ФГБОУ ВО «ТУВИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебно-методическое пособие для студентов-бакалавров экономических направлений

АННОТАЦИЯ

Пособие предназначено для студентов бакалавров экономических направлений. Содержит краткие теоретические сведения, примеры решения базовых задач, упражнения для практических занятий, задачи для индивидуальной работы.

Авторы-составители:

А.И. Сотников, Н.Б. Ивирсина

г. Кызыл – 2021 год

ФГБОУ ВО «ТУВИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики и методики преподавания математики

ТЕОРИЯ ИГР
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебно-методическое пособие для студентов

бакалавров экономических направлений

Кызыл – 2021 г.

Печатается по решению учебно-методического Совета Тувинского государственного университета

УДК 159.8

ББК $\frac{22.185.41}{Т33}$

Теория игр и исследование операций : учебно-методическое пособие для студентов бакалавров экономических направлений / А.И. Сотников, Н.Б. Ивирсина — Кызыл : Издательство Тувинского государственного университета, 2021. – 105 с.

Пособие предназначено для студентов бакалавров экономических направлений. Содержит краткие теоретические сведения, примеры решения базовых задач, упражнения для практических занятий, задачи для индивидуальной работы. Может быть рекомендовано студентам физико-математического факультета, изучающим отдельные главы в рамках смежных дисциплин.

Рецензенты:

- **Севек Вячеслав Кыргысович**, доктор экономических наук, профессор, декан экономического факультета Тувинского государственного университета.
- **Донгак Буян Алексеевич**, кандидат экономических наук, заместитель директора Тувинского института гуманитарных и прикладных социально-экономических исследований.

Оглавление

Введение

Данное пособие содержит материал применения методов математического моделирования в экономических процессах. Работа предназначена, в первую очередь, для студентов старших курсов экономического факультета по направлениям подготовки бакалавров 38.03.01 Экономика и 38.03.05 Бизнес-информатика в качестве учебно-методического пособия по дисциплине «Теория игр», но будет и полезно студентам-бакалаврам физико-математического факультета по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

Пособие представляет собой практикум по решению задач по разделам рабочей программы дисциплины «Теория игр» для студентов экономического факультета Тувинского государственного университета и составлено по материалам, которые накоплены авторами в ходе многолетнего опыта преподавания указанной дисциплины для студентов тувинского государственного университета. Каждая глава пособия содержит краткие теоретические сведения, разбор решения типовых задач и сборник задач для самостоятельного решения.

Первая глава «Введение в исследование операций» посвящена методам линейной оптимизации, которые имеют конкретные приложения в экономике, в частности в маркетинговых исследованиях. В пособии рассматриваются два метода решения задачи линейного программирования. Графический метод предназначен для наглядного решения задачи двух переменных, симплекс-метод – универсальный итерационный метод решения задачи любой размерности.

Вторая глава «Матричные игры» содержит материал элементарной теории игр. Под матричными играми понимается модель антагонистической игры двух лиц с нулевой суммой. В пособии рассмотрены методы нахождения оптимального решения в матичной игре, как в частных случаях, когда платежная матрица содержит не более двух строк или двух столбцов, так и общем случае.

В третьей главе «Игры с природой» рассматриваются методы принятия решений в условиях неопределенности и риска. В частности, решается задача выбора оптимальной стратегии развития предприятия в условиях трансформации рынка.

Четвертая глава представляет собой комплект индивидуальных работ для студентов, состоящий из типовых задач по темам настоящего пособия.

Пособие может быть рекомендовано для студентов экономического факультета, изучающих дисциплину очно, так и для студентов заочной формы обучения.

Глава 1. Введение в исследование операций

Операция – это система действий, объединенных единым замыслом и направленных на достижение какой-то цели.

Примеры: производство товаров с наименьшими затратами, продажа товаров с максимальной прибылью, перевозка товаров с наименьшими транспортными затратами и т.д.

Исследование операций – это раздел современной прикладной математики, ориентированный на построение, разработку и применение математических моделей принятия оптимальных решений.

Область приложений для методов исследования операций весьма обширна: это инженерно-технические, технико-экономические, социально-экономические задачи, а также задачи управления в различных сферах.

Цель исследования операций — найти оптимальное решение задачи в условиях ограничений (экономических, технических и др.).

Основная **задача исследования операций** – количественное обоснование оптимального решения.

Оптимальное решение – это решение, которое предпочтительнее других по определенному критерию эффективности.

Критерий эффективности операции количественно выражается в виде целевой функции.

Постановка задачи.

Оптимизационная задача – это экономико-математическая задача, которая состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений.

Большое число экономических задач сводится к линейным математическим моделям, когда целевая функция линейна и область допустимых значений определяется системой линейных равенств и неравенств. Традиционно оптимизационные линейные математические модели называются моделями линейного программирования.

Пример. Фабрика имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов: рабочую силу, сырье и оборудование. Фабрика может выпускать ковры четырех видов. В таблице приведены: количество имеющихся ресурсов; количество единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида и их стоимость.

Ресурсы	**Нормы расхода ресурсов на единицу изделия**				**Наличие ресурсов**
	ковер «Лужайка»	ковер «Силуэт»	Ковер «Детский»	ковер «Дымка»	
Труд (чел./дней)	7	2	2	6	80

Сырье Кг	5	8	4	3	480
Оборудование станков/ч.	2	4	1	8	130
Цена (тыс. руб.)	3	4	3	1	

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором будет максимальной общая стоимость продукции.

<u>Составление математической модели задачи:</u>

Шаг 1 – введение переменных задачи.

План выпуска продукции определяет, какое количество каждого изделия необходимо произвести.

Введем предположения:

x_1 – столько нужно произвести ковров «Лужайка»;

x_2 – столько нужно произвести ковров «Силуэт»;

x_3 – столько нужно произвести ковров «Детский»;

x_4 – столько нужно произвести ковров «Дымка».

Шаг 2 – определение области допустимых решений (ОДР).

В ОДР входят ограничения на ресурсы и на значения переменных.

Количество затраченных при производстве ресурсов ограниченно их наличием (нельзя затратить больше, чем есть в наличии). Значения переменных ограниченны «здравым смыслом» (нельзя произвести отрицательное количество товаров).

Ограничения выражаются в виде неравенств:

-на затраченный ресурс «Труд»: $7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 80$;

-на затраченный ресурс «Сырье»: $5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 480$;

-на затраченный ресурс «Оборудование»: $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \leq 130$;

-на значения переменных: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

Множество значений переменных x_1, x_2, x_3, x_4 удовлетворяющих системе ограничений и называют ***<u>областью допустимых решений</u>*** (ОДР).

Шаг 3 – составление целевой функции (ЦФ) задачи.

<u>Целевая функция</u> будет выражать общую стоимость произведенной продукции.

<u>Оптимальным решением</u> данной задачи будет такое, при котором ЦФ будет принимать ***максимальное значение***.

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

Графический метод решения оптимизационных задач

Графическим методом целесообразно решать задачи, содержащие не более двух переменных.

Пример. Найти оптимальное решение при ограничениях:

$$f = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача содержит 2 переменных. Решим ее графическим методом.

Графический способ состоит из двух этапов:

1.Построение ОДР на координатной плоскости.

2.Поиск оптимального решения среди всех точек ОДР.

Шаг 1. Строим на плоскости ОДР.

Система неравенств в задаче задает ОДР:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Геометрически каждое из неравенств системы представляет собой полуплоскость и прямую на ее границе.

Построим полуплоскость для первого неравенства: $2x_1 + x_2 \le 20$.

Неравенство заменяем равенством и получаем уравнение прямой:

$$2x_1 + x_2 = 20.$$

Строим график этой прямой на плоскости $\mathrm{X_1OX_2}$. Данная прямая делит плоскость на две полуплоскости.

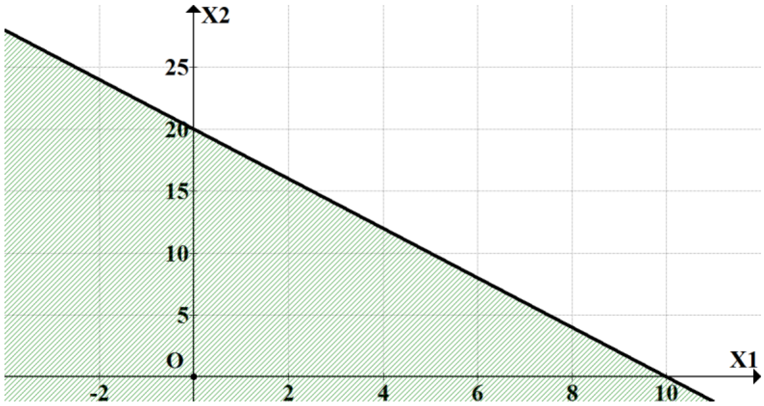
Чтобы определить, какая полуплоскость принадлежит неравенству, выберем произвольную точку (не принадлежащую прямой) и подставим ее координаты в левую часть неравенства. Если неравенство окажется верным, то нужная полуплоскость и выбранная точка окажутся по одну сторону от граничащей прямой, иначе по разные стороны.

Замечание: удобно взять точку - начало координат.

Начало координат - O(0;0):

$2 \cdot 0 + 0 \le 20$, т.е. $0 \le 20$ (верно).

Точка O и полуплоскость находятся по одну сторону от прямой.

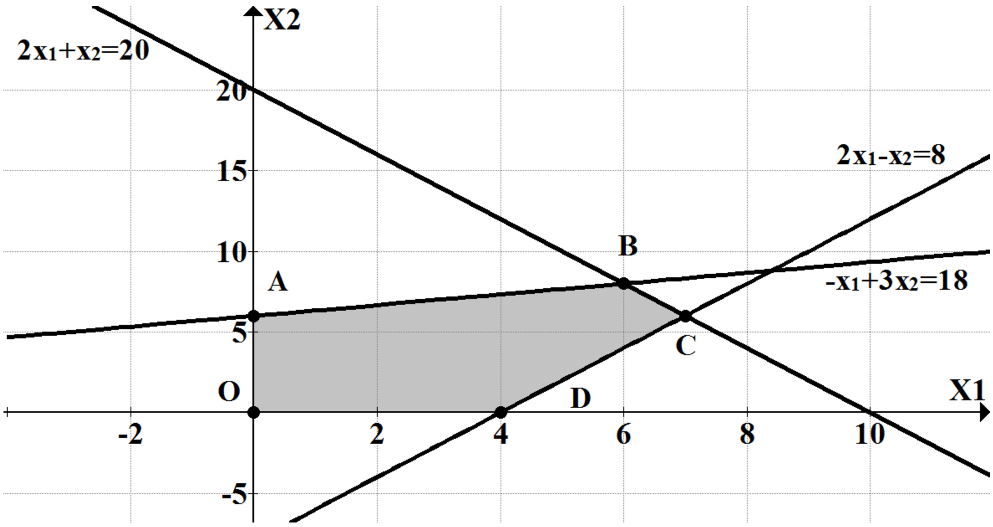


Аналогично построим полуплоскости для остальных неравенств ОДЗ:

$$-x_1 + 3x_2 \leq 18 \text{ и } 2x_1 - x_2 \leq 8.$$

Неравенства $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ задают точки расположенные в первой четверти.

ОДР получается на пересечении всех построенных полуплоскостей и представляет собой замкнутый выпуклый многоугольник OABCD.



Шаг 2. Поиск оптимального решения на ОДР.

Среди множества всех точек ОДЗ нужно найти такую точку, в которой ЦФ будет иметь оптимальное решение.

$$f = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

В примере нужно найти такую точку ОДЗ, где ЦФ примет максимальное значение.

Замечание:

-если такая точка одна, тогда задача имеет единственное решение;

-если такая точка не одна, тогда задача имеет не одно решение;

-если таких точек нет, тогда задача не имеет решения.

Рассмотрим, так называемые линии уровня ЦФ.

<u>Линией уровня функции</u> называется множество точек, на которых функция принимает постоянное значение $f = \text{const}$.

Линии уровня ЦФ: $f = 4x_1 + 3x_2 = k, k = \text{const}$.

Постоянное значение берется произвольно. Возьмем, например, $k = 0$.

