных напряжений по высоте сечения выражается формулой Д.И. Журавского

$$\tau = \frac{Q S_{x \text{отс}}}{I_x b_y}, \quad (16)$$

где $S_{x \text{отс}}$ — статический момент относительно нейтральной оси отсеченной части площади поперечного сечения балки, расположенной выше или ниже точки, в которой определяются касательные напряжения; b_y — ширина поперечного сечения балки на уровне рассматриваемой точки, в которой рассчитывается величина касательных напряжений τ .

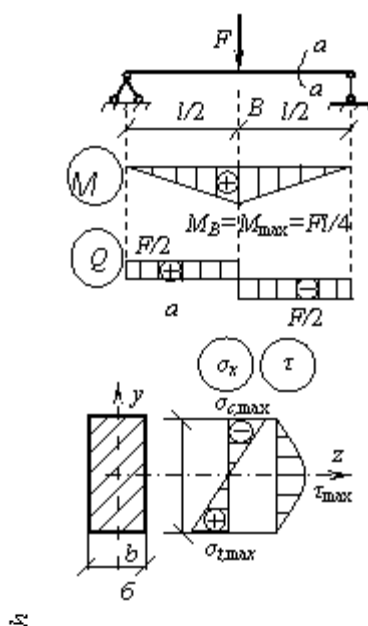
Условие прочности по касательным напряжениям записывается для сечения с максимальным значением поперечной силы $Q_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{I_x} \left(\frac{S_{x \text{отс}}}{b_y} \right)_{\max} \leq [\tau], \quad (17)$$

где $[\tau]$ — допустимое значение касательных напряжений для материала балки.

Пример.

Определить максимальное нормальное напряжение σ_x и максимальное касательное напряжение τ , возникающие в поперечных сечениях балки, представленной на рисунке. Принять $h = 10$ см, $b = 6$ см, $l = 4$ м, $F = 8$ кН.



Решение.

Из эпюры изгибающих моментов M определяем, что $M_{\max} = Fl/4 = 8$ кНм. Осевой момент сопротивления W_z для прямоугольного сечения определяется по формуле

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 10^2}{6} = 100 \text{ см}^3 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Используя формулу расчета напряжений при изгибе, находим

$$\sigma_{x \text{max}} = \sigma_{t \text{max}} = |\sigma_{s \text{max}}| = \pm \frac{M_z}{W_z} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{10^{-4}} = 80 \text{ МПа}.$$

На рис. б показана эпюра нормальных напряжений σ_x .

Из эпюры поперечных сил (рис. а) находим $Q_{\max} = F/2 = 4$ кН. Далее определяем осевой момент инерции для прямоугольного сечения

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 500 \text{ см}^4 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4,$$

и статический момент отсеченной части поперечного сечения (рис. б)

$$S'_z = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

По формуле находим

$$\tau = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{0,06 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \frac{0,06}{2} \left(\frac{0,1^2}{4} - y^2\right) = 400 \left(\frac{0,01}{4} - y^2\right).$$

Последняя формула показывает, максимальное значение касательного напряжения будет в точках поперечного сечения, расположенных на оси z, т.е. $\tau_{\max} = \tau(y=0) = 1 \text{ МПа}$. На рис. б показана эпюра касательных напряжений τ .

Пример.

Определить допускаемый минимальный диаметр d консольной балки (см. рис.) из стали с $R_y = 240 \text{ МПа}$. Принять, что $F = 1 \text{ кН}$, $l = 1 \text{ м}$, $\gamma_c = 1$. Собственный вес балки не учитывать.



Решение.

Для сплошного круглого поперечного сечения имеем $W_z = \pi r^3 / 4$, где r – радиус поперечного сечения балки. Максимальный изгибающий момент будет в заделке B: $M_{\max} = M_B = F2l + Fl = 3Fl = 3 \text{ кНм}$.