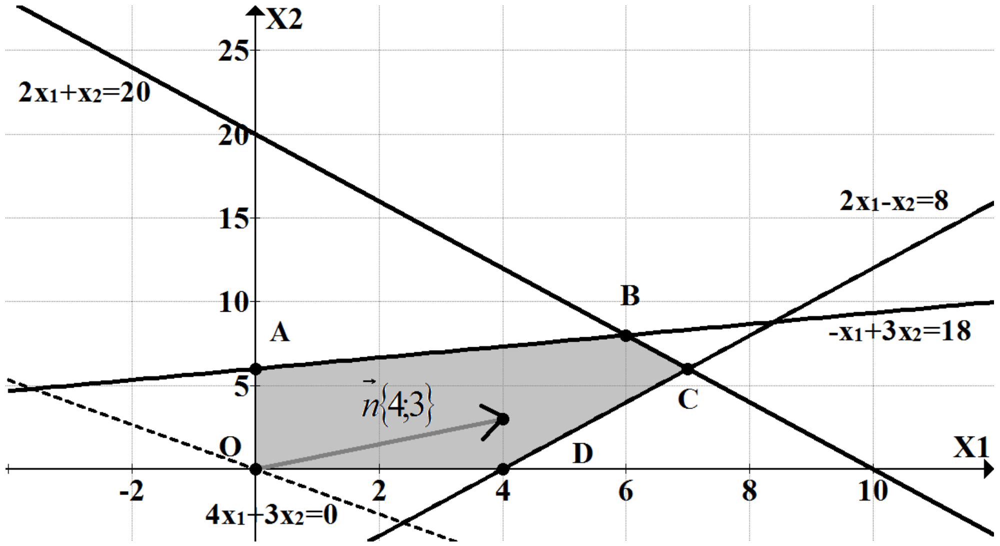
$$4x_1 + 3x_2 = 0.$$

Получилось уравнение прямой. Строим график этой прямой на той же плоскости, что и ОДЗ.

Если брать другие значения постоянной, то получим семейство параллельных прямых.

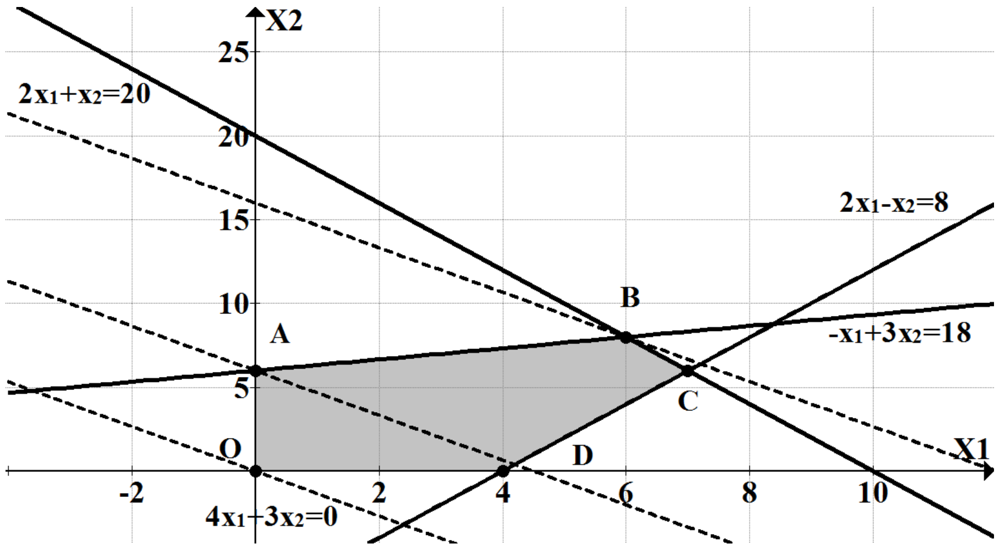
Вектор с координатами из коэффициентов ЦФ (вектор градиента) указывает направление возрастания ЦФ, а противоположный вектор – направление убывания ЦФ.

$$\vec{n}\{4;3\}$$



Чтобы найти максимальное (минимальное) значение ЦФ, необходимо двигать линию уровня ЦФ параллельно самой себе в направлении возрастания (убывания) по точкам ОДР. Двигать необходимо пока у ОДР и ЦФ есть хотя бы одна общая точка. В «крайней» общей точке ОДР и линии уровня ЦФ получим оптимальное значение для ЦФ.

В примере, будем двигать линию уровня ЦФ в направлении возрастания параллельно самой себе по точкам ОДР: $O \to A \to B$.



На графике «крайняя» общая точка ОДР и ЦФ это точка B. Если продолжать двигать линию уровня ЦФ, то она «выйдет» из ОДР.

Точка B является точкой пересечения прямых:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 \\ -x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases}$$

Необходимо любым известным способом найти координаты этой точки, а затем подставить их в ЦФ. Получившееся значение и будет являться максимальным.

Найдем точку пересечения, например, методом сложения уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 \\ -2x_1 + 6x_2 = 36 \end{cases}; \ 7x_2 = 56; \ x_2 = 8; \ x_1 = 6.$$

$$f_{max} = 4x_1 + 3x_2 = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 48.$$

Ответ: $\mathrm{x}_1 = 6, \mathrm{x}_2 = 8$, максимальное значение $\mathrm{f} = 48$.

Замечание: линии уровня ЦФ, проходящие через точки B и C находятся достаточно близко друг к другу. Если по графику сложно определить, какая точка является «крайней», то можно просто найти координаты и точки C. Подставив также их в ЦФ, необходимо будет потом сравнить значения ЦФ в двух точках. Какое значение окажется наибольшим, то и нужно записывать в ответ.

Пример. Найти оптимальное решение при ограничениях:

$$f = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$$

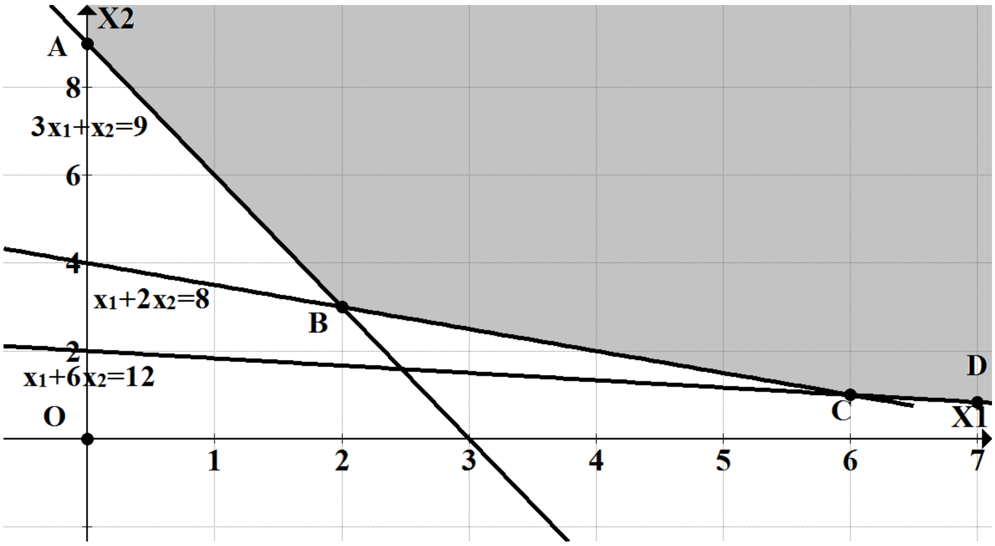
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Шаг 1. Строим на плоскости ОДР.

Следующая система неравенств задает ОДР:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Строим множество точек плоскости, удовлетворяющее данной системе неравенств. Это и будет область допустимых решений. В нашем примере это область не ограничена сверху, она изображена на рисунке снизу. Неограниченность ОДР сверху означает, что целевая функция не имеет максимума, но в указанном примере, мы решаем задачу на минимум ЦФ.

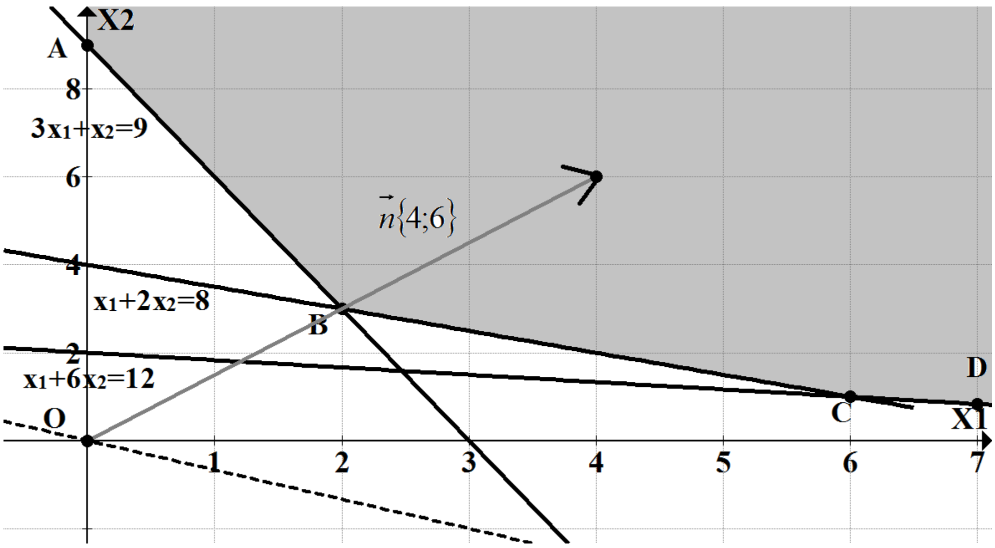


ОДР представляет собой открытую область ABCD.

Шаг 2. Поиск оптимального решения на ОДР.

Строим линию уровня ЦФ при $k = 0$: $4x_1 + 6x_2 = 0$

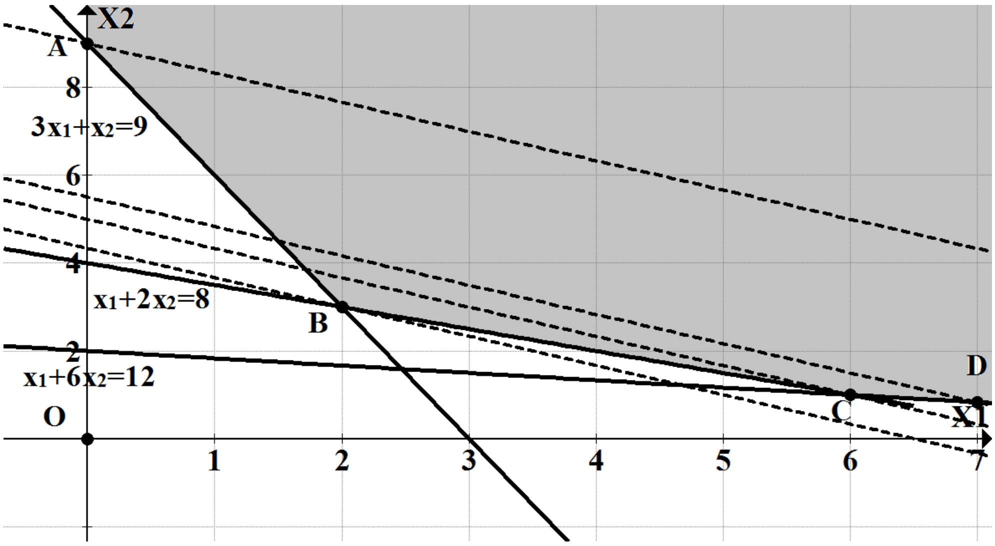
и нормальный вектор: $\vec{n}\{4; 6\}$



Построенная линия уровня ЦФ и ОДЗ не имеют общих точек. Следовательно, необходимо брать другие значения постоянной:

$$f = 4x_1 + 6x_2 = k, k = \text{const}.$$

При достаточной большом значении постоянной у линии уровня ЦФ и ОДЗ появятся общие точки. Чтобы найти минимальное значение для ЦФ, то двигать линию уровня будем в направлении убывания параллельно самой себе по точкам ОДЗ: $A \to D \to C \to B$ (противоположно нормальному вектору)



«Крайняя» точка B.

Это точка пересечения прямых: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \\ -3x_1 - 6x_2 = -24 \end{cases}; \Leftrightarrow -5x_2 = -15;\ x_2 = 3;\ x_1 = 2.$$

$$f_{min} = 4x_1 + 6x_2 = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26.$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 2$, минимальное значение $f = 26$.

Пример. Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют три вида ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице.

Виды ресурсов	**Число ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции.**		**Запас ресурсов**
	P_1	P_2	
S_1	4	1	7
S_2	1	2	10
S_3	3	1	6
S_4	6	1	10
Прибыль	7	2	

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

1-этап: Математическая модель задачи:

Шаг 1 – введение переменных задачи.
x_1 – столько нужно произвести продукции вида P_1;
x_2 – столько нужно произвести продукции вида P_2.

Шаг 2 – определение области допустимых решений (ОДР).
Ограничения:

-на затраченный ресурс S_1: $4x_1 + x_2 \leq 7$;
-на затраченный ресурс S_2: $x_1 + 2x_2 \leq 10$;
-на затраченный ресурс S_3: $3x_1 + x_2 \leq 6$;
-на затраченный ресурс S_4: $6x_1 + x_2 \leq 10$;
-на значения переменных: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

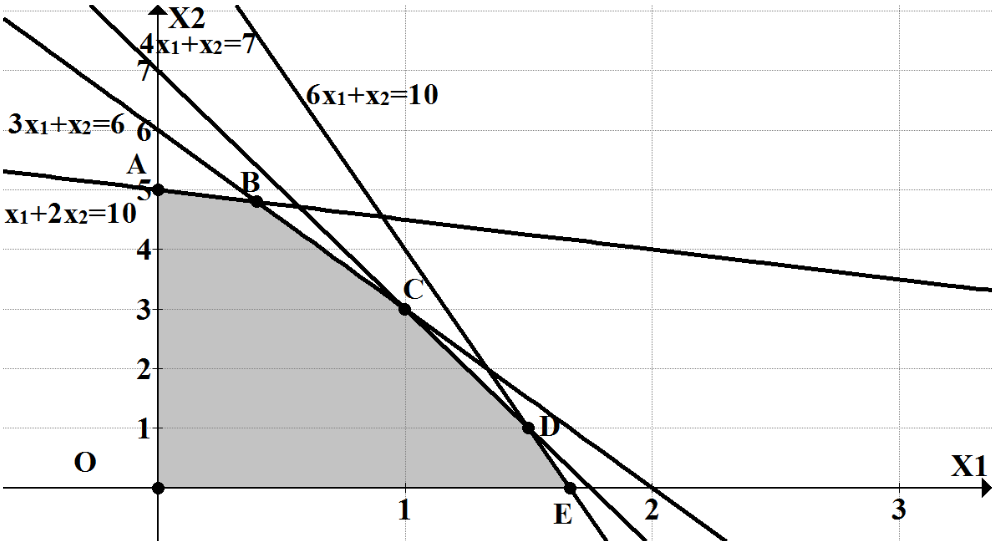
Шаг 3 – составление целевой функции (ЦФ) задачи.

$$f = 7x_1 + 2x_2 \to \max$$

2-этап: Решение оптимизационной задачи графическим методом:

Шаг 1. Строим на плоскости ОДР.

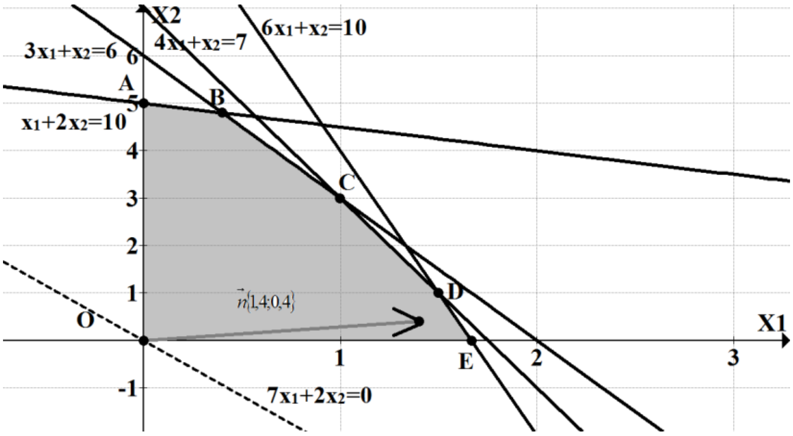
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ 6x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$



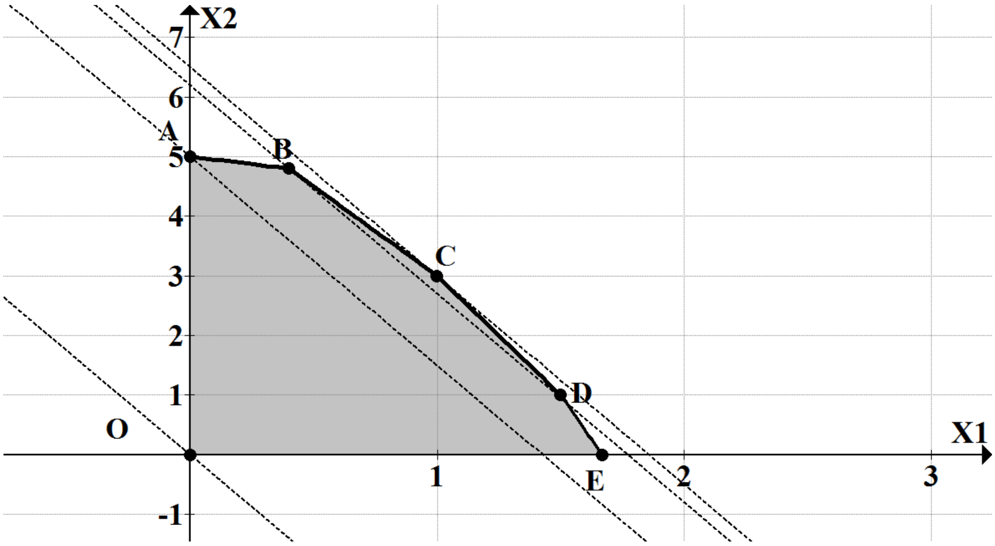
ОДЗ представляет собой закрытую область OABCDE.

Шаг 2. Поиск оптимального решения на ОДР.

Строим линию уровня ЦФ $7x_1 + 2x_2 = 0$
и нормальный вектор: $\vec{n}\{7; 2\} \uparrow\uparrow \vec{n}\{1{,}4; 0{,}4\}$ (сонаправленный вектор).



Двигаем линию уровня ЦФ в направлении возрастания параллельно самой себе по точкам ОДЗ: $O \to A \to B \to C$.



«Крайняя» точка С.

Это точка пересечения прямых:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 7 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{cases}; \Leftrightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3.$$

$$f_{max} = 7x_1 + 2x_2 = 13.$$

Ответ: необходимо произвести продукции вида:

P_1- 1 шт., P_2 – 3 шт. Максимальная прибыль 13 денежных единиц.

Упражнения

Найти оптимальное решение при ограничениях с использованием графического метода:

1. $f = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 11, \\ x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $f = 5x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 16, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. $f = x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4. $f = 4x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 18, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. Предприятие, располагающее ресурсами сырья четырех видов A, B, C и D, может производить продукцию двух видов P_1 и P_2. В таблице указаны затраты ресурсов на изготовление 1 т продукции, объем ресурсов и прибыль, получаемая от продажи 1 т соответствующей продукции.

Вид сырья	Вид продукции		Объем ресурсов, т
	P_1	P_2	
A	0	1	5
B	1	0	4
C	2	1	9
D	2	1	6
Прибыль, руб.	2	5	

Определить ассортимент выпускаемой продукции, при котором полученная прибыль будет максимальной.

6. Имеется два вида корма $К_1$ и $К_2$, содержащие питательные вещества $Р_1$, $Р_2$, $Р_3$. Содержание числа единиц питательных веществ в единице каждого вида корма, необходимый минимум питательных веществ в суточном рационе животных и стоимость единицы корма приведены в таблице.

Питательное вещество	Содержание питательных веществ в единице корма		Необходимый минимум питательных веществ
	$К_1$	$К_2$	
$Р_1$	3	1	9
$Р_2$	1	2	8
$Р_3$	1	6	12
Стоимость единицы корма	4	6	

Составить суточный рацион кормления животных, имеющий минимальную стоимость, которая обеспечивает содержание необходимого количества питательных веществ.

7. Для изготовления двух видов изделий А и В завод использует в качестве сырья алюминий и медь. На изготовление изделий заняты токарные и фрезерные станки. Исходные данные приведены в таблице.

Вид ресурсов	Нормы расходов на 1 изделие		Объем ресурсов
	А	В	
Алюминий, кг	0	1	4
Медь, кг	4	1	7
Токарные станки, станко-час	2	1	5
Фрезерные станки, станко-час	6	1	10
Прибыль за 1 изделие, тыс.руб.	4	3	

Определить ассортимент выпускаемой продукции, при котором полученная прибыль будет максимальной.

8. Обработка деталей A и B может производиться на трех станках, причем каждая деталь должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль от реализации детали A – 100 руб., детали B – 160 руб. Исходные данные приведены в таблице.

Станки	**Норма времени на обработку одной детали, ч**		**Время работы станка, ч**
	A	B	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Определить производительную программу, максимизирующую прибыль при условии: спрос на деталь A – не менее 300 шт., на деталь B – не более 200 шт.

Симплекс-метод решения оптимизационных задач

Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцингом в 1949г., однако еще в 1939г. идеи метода были разработаны российским математиком Л.В.Канторовичем.

Симплексный метод – это повторяющийся процесс решения системы уравнений, который начинается с опорного решения и продолжается до тех пор, пока целевая функция не достигнет оптимального значения или решение окажется неразрешимым.

Алгоритм симплексного метода:

Шаг 1. Поиск начального опорного решения.
Шаг 2. Проверка решения на оптимальность:
а) если решение оптимально, то алгоритм завершен.
б) если решение не оптимально, то переход к Шагу 3.
Шаг 3. Поиск другого допустимого решения:
а) если допустимого решения не существует, то алгоритм завершен.
б) если допустимое решение существует, то возвращение к Шагу 2.

Данный метод позволяет решать большой класс задач с большим конечным количеством переменных.

Для различного вида ЦФ и ОДЗ существуют разные условия оптимальности и допустимости решения. Подробно рассмотреть все возможные случаи можно самостоятельно в дополнительной литературе.

Рассмотрим решение некоторого типа задач на примере.

Пример. Найти оптимальное решение при ограничениях:

$$f = 6x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 13, \\ x_1 + 11x_2 + 2x_3 \le 14, \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge -1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Особенности примера.

1.**Оптимальное значение ЦФ максимальное.**

Условие оптимальности для нахождения минимального значения ЦФ рассматривать не будем. Но ниже дополнительно рассмотрим такое понятие, как ***двойственная задача***. Она позволит в некоторых случаях от нахождения минимума функции перейти к нахождению максимума функции, предварительно преобразовав первоначальную задачу.

2. **У ОДР неравенства вида $\le$ и справа стоит неотрицательное число**.

Третье неравенство вида $\ge$, но справа стоит отрицательное число. Если умножить правую и левую часть неравенства на (-1), то знак неравенства поменяется на $\le$, и справа будет стоять неотрицательное число.

Замечание: неравенства, связанные с не отрицательностью переменных в решении симплекс-методом в явном виде, не участвуют.

Преобразуем ОДР:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 13, \\ x_1 + 11x_2 + 2x_3 \leq 14, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1. \end{cases}$$

Шаг 1. Поиск начального опорного решения.

Для использования симплексного метода задачу линейного программирования нужно привести к так называемому ***каноническому виду***, т.е. виду, когда задача представлена в виде системы уравнений.

Например, чтобы числовое неравенство: $2 \leq 7$ преобразовать в равенство, нужно к левой части добавить неотрицательное число: $2 + 5 = 7$.

Аналогично поступим и с неравенствами в ОДР. Введем по количеству неравенств ОДР неотрицательные «фиктивные» переменные: x_4, x_5, x_6 и добавим их к левой части неравенств. Такие переменные называют ***балансовыми***.

У целевой функции $f = 6x_1 + 4x_2 + x_3$ перенесем переменные в одну сторону: $f - 6x_1 - 4x_2 - x_3 = 0$. Система ограничения примет вид :

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 13, \\ x_1 + 11x_2 + 2x_3 + x_5 = 14 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ f - 6x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Задача линейного программирования приведена к каноническому виду.

Выпишем коэффициенты при неизвестных и свободные члены (СЧ) системы в виде таблицы (***симплекс-таблица***). Переменные, входящие только в одно уравнение с коэффициентом 1, а в другие с коэффициентом 0, обозначим как ***базисные переменные*** (БП). Коэффициенты целевой функции выделим отдельно (***f*- строка**).

f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СЧ	БП
0	4	1	2	1	0	0	13	x_4
0	1	11	2	0	1	0	14	x_5
0	-1	1	1	0	0	1	1	x_6
1	-6	-4	-1	0	0	0	0	f

Решением системы будем выбирать то, для которого небазисные переменные равны нулю, а базисные переменные равны значениям СЧ.

Начальное опорное решение:

Небазисные переменные: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$;

Базисные переменные: $x_4 = 13, x_5 = 14, x_6 = 1$;

Значение ЦФ: $f = 0$.

Шаг 2. Проверка решения на оптимальность:

Условие оптимальности для максимального значения ЦФ:

Если все коэффициенты при небазисных переменных в f-строке положительны или равны нулю, то полученное решение является оптимальным.

В примере, в симплекс-таблице в f-строке при небазисных переменных присутствуют отрицательные коэффициенты, следовательно, опорное решение не является оптимальным.

Шаг 3. Поиск другого допустимого решения:

Чтобы найти другое допустимое решение, необходимо одну из переменных, которая ранее была небазисной сделать базисной («ввести в базис»). При этом, поменяв ее местами с другой переменной, которая наоборот ранее была базисной, а станет небазисной («вывести из базиса»). Для этого нужно предварительно выбрать столбец и строку в симплекс-таблице.

- выбранный столбец будет соответствовать небазисной переменной, которую «введем в базис».

- выбранная строка будет соответствовать уравнению, в котором данная переменная станет базисной.

Для выбора столбца и строки используем следующие правила:

1. Выбранному столбцу соответствует наибольший по модулю отрицательный коэффициент в f- строке.

2. Выбранной строке соответствует наименьшее из значений, полученных при делении свободных членов на соответствующие положительные коэффициенты выбранного столбца (неотрицательные коэффициенты в расчете не участвуют).

Критерий недопустимости решения.

Если все коэффициенты выбранного столбца окажутся неположительными, то задача не имеет оптимального решения.