Из формулы находим момент сопротивления сечения

$$W_{z,\min} = M_{\max} / (R_y \gamma_c) = 3 \cdot 10^3 / 240 = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Приравняв $W_{z,\min} = W_z$, находим $r = 0,025 \text{ м} = 2,5 \text{ см}$ или $d = 5 \text{ см}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют поперечным сечением стержня?
2. Для чего необходимы геометрические характеристики плоских сечений?
3. Что такое статический момент плоской фигуры? Какова его размерность?
4. Какими свойствами обладает статический момент?
5. Относительно каких осей статический момент равен нулю?
6. Какую размерность имеет статический момент сечения?
7. Как определяется положение центра тяжести сечения?
8. Как определяются координаты центра тяжести сложного сечения?
9. Размерность моментов инерции сечения?
10. Для определения каких напряжений используют осевой момент сопротивления?
11. Чему равен осевой момент инерции относительно центральной оси?
12. Чему равен осевой момент инерции для круга и кольца?
13. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
14. Назовите основные геометрические характеристики поперечных сечений.

Задание.

Для заданных схем балок, изображенных на схемах а) и б), требуется:

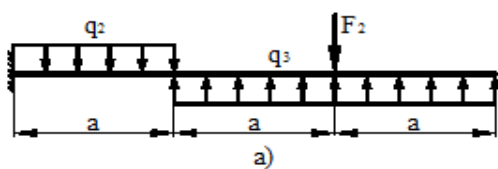
1) построить эпюры внутренних усилий Q и изгибающего момента M .

2) подобрать поперечное сечение для схемы а) круглое $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$; б) двутавровое $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$.

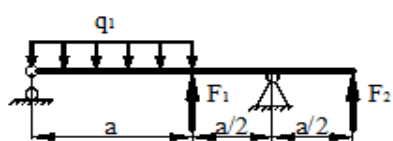
Данные для схем а) и б) взять из таблицы

Схема	a , м	$q_1=q_3$, кН/м	q_2 , кН/м	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	M_1 , кНм	M_2 , кНм	M_3 , кНм
1	2	5	30	10	35	10	10	35	10
2	0,8	10	25	15	30	20	15	30	20
3	1	15	20	20	25	30	20	25	30
4	1,2	20	15	25	20	40	25	20	40
5	1,4	25	10	30	15	10	30	15	10
6	1,6	30	5	35	10	20	35	10	20

1 схема

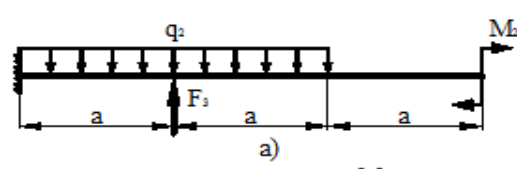


а)

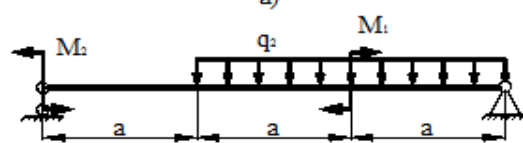


б)

2 схема

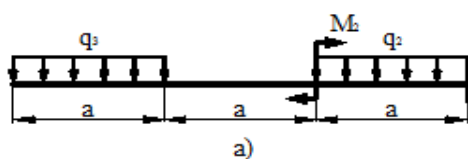


а)

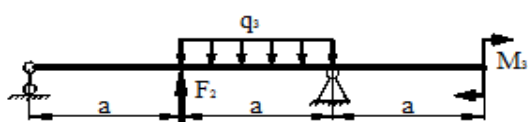


б)

3 схема

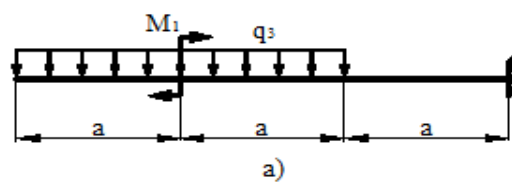


а)