Чтобы выбранная переменная, которую «вводим в базис» осталась только в одном выбранном уравнении, нужно исключить ее из остальных уравнений с помощью стандартных преобразований системы уравнений:

-умножение или деление уравнения на любое число неравное нулю;

-сложение уравнения с другим, умноженным на любое число неравное нулю.

f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СЧ	БП	min
0	4	1	2	1	0	0	13	x_4	13/4
0	1	11	2	0	1	0	14	x_5	14/1
0	-1	1	1	0	0	1	1	x_6	-
1	-6	-4	-1	0	0	0	0	f	

Выбираем столбец: в f-строке наибольший по модулю отрицательный коэффициент: -6 и ему соответствует переменная x_1.

Выбираем строку: СЧ делим на соответствующие положительные коэффициенты выбранного столбца (отрицательный коэффициент не берем в расчет) и выбираем минимальное число: $\min(13/4; 14) = 13/4$ и ему соответствует 1-ое уравнение.

Переменную x_1 «введем в базис», оставив ее только в 1-ом уравнении.

Вначале разделим коэффициенты выбранного 1-го уравнения на коэффициент, находящийся на пересечении выбранных столбца и строки: 4.

f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СЧ	БП	Min
0	1	1/4	1/2	1/4	0	0	13/4	x_4	13/4
0	1	11	2	0	1	0	14	x_5	14/1
0	-1	1	1	0	0	1	1	x_6	-
1	-6	-4	-1	0	0	0	0	f	

Исключим переменную x_1 из 2-го, 3-го и f − уравнений:

- 2-ое уравнение сложим с 1-ым, умноженным на (-1);
- 3-е уравнение сложим с 1-ым;
- f- уравнение сложим с 1-ым, умноженным на (+6).

f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СЧ	БП
0	1	1/4	1/2	1/4	0	0	13/4	x_1
0	0	43/4	3/2	-1/4	1	0	43/4	x_5
0	0	5/4	3/2	1/4	0	1	17/4	x_6
1	0	-5/2	2	3/2	0	0	39/2	f

Допустимое решение:

Небазисные переменные: $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$;
Базисные переменные: $x_1 = 13/4, x_5 = 43/4, x_6 = 17/4$;
Значение ЦФ: $f = 39/2$.
Так как допустимое решение нашлось, то опять переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Проверка решения на оптимальность:

В симплекс-таблице в f-строке при небазисных переменных присутствует отрицательный коэффициент, следовательно, найденное допустимое решение не является оптимальным.

Шаг 3. Поиск другого допустимого решения:

f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СЧ	БП	min
0	1	1/4	1/2	1/4	0	0	13/4	x_1	13
0	0	43/4	3/2	-1/4	1	0	43/4	x_5	1
0	0	5/4	3/2	1/4	0	1	17/4	x_6	17/5
1	0	-5/2	2	3/2	0	0	39/2	f	

Выбираем столбец: в f- строке наибольший по модулю отрицательный элемент: $-5/2$ и ему соответствует переменная x_2.

Выбираем строку: СЧ делим на соответствующие положительные элементы выбранного столбца и выбираем минимальное число: $\min(13; 1; 17/5) = 1$ и ему соответствует 2-ое уравнение.

Переменную x_2 «введем в базис», оставив ее только во 2-ом уравнении.

Разделим коэффициенты выбранного 2-го уравнения на $43/4$.

f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СЧ	БП	min
0	1	1/4	1/2	1/4	0	0	13/4	x_1	13
0	0	1	6/43	-1/43	4/43	0	1	x_5	1
0	0	5/4	3/2	1/4	0	1	17/4	x_6	17/5
1	0	-5/2	2	3/2	0	0	39/2	f	

Исключим переменную x_2 из 1-го, 3-го и $f -$ уравнений:
- 1-ое уравнение сложим со 2-ым, умноженным на (-1/4);
- 3-е уравнение сложим со 2-ым, умноженным на (-5/4);
- f- уравнение сложим со 2-ым, умноженным на (+5/2).

f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	СЧ	БП
0	1	0	20/43	11/43	-1/43	0	3	x_1
0	0	1	6/43	-1/43	4/43	0	1	x_2
0	0	0	57/43	12/43	-5/43	1	3	x_6
1	0	0	101/43	62/43	10/43	0	22	f

Допустимое решение:

Небазисные переменные: $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$;
Базисные переменные: $x_1 = 3, x_2 = 1, x_6 = 3$;
Значение ЦФ: $f = 22$.
Так как допустимое решение нашлось, то опять переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Проверка решения на оптимальность:

В симплекс-таблице в f-строке при небазисных переменных нет отрицательных коэффициентов.

Решение является оптимальным и алгоритм завершен.

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 0$, максимальное значение $f = 22$ («фиктивные» переменные в ответ не записываются).

Упражнения.

Решить задачи симплексным методом.

1. $f = 2x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $f = 5x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 10, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. $f = 2x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max$

4. $f = 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8, \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge -3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 \ge -6, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 \le 11, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

5. Для изготовления трех видов изделий P_1, P_2 и P_3 используется четыре вида материалов S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы материалов, технологические нормы расходов материалов на каждое изделие и цена единицы изделия приведены в таблице.

Вид материалов	**Норма расхода материалов на одно изделие, кг**			**Запас материала, кг**
	P_1	P_2	P_3	
S_1	4	2	1	150
S_2	6	0	2	170
S_3	0	2	4	100
S_4	8	7	0	200
Цена, руб.	100	150	200	

Составить план выпуска изделий, обеспечивающий их максимальный выпуск по стоимости.

6. Фабрика имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов: рабочую силу, сырье и оборудование. Фабрика может выпускать ковры четырех видов. В таблице приведены: количество имеющихся ресурсов; количество единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида и их стоимость.

Ресурсы	**Нормы расхода ресурсов на единицу изделия**				**Наличие ресурсов**
	ковер «Лужайка»	ковер «Силуэт»	ковер «Детский»	ковер «Дымка»	
Труд (чел./дней)	7	2	2	6	80
Сырье кг	5	8	4	3	480
Оборудование станков/ч.	2	4	1	8	130
Цена (тыс.руб.)	3	4	3	1	

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором будет максимальной общая стоимость продукции.

Двойственная задача

Заданную оптимизационную задачу обозначим как прямая задача.

<u>Двойственная задача</u> – это вспомогательная задача, которая формируется с помощью определенных правил из прямой задачи.

Составив двойственную задачу на основе прямой задачи, и, решив ее симплекс-методом, можно по определенным правилам получить одновременно решение и прямой задачи.

От вида прямой задачи будет зависеть, какого вида будет соответствующая ей двойственная задача. Подробно рассмотреть все возможные случаи можно самостоятельно в дополнительной литературе.

Рассмотрим случай, так называемой ***<u>симметричной двойственной задачи.</u>***

Симметричная двойственная задача

Целевая функция и система ограничений (ОДЗ) симметричной двойственной задачи формируются с помощью симметричных преобразований прямой задачи по следующим правилам:

- если для ЦФ прямой задачи оптимальное значение – минимальное, то для ЦФ двойственной задачи оно будет максимальное и наоборот;

- коэффициенты ЦФ прямой задачи становятся СЧ ограничений двойственной задачи;

-СЧ ограничений прямой задачи становятся коэффициентами ЦФ двойственной задачи;

-матрицу ограничений двойственной задачи получают транспонированием матрицы ограничений прямой задачи;

-знаки неравенств в ограничениях меняются на противоположные;

-количество ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной задачи.

Прямую и симметричную двойственную ей задачу представим следующим образом:

Прямая задача:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

Двойственная задача:

$$f = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \le c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \le c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \le c_n \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0$$

Критерий существования оптимального решения.

Если одна из задач: прямая или ей двойственная имеет (не имеет) оптимальное решение, то и вторая также будет иметь (не будет иметь) оптимальное решение. При этом значения целевых функций этих задач на своих оптимальных решениях **совпадают**.

На примере рассмотрим, как решить прямую задачу, составив и решив на ее основе двойственную задачу.

Пример. Составить двойственную задачу и решить симплекс-методом.

$$f = 12x_1 + 4x_2 + 8x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Составим симметричную двойственную задачу по правилам:

$$f = -y_1 + y_2 + 2y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 12, \\ 5y_1 - y_2 - y_3 \leq 4, \\ 6y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 8, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решим симметричную двойственную задачу симплекс-методом.

Шаг 1. Поиск начального опорного решения.

Введем неотрицательные «фиктивные» переменные: y_4, y_5, y_6 и приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_4 = 12, \\ 5y_1 - y_2 - y_3 + y_5 = 4, \\ 6y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_6 = 8, \\ f + y_1 - y_2 - 2y_3 = 0. \end{cases}$$

Составим **симплекс-таблицу:**

f	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	СЧ	БП
0	2	2	5	1	0	0	12	y_4
0	5	-1	-1	0	1	0	4	y_5
0	6	2	3	0	0	1	8	y_6
1	1	-1	-2	0	0	0	0	f

Начальное опорное решение:

Небазисные переменные: $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$;
Базисные переменные: $y_4 = 12, y_5 = 4, y_6 = 8$;
Значение ЦФ: $f = 0$.

Шаг 2. Проверка решения на оптимальность:

В f-строке при небазисных переменных присутствуют отрицательные коэффициенты, следовательно, опорное решение не является оптимальным.

Шаг 3. Поиск другого допустимого решения:

f	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	СЧ	БП	min
0	2	2	5	1	0	0	12	y_4	12/5
0	5	-1	-1	0	1	0	4	y_5	-
0	6	2	3	0	0	1	8	y_6	8/3
1	1	-1	-2	0	0	0	0	f	

Выбираем столбец: в f- строке наибольший по модулю отрицательный коэффициент: -2 и ему соответствует переменная y_3.

Выбираем строку: СЧ делим на соответствующие положительные коэффициенты выбранного столбца (отрицательный коэффициент не берем в расчет) и выбираем минимальное число: $\min(12/5; 8/3) = 12/5$ и ему соответствует 1-ое уравнение.

Переменную y_3 «введем в базис», оставив ее только в 1-ом уравнении.

f	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	СЧ	БП	min
0	2/5	2/5	1	1/5	0	0	12/5	y_4	12/5
0	5	-1	-1	0	1	0	4	y_5	-
0	6	2	3	0	0	1	8	y_6	8/3
1	1	-1	-2	0	0	0	0	f	

Исключим переменную y_3 из 2-го, 3-го и $f -$ уравнений:

- 2-ое уравнение сложим с 1-ым, умноженным на (-3). ;
- 3-е уравнение сложим с 1-ым;
- f- уравнение сложим с 1-ым, умноженным на (+2).

f	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	СЧ	БП
0	2/5	2/5	1	1/5	0	0	12/5	y_4
0	27/5	-3/5	0	1/5	1	0	32/5	y_5
0	24/5	4/5	0	-3/5	0	1	4/5	y_6
1	9/5	-1/5	0	2/5	0	0	24/5	f

Допустимое решение:

Небазисные переменные: $y_1 = 0, y_2 = 0, y_4 = 0$;

Базисные переменные: $y_3 = 12/5, y_5 = 32/5, y_6 = 4/5$;

Значение ЦФ: $f = 24/5$.

Так как допустимое решение нашлось, то опять переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Проверка решения на оптимальность:

В f-строке при небазисных переменных присутствует отрицательный коэффициент, следовательно, найденное допустимое решение не является оптимальным.

Шаг 3. Поиск другого допустимого решения:

f	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	СЧ	БП	min
0	2/5	2/5	1	1/5	0	0	12/5	y_3	6
0	27/5	-3/5	0	1/5	1	0	32/5	y_5	-
0	24/5	4/5	0	-3/5	0	1	4/5	y_6	1
1	9/5	-1/5	0	2/5	0	0	24/5	f	

Выбираем столбец: в f- строке наибольший по модулю отрицательный коэффициент: $-1/5$ и ему соответствует переменная y_2.

Выбираем строку: СЧ делим на соответствующие положительные коэффициенты выбранного столбца (отрицательный коэффициент не берем в расчет) и выбираем минимальное число: $\min(6; 1) = 1$ и ему соответствует 3-ье уравнение.

Переменную y_2 «введем в базис», оставив ее только в 3-ем уравнении.

f	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	СЧ	БП	min
0	2/5	2/5	1	1/5	0	0	12/5	y_3	6
0	27/5	-3/5	0	1/5	1	0	32/5	y_5	-
0	6	1	0	-3/4	0	5/4	1	y_6	1
1	9/5	-1/5	0	2/5	0	0	24/5	f	

Исключим переменную y_2 из 1-го, 2-го и $f-$ уравнений:

- 1-ое уравнение сложим с 3-им, умноженным на (-2/5);
- 2-е уравнение сложим с 3-им, умноженным на (+3/5)
- f- уравнение сложим с 3-им, умноженным на (+1/5).

f	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	СЧ	БП
0	-2	0	1	1/2	0	-1/2	2	y_3
0	9	0	0	-1/4	1	3/4	7	y_5
0	6	1	0	-3/4	0	5/4	1	y_2
1	3	0	0	1/4	0	1/4	5	f

Допустимое решение:

Небазисные переменные: $y_1 = 0, y_4 = 0, y_6 = 0$;

Базисные переменные: $y_3 = 2, y_5 = 7, y_2 = 1$;

Значение ЦФ: $f = 5$.

Так как допустимое решение нашлось, то опять переходим к Шагу 2.

Шаг 2. Проверка решения на оптимальность:

В f-строке при небазисных переменных нет отрицательных коэффициентов.

Решение является оптимальным и алгоритм завершен.

Ответ для двойственной задачи:

$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 2$, максимальное значение $f = 5$.

Решив двойственную задачу необходимо вернуться к прямой задаче.

Так как оптимальное решение двойственной задачи существует, то и прямая задача имеет оптимальное решение. При этом значения ЦФ у них совпадают.

Значения переменных прямой задачи найдем по соответствию:

	Основные переменные			**Фиктивные переменные**		
прямая задача	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
двойственная задача	y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3
	Фиктивные переменные			**Основные переменные**		

Замечание: соответствие не означает равенство значений.

При нахождении допустимого решения задачи симплекс-методом, мы определили, что решением системы будем выбирать то, для которого небазисные переменные равны нулю, а базисные переменные равны значениям СЧ. При составлении двойственной задачи мы также определили, что СЧ ограничений прямой задачи становятся коэффициентами ЦФ двойственной задачи.

Отсюда мы получаем, что коэффициенты ЦФ двойственной задачи будут определять значения СЧ, а, следовательно, и значения базисных переменных прямой задачи.

Для нахождения оптимального решения прямой задачи воспользуемся последней симплекс-таблицей при решении двойственной задачи.

Фиктивные переменные y_4, y_5, y_6 для двойственной задачи соответствуют основным переменным x_1, x_2, x_3 прямой задачи.

В f-строке (ЦФ) коэффициенты, которые соответствуют переменным y_4, y_5, y_6 становятся значениями переменных x_1, x_2, x_3.

f	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	СЧ	БП
0	-2	0	1	1/2	0	-1/2	2	y_3
0	9	0	0	-1/4	1	3/4	7	y_5
0	6	1	0	-3/4	0	5/4	1	y_2
1	3	0	0	1/4	0	1/4	5	f

Ответ для прямой задачи:
$x_1 = 1/4, x_2 = 0, x_3 = 1/4$, минимальное значение $f = 5$.

Упражнения

Составить двойственную задачу и решить симплекс-методом.

1. $f = x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 \ge 1, \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $f = x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \ge 1, \\ 10x_1 \ge 1, \\ 6x_1 + 11x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $f = 12x_1 + x_2 + 15x_3 \to \min$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \ge -3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

3. $f = 6x_1 + x_2 + 9x_3 \to \min$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge -2, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 \ge 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

5. Чтобы при корме животных весом 30-40 кг получить средний привес 300-400 г, по нормам в дневном рационе должны содержаться питательные вещества. При откорме используют ячмень, бобы и сенную муку. Содержание питательных веществ в одном килограмме этих кормов, количество необходимых питательных веществ в дневном рационе и стоимость 1 кг корма приведены в таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ, содержащихся в 1 кг корма			Необходимый минимум питательных веществ
	Ячмень	бобы	сенная мука	
Кормовые единицы, кг	1,2	1,4	0,8	1,6
Перевариваемый протеин, г	80	280	240	200
Каротин, мг	5	5	100	10
Цена 1 кг корма, руб.	3	4	5	

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

6. Металлургический завод из металлов A_1, A_2, A_3 может выпускать сплавы B_1, B_2, B_3. В течении планируемого периода завод должен освоить не менее 640 т металла A_1 и 800 т металла A_2, при этом металла A_3 может быть израсходовано не более 800т.

Определить минимальные затраты, если данные о нормах расхода и себестоимости даны в таблице.

Вид металла	Технологические нормы расхода металла на усл.ед. сплава			Наличие металла у завода
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1,0	4,3	2,6	640
A_2	5,0	1,5	3,0	800
A_3	3,0	3,9	4,3	860
Себестоимость 1 т сплава	18	15	15	

Транспортная задача

Постановка задачи.

Имеются поставщики и потребители. Известны запасы одинакового товара у поставщиков, потребности в этом товаре (спрос) потребителей и затраты на перевозку этого товара (тарифы перевозок) от каждого поставщика к каждому потребителю. Требуется составить такой план перевозок, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальные.

Возможны и другие интерпретации этой задачи. Поставщик или потребитель может быть один, но имеются, например, различные склады для хранения товаров. Также перевозить можно не только товары, но и различные материалы, сырье, оборудование и т.д. Обязательным остается лишь условие, чтобы перевозимый груз был «однороден», т.е. выбор перевозки единицы груза зависит только от тарифа перевозки и не зависит от других факторов. Например, типа груза, его качества и т.д.

Виды транспортных задач (ТЗ):

1.Закрытая ТЗ: суммарные запасы всех поставщиков равны суммарным потребностям (спросу) всех потребителей.

2.Открытая ТЗ:

а) суммарные запасы превышают суммарные потребности.

б) суммарные потребности превышают суммарные запасы.

Математическая модель закрытой ТЗ:

Шаг 1 – введение переменных задачи.

Введем обозначения:

Поставщики - A_i; Потребители - B_j;

Запасы поставщиков - a_i, суммарный запас – a;

Спрос потребителей - b_j, суммарный спрос – b;

Тариф перевозки груза от поставщика A_i к потребителю B_j - c_{ij}.

x_{ij} –столько груза нужно перевезти от поставщика A_i к потребителю B_j.

Транспортная таблица:

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	a_i
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	$\cdots$	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	$\cdots$	x_{2n} c_{2n}	a_2
$\cdots$	$\cdots$ $\cdots$	$\cdots$ $\cdots$	$\cdots$ $\cdots$	$\cdots$ $\cdots$	$\cdots$
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	$\cdots$	x_{mn} c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

Шаг 2 – определение области допустимых значений (ОДЗ).

В ОДЗ входят ограничения на количество перевозимого груза и на значения переменных.

Общее количество перевозимого груза:

- от поставщика A_i равно его запасам – a_i.
- к потребителю B_j равно его спросу – b_j.

Значения переменных ограниченны «здравым смыслом» (нельзя перевезти отрицательное количество груза).

Ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств.

Общее количество перевозимого груза:

- от поставщика A_1: $x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1$;
- от поставщика A_2: $x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2$;

...

- от поставщика A_m: $x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m$;
- к потребителю B_1: $x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1$;
- к потребителю B_2: $x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2$;

...

- к потребителю B_n: $x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n$;

-на значения переменных: $x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \cdots x_{mn} \geq 0$.

Шаг 3 – составление целевой функции (ЦФ) задачи.

Целевая функция будет выражать общие затраты на перевозку груза.

Оптимальным решением данной задачи будет такое, при котором ЦФ будет принимать **минимальное значение**.

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \to \min$$

Транспортная задача, как задача линейного программирования может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения ТЗ разработан специальный метод.

Алгоритм решения закрытой ТЗ:

Шаг 1. Составление начального плана перевозок.

Шаг 2. Проверка плана на оптимальность:

а) если план оптимальный, то алгоритм завершен.

б) если план не оптимальный, то переход к Шагу 3.

Шаг 3. Улучшение плана перевозок и переход к Шагу 2.

Рассмотрим решение ТЗ на конкретном примере:

Пример. У поставщиков A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию. Количественные данные о запасах, потребностях и тарифы перевозок представлены в таблице.

	B1	B2	B3	
A1	2	5	2	**90**
A2	4	1	5	**400**
A3	3	6	8	**110**
	140	**300**	**160**	

Необходимо составить план перевозок, при котором сумма затрат на все перевозки была бы минимальной.

Шаг 0. Проверим, является ли данная задача закрытой.

Суммарные запасы: $a = 140 + 300 + 160 = 600$ т.

Суммарные потребности: $b = 90 + 400 + 110 = 600$ т.

$a = b$, следовательно, ТЗ закрытая.

Шаг 1. Составление начального плана перевозок.

Модель задачи запишем в виде транспортной таблицы:

	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	a_i
$\boldsymbol{A_1}$	x_{11} [2]	x_{12} [5]	x_{13} [2]	**90**
$\boldsymbol{A_2}$	x_{21} [4]	x_{22} [1]	x_{23} [5]	**400**
$\boldsymbol{A_3}$	x_{31} [3]	x_{32} [6]	x_{33} [8]	**110**
b_j	**140**	**300**	**160**	**600**

Чтобы составить план перевозок, нужно определить значения всех переменных x_{ij}. Записывать значения переменных будем в клетки таблицы.

Если значение какой-либо из переменных равно нулю, то данную клетку будем считать «пустой», если не равно нулю, то «заполненной».

Существует несколько способов составления начального плана перевозок. Рассмотрим один из них.

Метод минимального тарифа (элемента).

1-этап: первой заполняют клетку с минимальным тарифом (если таких клеток несколько, то можно выбрать любую из них).

Заполняют данную клетку максимальным из возможных значений, какое позволяют ограничения - это минимальное из значений запаса того поставщика и спроса того потребителя, на пересечении которых находится клетка.

2-этап и последующие: далее заполняют следующие клетки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей. Процесс заполнения продолжают до тех пор, пока все запасы поставщиков не будут вывезены, а спрос всех потребителей не будут удовлетворен.

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	**90** [2]	[5]	[2]	**90**
A_2	[4]	**300** [1]	**100** [5]	**400**
A_3	**50** [3]	[6]	**60** [8]	**110**
b_j	**140**	**300**	**160**	**600**

1-этап: заполняем клетку (2;2) с минимальным тарифом $c_{22} = 1$.

У поставщика A_2 запас $a_2 = 400$, у потребителя B_2 спрос $b_2 = 300$.

$x_{22} = \min(400; 300) = 300$.

(нельзя доставить больше, чем необходимо потребителю).

2-этап: заполняем следующую клетку (1;1) с тарифом $c_{11} = 2$.

У поставщика A_1 запас $a_1 = 90$, у потребителя B_1 спрос $b_2 = 140$.

$x_{11} = \min(90; 140) = 90$.

(нельзя доставить больше, чем имеется у поставщика).

3-этап: у поставщика A_1 груз закончился и клетку (1;3) с тарифом $c_{13} = 2$ не берем. Заполняем клетку с тарифом $c_{31} = 3$.

У поставщика A_3 запас $a_3 = 110$, у потребителя B_1 оставшийся спрос $b_1 - 90 = 140 - 90 = 50$.

$x_{13} = \min(50; 110) = 50$.

4-этап: у потребителя B_1 спрос полностью удовлетворен, и клетку (2;1) с тарифом $c_{21} = 4$ не берем. Заполняем клетку (2;3) с тарифом $c_{23} = 5$.

У поставщика A_2 оставшийся запас $a_2 - 300 = 400 - 300 = 100$, у потребителя B_3 спрос $b_3 = 160$.

$x_{23} = \min(100; 160) = 100$.

5-этап: у потребителей B_1 и B_2 спрос полностью удовлетворен, а также у поставщиков A_1 и A_2 запасы закончились, заполняем последнюю клетку (3;3) с тарифом $c_{33} = 8$.

У поставщика A_3 оставшийся запас $a_3 - 50 = 110 - 50 = 60$, у потребителя B_3 оставшийся спрос $b_3 - 100 = 160 - 100 = 60$.

$x_{33} = 60$.

Для всех «пустых» клеток величина $x_{ij} = 0$.

Начальный план перевозок составлен.

Общая стоимость перевозки всех грузов по данному плану равна:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{mn}x_{mn} =$$
$$= 90 \cdot 2 + 300 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 8 = 1610.$$

Шаг 2. Проверка плана на оптимальность.

	B_1	B_2	B_3	a_i	u_i
A_1	**90** 2	5 3	2 7	**90**	2
A_2	4 0	**300** 1	**100** 5	**400**	0
A_3	**50** 3	6 4	**60** 8	**110**	3
b_j	**140**	**300**	**160**	**600**	
v_j	0	1	5		

План перевозок можно проверить на оптимальность методом потенциалов.

В транспортную таблицу добавляем дополнительные строку v_j и столбец u_i. Числа u_i и v_j назовем **потенциалами.**

Метод потенциалов:

1 этап. Определение потенциалов для «занятных» клеток.

2 этап. Заполнение суммы потенциалов для «пустых» клеток.

3 этап. Применение критерия оптимальности.

1 этап. Определим для «занятых» клеток потенциалы.

Для «занятных» клеток потенциалы находят из системы равенств:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Для «занятых» клеток составим систему равенств:

$$\begin{cases} (1;1): u_1 + v_1 = 2, \\ (2;2): u_2 + v_2 = 1, \\ (2;3): u_2 + v_3 = 5, \\ (3:1): u_3 + v_1 = 3, \\ (3;3): u_3 + v_3 = 8. \end{cases}$$

Найдем произвольное решение получившейся системы уравнений (система имеет бесконечное множество решений). Выбрав любую переменную, зададим ей произвольное значение, а затем найдем значения остальных переменных.