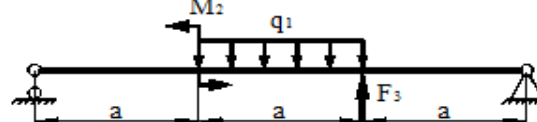


б)

4 схема

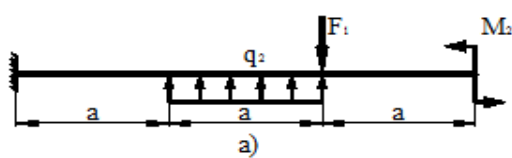


а)

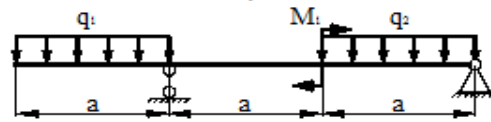


б)

5 схема

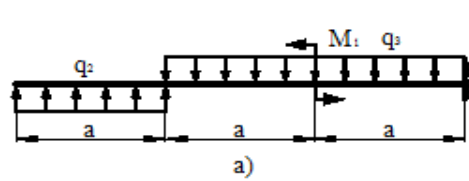


а)

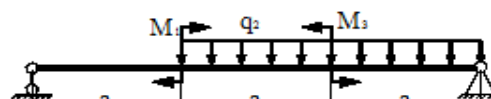


б)

6 схема



а)



б)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаханов, М.К. Сопротивление материалов [Электронный ресурс] : курс лекций / М. К. Агаханов, В. Г. Богопольский. – Электронные текстовые данные. – Москва : Московский государственный строительный университет, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2017. — 178 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/63782.html> – (Дата обращения: 05.12.2018).
2. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики : В 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – Санкт-Петербург : Изд-во «Лань», 1998. – 736 с.
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : статика и кинематика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Санкт-Петербург : Политехника, 1995. – 670 с.
4. Ганджунцев, М. И. Техническая механика : Часть 2. Строительная механика [Электронный ресурс] : учебное пособие / М. И. Ганджунцев, А. А. Петраков. – Электрон. текстовые данные. — Москва : Московский государственный строительный университет, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2017. – 68 с. — Режим доступа : <http://www.iprbookshop.ru/64539.html> – (Дата обращения: 05.12.2018).
5. Новожилов, И. В. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ / И. В. Новожилов, М. Ф. Зацепин. – Москва : Высш. шк., 1986. – 136 с.
6. Сопротивление материалов [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. А. Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская и др. ; ред. Н. А. Костенко. – Москва : Директ-Медиа, 2014. – 485 с. : рис., табл. – Библиогр. в кн. ; Режим доступа : <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=226084> – (Дата обращения: 05.12.2018).
7. Сопротивление материалов: учебник / П. А. Степин. – 12-е изд., стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2012. – 320 с
8. Сопротивление материалов : учебное пособие для студентов ВУЗ / Н. А. Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская и др. ; под ред. Н. А. Костенко. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 2007. – 488 с.
9. Сопротивление материалов : руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ / В. А. Копнов, С. Н. Кривошапко. - 2-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2005. – 351 с.
10. Сопротивление материалов : учебник для студентов ВУЗ / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. – 7-е изд., стер. - Москва : Высшая школа, 2009. – 560 с
11. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / С. М. Тарг. – Москва : Высшая школа, 1995. – 416 с.
12. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – Москва : Изд-во «Лань», 2001. – 768 с.

Учебное издание

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Учебно-методическое пособие

Составители

Кысыдак Алена Санчайевна, Чылбак Алдынай Александровна, Куулар Долаана Сергеевна

Редактор А.Р. Норбу

Дизайн обложки К.К. Сарыглар

Сдано в набор: 12.02.2019. Подписано в печать: 27.03.2019.

Формат бумаги 60×84 ¹/₈. Бумага офсетная.

Физ. печ. л. 12,5. Усл. печ. л. 11,6. Заказ № 1487. Тираж 50 экз.

667000, Республика Тыва, г. Кызыл, ул. Ленина, 36

Тувинский государственный университет

Издательство ТувГУ