Пусть для первого уравнения: $v_1 = 0$. Определим по порядку уравнений: $1 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2$ значения для всех потенциалов.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2: v_1 = 0, u_1 = 2, \\ u_2 + v_2 = 1: u_2 = 0, v_2 = 1, \\ u_2 + v_3 = 5: v_3 = 5, u_2 = 0, \\ u_3 + v_1 = 3: v_1 = 0, u_3 = 3, \\ u_3 + v_3 = 8: u_3 = 3, v_3 = 5. \end{cases}$$

Потенциалы: $u_1 = 2; u_2 = 0; u_3 = 3; v_1 = 0; v_2 = 1; v_3 = 5.$

2 этап. Заполним для «пустых» клеток сумму найденных потенциалов.

(1;2): $u_1 + v_2 = 2 + 1 = 3.$

(1;3): $u_1 + v_3 = 2 + 5 = 7$.

(2;1): $u_2 + v_1 = 0 + 0 = 0$.

(3;2): $u_3 + v_2 = 3 + 1 = 4$.

Значения суммы потенциалов запишем в таблице под значениями тарифов.

3 этап. Применим критерий оптимальности.

Критерий оптимальности.

Если сумма потенциалов для всех «пустых» клеток меньше или равна тарифам соответствующих клеток, то план является оптимальным.

В примере, для клетки (1;3) сумма потенциалов больше тарифа данной клетки. Следовательно, план не является оптимальным.

Шаг 3. Улучшение плана перевозок.

Для улучшения плана надо перераспределить грузы, перемещая их из «занятых» клеток в «пустые». «Пустая» клетка становится «занятой», а одна из ранее «занятых» клеток становится «пустой».

Для «пустой» клетки строится цикл (многоугольник), все вершины которого кроме одной находятся на «занятых» клетках, углы прямые, число вершин четное. Около «занятой» клетки цикла ставится знак $(+)$, затем поочерёдно проставляются знаки $(-)$ и $(+)$. У вершин со знаком $(-)$ выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком $(+)$, и отнимают от грузов у вершин со знаком $(-)$.

Начинаем строить цикл с «пустой» клетки, для которой разница между суммой потенциалов и тарифом наибольшее положительное число.

В примере, для «пустой» клетки (1;3): $u_1 + v_3 - c_{13} = 2 + 5 - 2 = 5$ наибольшее положительное число (для остальных «пустых» клеток эта величина вообще не является положительной).

	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	a_i	u_i
$\boldsymbol{A_1}$	$(-)$ 2 **90**	5	$(+)$ 2	**90**	2
$\boldsymbol{A_2}$	4	1 **300**	5 **100**	**400**	0
$\boldsymbol{A_3}$	$(+)$ 3 **50**	6	$(-)$ 8 **60**	**110**	3
b_j	**140**	**300**	**160**	**600**	
v_j	0	1	5		

Строим цикл: $(1;3) \rightarrow (3;3) \rightarrow (3;1) \rightarrow (1;1)$.

Клетки со знаком $(+)$: $(1;3), (3;1)$. Клетки со знаком $(-)$: $(3;3), (1;1)$.

Минимальный груз у клеток со знаком $(-)$: $\min(60; 90) = 60$.

Перераспределив грузы, получим новый план перевозок:

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	**30** [2]	[5]	**60** [2]	**90**
A_2	[4]	**300** [1]	**100** [5]	**400**
A_3	**110** [3]	[6]	[8]	**110**
b_j	**140**	**300**	**160**	**600**

Общая стоимость перевозки всех грузов по данному плану равна:
$f = 30 \cdot 2 + 60 \cdot 2 + 300 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1310.$

Шаг 2. Проверка плана на оптимальность.

	B_1	B_2	B_3	a_i	u_i
A_1	**30** [2]	[5] -2	**60** [2]	**90**	2
A_2	[4] 5	**300** [1]	**100** [5]	**400**	5
A_3	**110** [3]	[6] -1	[8] 3	**110**	3
b_j	**140**	**300**	**160**	**600**	
v_j	0	-4	0		

Потенциалы для «занятных» клеток и сумму потенциалов для «пустых» клеток заполним сразу в таблице.

Для клетки (2;1) сумма потенциалов больше тарифа данной клетки. Следовательно, план не является оптимальным.

Шаг 3. Улучшение плана перевозок.

	B_1	B_2	B_3	a_i	u_i
A_1	$(-)$ **30** [2]	[5] -2	$(+)$ **60** [2]	**90**	2
A_2	$(+)$ [4] 5	**300** [1]	$(-)$ **100** [5]	**400**	5
A_3	**110** [3]	[6] -1	[8] 3	**110**	3
b_j	**140**	**300**	**160**	**600**	
v_j	0	-4	0		

Строим цикл: $(2;1) \rightarrow (1;1) \rightarrow (1;3) \rightarrow (2;3)$.
У клеток со знаком $(-)$: $\min(30; 100) = 30$.
Перераспределив грузы, получим новый план перевозок:

Шаг 2. Проверка плана на оптимальность.

	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	a_i	u_i
$\boldsymbol{A_1}$	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{5}$ -2	**90** $\boxed{2}$	**90**	2
$\boldsymbol{A_2}$	**30** $\boxed{4}$	**300** $\boxed{1}$	**70** $\boxed{5}$	**400**	5
$\boldsymbol{A_3}$	**110** $\boxed{3}$	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{8}$ 4	**110**	4
b_j	**140**	**300**	**160**	**600**	
v_j	-1	-4	0		

Для всех «пустых» клеток сумма потенциалов меньше или равна тарифу данных клеток. Следовательно, план является оптимальным.

Общая стоимость перевозки всех грузов по данному плану равна: $f = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280$.

Ответ: $x_{13} = 90, x_{21} = 30, x_{22} = 300, x_{23} = 70, x_{31} = 110$, минимальная сумма затрат на все перевозки $f = 1280$.

Упражнения

Решить следующие транспортные задачи, заданные распределительной таблицей:

1.

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	1	3	4	5	**90**
A2	5	3	1	2	**30**
A3	2	1	4	2	**40**
	70	**30**	**20**	**40**	

2.

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	6	8	15	4	**60**
A2	9	15	2	3	**130**
A3	6	12	7	1	**90**
	30	**80**	**60**	**110**	

3.

	B1	**B2**	**B3**	
A1	2	4	2	**100**
A2	5	5	6	**70**
A3	4	6	3	**70**
A4	6	8	1	**20**
	120	**80**	**60**	

4.

	B1	**B2**	**B3**	
A1	7	15	3	**90**
A2	13	8	15	**130**
A3	9	7	20	**40**
A4	8	10	6	**130**
	240	**40**	**110**	

5. Продукция определённого типа производится в городах A_1, A_2, A_3 и потребляется в городах B_1, B_2, B_3, B_4.

В таблице указаны: объем производства, спрос, стоимость перевозки единицы продукции.

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	20	47	31	13	**44**
A2	3	38	44	10	**18**
A3	11	32	46	17	**68**
	45	**30**	**10**	**45**	

Составить план перевозки продукции, при котором стоимость всех перевозок будет минимальная.

6.Фирма имеет три магазина розничной торговли, расположенных в разных районах города A,B,C. Поставки продукции в эти магазины осуществляются с двух складов D и E, площади которых вмещают 30 и 25 т продукции соответственно. В связи с возросшим покупательским спросом фирма планирует расширить площади магазина, поэтому их потребности в продукции с торговых складов составят 20, 35 и 15 т в день. Чтобы удовлетворить спрос на продукцию, предполагается строительство третьего склада, площади которого позволят хранить в нем 15 т продукции ежедневно. Руководство рассматривает два варианта его размещения. В таблице даны транспортные издержки, соответствующие перевозке продукции с двух существующих складов, и два варианта размещения нового склада.

Оценить две транспортные модели и принять решение, какой вариант размещения нового склада выгоднее. Предполагается, что остальные издержки сохраняют существующие значения.

Торговый склад	**Транспортные издержки, ден.ед.**		
	A	B	C
D	5	6	3
E	2	5	4
Вариант 1	3	4	5
Вариант 2	1	3	3

Глава 2. Матричные игры.

Игра – упрощенная модель реальной конфликтной ситуации.

Примеры: взаимоотношения покупателя и продавца, конкуренция фирм, боевые действия, обычные игры и др.

Игроки – заинтересованные стороны в игре.

Ход игрока или стратегия – выбор варианта действия игроком, в зависимости от ситуации.

Оптимальная стратегия – стратегия, которая обеспечивает максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник.

Цель теории игр – выработать рекомендации по определению оптимальных стратегий.

Матричные игры

Рассмотрим математическую модель конечной игры, когда имеются два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого.

Такая модель называется ***антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой***.

Пример. Играют два игрока. Каждый игрок держит в кулаке свою монету, затем игроки одновременно разжимают пальцы. Если монеты повернуты одинаковой стороной (орел или решка), то первый игрок (А) выиграет 1 руб., если же монеты повернуты разными сторонами, то тогда второй игрок (В) выигрывает 1 рубль.

Рассмотрим элементы данной игры:

В этой игре, у обоих игроков есть две стратегии:

у игрока А: $A_1 = \{O\}$, $A_2 = \{P\}$;

у игрока В: $B_1 = \{O\}$, $B_2 = \{P\}$.

Игру можно представить в виде матрицы:

строки – стратегии 1-го игрока;

столбцы – стратегии 2-го игрока;

элементы матрицы – это выигрыши первого игрока А.

Такая матрица называется ***платежной.***

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{O} \\ \mathrm{P} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{O} & \mathrm{P} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$a_{11} = 1$ означает: игрок А выбрал свою 1-ю стратегию и повернул монету орлом $\{O\}$, а игрок В выбрал также свою 1-ю стратегию и также повернул монету орлом $\{O\}$. И, так как монеты повернуты одинаковой стороной, то по правилу игры игрок А выигрывает 1 рубль.

Также можно составить платежную матрицу и для второго игрока. Но так как, в рассматриваемых играх, выигрыш одного игрока равен проигрышу другого, то мы будем рассматривать платежные матрицы только для первого игрока.

Так как платежная матрица составлена для первого игрока, то

задача первого игрока – максимизировать свой выигрыш:

задача второго игрока – минимизировать выигрыш первого игрока (чем меньше выиграет первый игрок, тем больше выиграет второй).

Задача каждого игрока – найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны, и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший выигрыш.

Поиск решения в «чистых стратегиях»

Пример: платежная матрица имеет следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем наилучшие стратегии для игроков.

Вначале найдем наилучшую стратегию первого игрока.

При этом второй игрок «мешает» выиграть первому, т.е. стремится выбрать стратегию, когда первый игрок получает «минимум».

Чтобы определить наилучшую стратегию для первого игрока, нужно:

1) выбрать минимальное число в каждой строке: $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ (какую бы не выбрал стратегию второй игрок, первый получит не меньше данного минимума);

2) из всех возможных α_i выбрать максимальное: $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ (чтобы выиграть как можно больше, выбирает максимум из возможных минимумов).

Величина α - гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе первый игрок (т.е. выигрыш первого игрока будет не ниже данной величины) – называется **нижней ценой игры (*максимином*).**

Выберем наилучшую стратегию второго игрока.

При этом первый игрок «мешает» выиграть второму, т.е. стремится выбрать стратегию, когда он получает «максимум», а второй игрок получает «минимум».

Чтобы определить наилучшую стратегию для второго игрока, нужно:

1) выбрать максимальное число в каждом столбце: $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ (какую бы не выбрал стратегию первый игрок, он получит не больше данного максимума, т.е. второй игрок получит гарантированный минимум);

2) из всех возможных β_j выбрать минимальное: $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ (первый игрок выиграет как можно меньше, т.е. выбирает минимум из возможных максимумов при этом второй игрок выиграет как можно больше).

Величина β - гарантированный проигрыш, который может обеспечить себе второй игрок (т.е. выигрыш первого игрока не превысит этой величины) – называется **верхней ценой игры (*минимаксом*).**

Для матричной игры всегда справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$.

Если $\alpha = \beta$, то ситуация является равновесной и такая игра называется ***игрой с седловой точкой***. Если игра имеет седловую точку, то она решается **в чистых стратегиях** (т.е. каждый игрок должен всегда применять только одну стратегию, чтобы она была для каждого игрока оптимальной).

Седловая точка матрицы — пара оптимальных стратегий $(A_{i\text{опт}}, B_{j\text{опт}})$.

Величина $\alpha = \beta = \upsilon$ называется ***ценой игры*.**

1) Если υ>0, то игра выгодна для игрока А.

2) Если υ<0, то игра выгодна для игрока В.

3) υ=0 игра справедлива, т.е. является выгодной для обоих участников.

Пример: в матричной игре найти:

а) верхнюю и нижнюю цены игры;

б) седловую точку (если она существует);

в) цену игры (решение матричной игры) и сделать вывод.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \alpha_i \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 0 \end{array} \\ \beta_j \quad 2 \quad 1 \quad 0 & \end{array}$$

а) $\alpha = maxmin = max\{-2; -1; 0\} = 0$ нижняя цена игры;

$\beta = minmax = min\{2; 1; 0\} = 0$ верхняя цена игры;

б) $(\mathrm{A}_3; \mathrm{B}_3)$ - седловая точка

-игрок А выбирает свою 3-ю стратегию;

-игрок В выбирает свою 3-ю стратегию;

в) $a_{33} = 0$ цена игры

Ответ: υ=0, т.е. игра справедлива, т.е. является выгодной для обоих участников

Упражнения

В матричной игре найти: а) верхнюю и нижнюю цены игры;

б) седловую точку (если она существует); в) цену игры (решение матричной игры) и сделать вывод.

1) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 & 8 \\ 3 & -3 & 6 & -6 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 3 & -3 & -6 \\ 2 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 & 8 \\ 3 & -3 & 6 & -6 \\ -4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 2 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 7 & 5 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

Графический метод решения игр в «смешанных стратегиях»

Если $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки и поиск решения игры приводит к применению смешанных стратегий.

Смешанная стратегия – сложная стратегия, состоящая в случайном применении чистых стратегий с определенными частотами (вероятностями).

Оптимальной стратегией каждого игрока уже будет являться набор частот (вероятностей), с которыми игрок должен применять свои чистые стратегии.

Для матричной игры всегда справедливо неравенство $\alpha \leq \upsilon \leq \beta$.

Ценой игры будет являться уже среднее значение выигрыша для первого игрока (математическое ожидание выигрыша), в результате применениям им его оптимальной стратегии.

Пример: В матричной игре $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ найти оптимальные стратегии для игроков.

$\alpha = maxmin = max\{2; 3\} = 3$ нижняя цена игры;

$\beta = minmax = min\{4; 5\} = 4$ верхняя цена игры;

$\alpha \neq \beta,$ следовательно, игра не имеет седловой точки, и решить ее в чистых стратегиях нельзя.

(как решить эту игру рассмотрим ниже).

Оптимальная стратегия 1-го игрока - пара вероятностей: $\overline{x_{\text{опт}}} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Первому игроку в игре не нужно применять всегда только первую стратегию, или только вторую («чистые стратегии»), но нужно в серии игр с вероятностью $\frac{1}{2}$ применять свою первую стратегию, и с вероятностью $\frac{1}{2}$ свою вторую стратегию («смешанные стратегии») – это будет оптимальная стратегия.

Аналогично оптимальная стратегия 2-го игрока - $\overline{y_{\text{опт}}} = \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$, т.е. второму игроку в серии игр нужно с вероятностью $\frac{3}{4}$ применять свою первую стратегию, и с вероятностью $\frac{1}{4}$ свою вторую стратегию.

Цена данной игры $\upsilon = 3{,}5$, т.е. первый игрок в серии игр будет в среднем за одну игру выигрывать 3,5 у.е.

В общем виде платежная матрица имеет размерность $(m \times n)$, т.е. первый игрок А имеет m стратегий, а второй игрок В имеет n стратегий.

Стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей, с которыми первый игрок применяет свои чистые стратегии:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m), \text{ где } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \;\; x_i \geq 0.$$

Аналогично для второго игрока задаются наборы вероятностей:

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \text{ где } \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ \ y_j \geq 0.$$

Игры размерности $(2 \times n)$

Набор вероятностей для первого игрока:
$\bar{x} = (x_1, x_2)$, где $\sum_{i=1}^{2} x_i = x_1 + x_2 = 1, \ \ x_2 = 1 - x_1$.
Набор вероятностей для второго игрока:
$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, где $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \ \ y_j \geq 0$.
Найдем оптимальную смешанную стратегию для 1-го игрока.
Платежную матрицу запишем в виде таблицы:

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{a_{11}}$	a_{12}	…	a_{1n}
$\boldsymbol{x_2 = 1 - x_1}$	$\boldsymbol{a_{21}}$	a_{22}	…	a_{2n}

Предположим, что 2-ой игрок применит свою 1-ю стратегию, рассчитаем тогда ожидаемый выигрыш 1-го игрока (математическое ожидание):

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot x_2 = a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot (1 - x_1) = (a_{11} - a_{21}) \cdot x_1 + a_{21}.$$

Второй игрок также может применить любую другую свою стратегию. Расчеты запишем в таблицу:

Стратегии 2-го игрока	**Ожидаемый выигрыш 1-го игрока**	
1	$a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot x_2 =$ $a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot (1 - x_1) =$	$(a_{11} - a_{21}) \cdot x_1 + a_{21}$
2	$a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 =$ $a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot (1 - x_1) =$	$(a_{12} - a_{22}) \cdot x_1 + a_{22}$
…	…	…
n	$a_{1n} \cdot x_1 + a_{2n} \cdot x_2 =$ $a_{1n} \cdot x_1 + a_{2n} \cdot (1 - x_1) =$	$(a_{1n} - a_{2n}) \cdot x_1 + a_{2n}$

Дальнейшее решение рассмотрим на конкретном примере.

Решим пример, который мы рассматривали выше:

Пример: В матричной игре $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ найти оптимальные стратегии для игроков и цену игры.

Мы выше определили, что данная игра не имеет решения в чистых стратегиях. Будем искать решение в смешанных стратегиях.

Набор вероятностей для игроков:
$\bar{x} = (x_1, x_2)$, где $x_1 + x_2 = 1, \ \ x_2 = 1 - x_1$.
$\bar{y} = (y_1, y_2)$, где $y_1 + y_2 = 1, \ \ y_2 = 1 - y_1$.
Вначале найдем оптимальную стратегию для 1-го игрока:
Платежная матрица:

$\boldsymbol{x_1}$	**4**	2
$\boldsymbol{x_2 = 1 - x_1}$	**3**	5

Ожидаемые выигрыши 1-го игрока:

Стратегии 2-го игрока	Ожидаемый выигрыш 1-го игрока	
1	$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 =$ $4 \cdot x_1 + 3 \cdot (1 - x_1)=$	$x_1 + 3$
2	$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 =$ $2 \cdot x_1 + 5 \cdot (1 - x_1)=$	$-3x_1 + 5$

При применении оптимальной стратегии первым игроком ожидаемый выигрыш становится ценой игры.

Мы получили две зависимости выигрыша 1-го игрока от вероятности его первой стратегии $\upsilon = k \cdot x_1 + b, 0 \leq x_1 \leq 1$ (по свойству вероятности – это величина от 0 до 1).

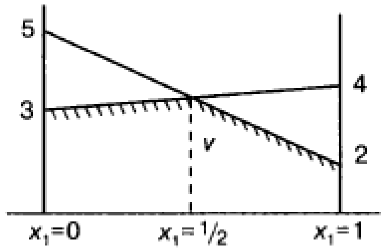
В плоскости $x_1 O \upsilon$ построим графики получившихся прямых, где $0 \leq x_1 \leq 1$:

$\upsilon = x_1 + 3$

x_1	0	1
υ	3	4

$\upsilon = -3x_1 + 5$

x_1	0	1
υ	5	2



Чтобы выиграть как можно больше первый игрок использует принцип «максимина»:

1) вначале, в зависимости от стратегии 2-го игрока выбирает минимальные значения;
2) зачем из всех минимумов выбирает максимальное значение.

В плоскости $x_1 0 \upsilon$:

1) минимальные значения – это точки ломаной, огибающей снизу;
2) максимальное из всех минимальных значений на графике – это точка пересечения двух прямых.

Найдем координаты точки пересечения:

$$x_1 + 3 = -3x_1 + 5$$

$$4x_1 = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 1 - x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Цена игры: $\upsilon = x_1 + 3 = \frac{1}{2} + 3 = 3{,}5$

$$\upsilon = -3x_1 + 5 = -3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 3{,}5.$$

Таким образом, мы нашли оптимальную стратегию для 1-го игрока: $\overline{x_{\text{опт}}} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и цену игры $\upsilon = 3{,}5$.

Теперь найдем оптимальную стратегию для 2-го игрока:

Платежная матрица:

$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2 = 1 - y_1}$
4	**2**
3	5

Так как платежная матрица представлена для выигрышей только первого игрока, то второй игрок выигрыши первого игрока рассматривает, как свои проигрыши.

Ожидаемые проигрыши 2-го игрока:

Стратегии 1-го игрока	**Ожидаемый проигрыш 2-го игрока**	
1	$4 \cdot y_1 + 2 \cdot (1 - y_1)=$	$2y_1 + 2$
2	$3 \cdot y_1 + 5 \cdot (1 - y_1)=$	$-2y_1 + 5$

При применении оптимальной стратегии вторым игроком ожидаемый проигрыш также становиться ценой игры.

Мы получили две зависимости проигрыша 2-го игрока от вероятности его первой стратегии $\upsilon = k \cdot y_1 + b, 0 \leq y_1 \leq 1$.

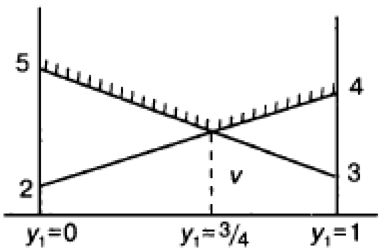
В плоскости $y_1 0 \upsilon$ построим графики, где $0 \leq y_1 \leq 1$:

$\upsilon = 2y_1 + 2$

y_1	0	1
υ	2	4

$\upsilon = -2y_1 + 5$

y_1	0	1
υ	5	3



Чтобы проиграть как можно меньше второй игрок использует принцип «минимакса»:

1) вначале, в зависимости от стратегии 1-го игрока выбирает максимальные значения;
2) зачем из всех максимумов выбирает минимальное значение.

В плоскости $\upsilon 0 y_1$:

1) максимальные значения – это точки ломаной, огибающей сверху;
2) минимальное из всех максимальных значений на графике – это точка пересечения двух прямых.

Координаты точки пересечения:

$2y_1 + 2 = -2y_1 + 5$

$y_1 = \frac{3}{4}; y_2 = 1 - y_1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Цена игры: $\upsilon = 2y_1 + 2 = 2 \cdot \frac{3}{4} + 2 = 3{,}5$

Ответ: оптимальные стратегии для игроков: $\overline{x_{\text{опт}}} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\overline{y_{\text{опт}}} = \left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$, цена игры $\upsilon = 3{,}5$.

Пример: В матричной игре $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ найти оптимальные стратегии для игроков и цену игры.

$\alpha = maxmin = max\{-1; 2\} = 2$ нижняя цена игры;

$\beta = minmax = min\{4; 3; 3; 6\} = 3$ верхняя цена игры;

$\alpha \neq \beta$, следовательно, игра не имеет седловой точки, и решить ее в чистых стратегиях нельзя.

Набор вероятностей для игроков:

$\bar{x} = (x_1, x_2)$, где $x_1 + x_2 = 1$, $x_2 = 1 - x_1$.

$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, где $\sum_{j=1}^{4} y_j = 1$, $y_j \geq 0$.

Вначале найдем оптимальную стратегию для 1-го игрока:

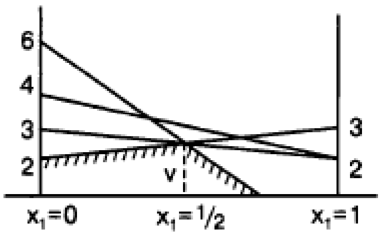
Платежная матрица:

$\boldsymbol{x_1}$	**2**	2	3	-1
$\boldsymbol{x_2 = 1 - x_1}$	**4**	3	2	6

Ожидаемые выигрыши 1-го игрока:

Стратегии 2-го игрока	**Ожидаемый выигрыш 1-го игрока**	
1	$2 \cdot x_1 + 4 \cdot (1 - x_1)$=	$-2x_1 + 4$
2	$2 \cdot x_1 + 3 \cdot (1 - x_1)$=	$-x_1 + 3$
3	$\boldsymbol{3 \cdot x_1 + 2 \cdot (1 - x_1)}$=	$\boldsymbol{x_1 + 2}$
4	$\boldsymbol{-1 \cdot x_1 + 6 \cdot (1 - x_1)}$=	$\boldsymbol{-7x_1 + 6}$

Построим графики (где $0 \leq x_1 \leq 1$):



В плоскости $x_1 0 \upsilon$:

1) минимальные значения – это точки ломаной, огибающей снизу;
2) максимальное из всех минимальных значений на графике – это точка пересечения двух прямых $\upsilon = x_1 + 2$ и $\upsilon = -7x_1 + 6$.

Координаты точки пересечения:

$x_1 + 2 = -7x_1 + 6$

$x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1 - x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\overline{x_{\text{опт}}} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Цена игры: $\upsilon = x_1 + 2 = \frac{1}{2} + 2 = 2{,}5$

Теперь найдем оптимальную стратегию для 2-го игрока:

Для 1-го игрока оптимальная стратегия определяется из равенства $x_1 + 2 = -7x_1 + 6$, что соответствует 3-ей и 4-ой стратегиям 2-го игрока, т.е. 2-ой игрок не будет применять 1-ю и 2-ю стратегию (их вероятности соответственно будут равны нулю), а с определёнными вероятностями будет применять только 3-ю и 4-ю стратегии.

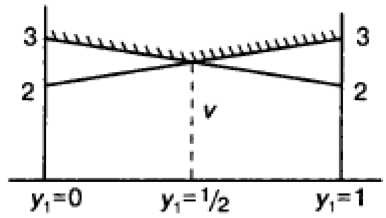
Платежная матрица:

$\boldsymbol{y_3}$	$\boldsymbol{y_4 = 1 - y_3}$
3	**-1**
2	6

Ожидаемые проигрыши 2-го игрока:

Стратегии 1-го игрока	**Ожидаемый проигрыш 2-го игрока**	
1	$3 \cdot y_3 - 1 \cdot (1 - y_3) =$	$4y_3 - 1$
2	$2 \cdot y_3 + 6 \cdot (1 - y_3) =$	$-4y_3 + 6$

Построим графики (где $0 \le y_3 \le 1$):



В плоскости $y_1 0 \upsilon$:

1) максимальные значения – это точки ломаной, огибающей сверху;
2) минимальное из всех максимальных значений на графике – это точка пересечения этих прямых.

Координаты точки пересечения:

$4y_3 - 1 = -4y_3 + 6$

$y_3 = \frac{7}{8}$; $y_4 = 1 - y_3 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

$$\overline{y_{\text{опт}}} = \left(0; 0; \frac{7}{8}; \frac{1}{8}\right)$$

Цена игры: $\upsilon = 4y_3 - 1 = 4 \cdot \frac{7}{8} - 1 = 2{,}5$

Ответ: оптимальные стратегии для игроков: $\overline{x_{\text{опт}}} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\overline{y_{\text{опт}}} = \left(0; 0; \frac{7}{8}; \frac{1}{8}\right)$, цена игры $\upsilon = 2{,}5$.

Игры размерности $(\mathbf{m} \times \mathbf{2})$

Пример: В матричной игре $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ найти оптимальные стратегии для игроков и цену игры.

$\alpha = maxmin = max\{2; 2; 2; -2\} = 2$ нижняя цена игры;

$\beta = minmax = min\{3; 6\} = 3$ верхняя цена игры;

$\alpha \neq \beta,$ следовательно, игра не имеет седловой точки, и решить ее в чистых стратегиях нельзя.

Набор вероятностей для игроков:

$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $\sum_{i=1}^{4} x_i = 1, \;\; x_i \geq 0.$

$\bar{y} = (y_1, y_2)$, где $y_1 + y_2 = 1, \;\; y_2 = 1 - y_1.$

Вначале найдем оптимальную стратегию для 2-го игрока:

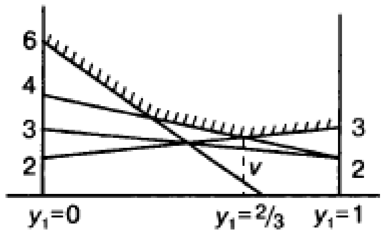
Платежная матрица:

$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2 = 1 - y_1}$
2	**4**
2	3
3	2
-2	6

Ожидаемые проигрыши 2-го игрока:

Стратегии 1-го игрока	Ожидаемый проигрыш 2-го игрока	
1	$\boldsymbol{2 \cdot y_1 + 4 \cdot (1 - y_1)}$=	$\boldsymbol{-2y_1 + 4}$
2	$2 \cdot y_1 + 3 \cdot (1 - y_1)$=	$-y_1 + 3$
3	$\boldsymbol{3 \cdot y_1 + 2 \cdot (1 - y_1)}$=	$\boldsymbol{y_1 + 2}$
4	$-2 \cdot y_1 + 6 \cdot (1 - y_1)$=	$-8y_1 + 6$

Построим графики (где $0 \leq y_1 \leq 1$):



В плоскости $x_1 0 \upsilon$:

1) максимальные значения – это точки ломаной, огибающей сверху;
2) минимальное из всех максимальных значений на графике – это точка пересечения двух прямых $\upsilon = -2y_1 + 4$ и $\upsilon = y_1 + 2$.

Координаты точки пересечения:

$-2y_1 + 4 = y_1 + 2$

$y_1 = \frac{2}{3}; y_2 = 1 - y_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\overline{y_{\text{опт}}} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Цена игры: $\upsilon = -2y_1 + 4 = -2 \cdot \frac{2}{3} + 4 = \frac{8}{3}$

Теперь найдем оптимальную стратегию для 1-го игрока:

Для 2-го игрока оптимальная стратегия определяется из равенства $-2y_1 + 4 = y_1 + 2$ что соответствует 1-ой и 3-ей стратегиям 1-го игрока, т.е. 1-ый игрок не будет применять 2-ю и 4-ю стратегию (их вероятности соответственно будут равны нулю), а с определёнными вероятностями будет применять только 1-ю и 3-ю стратегии.

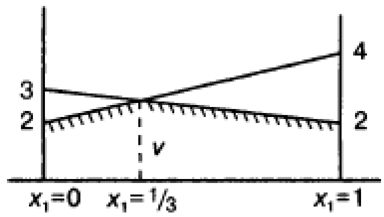
Платежная матрица:

$\boldsymbol{x_1}$	**2**	4
$\boldsymbol{x_3 = 1 - x_1}$	**3**	2

Ожидаемые выигрыши 1-го игрока:

Стратегии 2-го игрока	**Ожидаемый выигрыш 1-го игрока**	
1	$2 \cdot x_1 + 3 \cdot (1 - x_1)=$	$-x_1 + 3$
2	$4 \cdot x_1 + 2 \cdot (1 - x_1)=$	$2x_1 + 2$

Построим графики (где $0 \leq x_1 \leq 1$):



В плоскости $x_1 0 \upsilon$:

1) минимальные значения – это точки ломаной, огибающей снизу;
2) максимальное из всех минимальных значений на графике – это точка пересечения этих прямых.

Координаты точки пересечения:

$-x_1 + 3 = 2x_1 + 2$

$x_1 = \frac{1}{3}; x_3 = 1 - x_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\overline{x_{\text{опт}}} = \left(\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}; 0\right)$

Цена игры: $\upsilon = -x_1 + 3 = -\frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3}$

Ответ: оптимальные стратегии для игроков:

$\overline{x_{\text{опт}}} = \left(\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}; 0\right), \overline{y_{\text{опт}}} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, цена игры $\upsilon = \frac{8}{3}$.

Упражнения

В матричной игре найти оптимальные стратегии для игроков и цену игры:

1). $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ 2). $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. 3). $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ 4). $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

5). $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ 6). $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

7). Игрок А прячет в одной из рук монету. Игрок В пытается угадать руку с монетой. Если В не угадывает, то А получает от В 1 у.е. Если В угадывает руку с монетой и эта рука правая, то он получает от А 1 у.е. Если В находит монету в левой руке, то он получает от А 2 у.е. Определить оптимальные стратегии поведения для каждого игрока и средний выигрыш для А.

8). Торговая организация А выделяет 1 млн. руб. на закупку товара на реализацию. Имеется выбор между закупкой товаров Т1 и Т2. Ожидаемая прибыль зависит от того, какой товар Т1 или Т2 будет закупать конкурент В. Если оба будут закупать Т1, то ввиду конкуренции А понесет убытки в 200 тыс. руб. Если оба будут закупать Т2, то по той же причине А понесет убытки в 100 тыс.руб. Если А закупит Т1, а В закупит Т2, то прибыль А составит 900 тыс.руб. Если А закупит Т2, а В закупит Т1, то прибыль А составит 700 тыс.руб. Как лучше поступить игрокам при оптимальном поведении?

Симплекс-метод для решения игр в «смешанных» стратегиях

Для платежной матрицы размерности $(m \times n)$, где $m > 2$ и $n > 2$ начинаем рассуждать аналогично.

Стратегии первого и второго игрока задаются наборами вероятностей:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m), \text{ где } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \;\; x_i \geq 0.$$

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \text{ где } \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \;\; y_j \geq 0.$$

Платежная матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Чтобы найти оптимальные стратегии игроков, рассчитаем ожидаемые выигрыши 1-го игрока и ожидаемые проигрыши 2-го игрока.

Стратегии 2-го игрока	**Ожидаемый выигрыш 1-го игрока**
1	$a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot x_2 + \dots + a_{m1} \cdot x_m$
2	$a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{m2} \cdot x_m$
…	…
n	$a_{1n} \cdot x_1 + a_{2n} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_m$

Стратегии 1-го игрока	**Ожидаемый проигрыш 2-го игрока**
1	$a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + \dots + a_{1n} \cdot y_n$
2	$a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \dots + a_{2n} \cdot y_n$
…	…
m	$a_{m1} \cdot y_1 + a_{m2} \cdot y_2 + \dots + a_{mn} \cdot y_n$

По принципу «максимина» первым шагом 1-ый игрок выбирает минимум (меньше нет), т.е. при любом наборе вероятностей ожидаемый выигрыш должен быть не меньше ожидаемой цены игры. Поэтому для первого игрока получим систему неравенств (ограничений):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq \upsilon \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq \upsilon \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq \upsilon \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots\ x_m \geq 0$$

(последние два строчки следуют из свойств вероятности).

Вторым шагом 1-ый игрок выбирает из всех минимумов максимум, т.е. задача 1-го игрока, чтобы цена игры была как можно больше. Получаем зависимость цены игры от оптимальной стратегии, и она должна быть как можно больше:

$$L(\bar{x}) = \upsilon \to \max$$

Предположим, что $\upsilon>0$ и разделим все ограничения на υ.

(если это не так, то рекомендуется прибавить произвольное положительное число ко всем элементам платежной матрицы; цена первоначальной игры получится вычитанием из цены модифицированной игры этого положительного числа).

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{21}\dfrac{x_2}{\upsilon} + \ldots + a_{m1}\dfrac{x_m}{\upsilon} \geq 1 \\ a_{12}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{22}\dfrac{x_2}{\upsilon} + \ldots + a_{m2}\dfrac{x_m}{\upsilon} \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{2n}\dfrac{x_2}{\upsilon} + \ldots + a_{mn}\dfrac{x_m}{\upsilon} \geq 1 \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{\upsilon} + \frac{x_2}{\upsilon} + \ldots + \frac{x_m}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon}$$

Обозначим: $\dfrac{x_1}{\upsilon} = X_1, \dfrac{x_2}{\upsilon} = X_2, \ldots, \dfrac{x_m}{\upsilon} = X_m$.

Если $\upsilon \to \max$, то $\dfrac{1}{\upsilon} \to \min$.

Получим задачу линейного программирования для нахождения оптимальной стратегии 1-го игрока:

$$L(\bar{x}) = X_1 + X_2 + \ldots + X_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \ldots + a_{m1}X_m \geq 1 \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{m2}X_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \ldots + a_{mn}X_m \geq 1 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \ldots, X_m \geq 0$$

Аналогично для 2-го игрока математическая модель игры:

$$S(\bar{y}) = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \ldots + a_{1n}Y_n \le 1 \\ a_{11}Y_1 + a_{22}Y_2 + \ldots + a_{2n}Y_n \le 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 + \ldots + a_{mn}Y_n \le 1 \end{cases}, \text{ где } \frac{y_1}{\upsilon} = Y_1, \frac{y_2}{\upsilon} = Y_2, \ldots, \frac{y_n}{\upsilon} = Y_n$$

$$Y_1 \ge 0, Y_2 \ge 0, \ldots, Y_n \ge 0$$

Если $\upsilon \to \min$, то $\frac{1}{\upsilon} \to \max$.

Задача 2-го игрока является двойственной по отношению к задаче 1-го игрока. Решить задачу линейного программирования можно с применением симплекс-метода.

Пример: В матричной игре найти оптимальные стратегии для игроков и цену игры:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = maxmin = max\{-2; -1; -1\} = -1$ нижняя цена игры;

$\beta = minmax = min\{1; 2; 0\} = 0$ верхняя цена игры;

$\alpha \ne \beta,$ следовательно, игра не имеет седловой точки, и решить ее в чистых стратегиях нельзя; также $m > 2$ и $n > 2$ и графический метод не подойдет.

Решим с применением симплекс метода:

Так как в матрице есть неположительные элементы, то цена игры может быть также не положительной. Поэтому модифицируем игру, прибавим к каждому элементу платежной матрицы положительное число **3** и сначала решим модифицированную игру.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Набор вероятностей для первого и второго игрока:

$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1,\ \ x_i \ge 0.$

$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$, где $\sum_{j=1}^{3} y_j = 1,\ \ y_i \ge 0.$

Стратегии 2-го игрока	**Ожидаемый выигрыш 1-го игрока**
1	$1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \ge \upsilon$
2	$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \ge \upsilon$
3	$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \ge \upsilon$

	$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
	$L(\bar{x}) = \upsilon \to \max$

Стратегии 1-го игрока	Ожидаемый проигрыш 2-го игрока
1	$1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \le \upsilon$
2	$4 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \le \upsilon$
3	$3 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \le \upsilon$
	$y_1 + y_2 + y_3 = 1$
	$S(\bar{y}) = \upsilon \to \min$

Разделим все ограничения на υ.

Обозначим: $\frac{x_1}{\upsilon} = X_1, \frac{x_2}{\upsilon} = X_2, \frac{x_3}{\upsilon} = X_3$. Если $\upsilon \to \max$, то $\frac{1}{\upsilon} \to \min$.

$\frac{y_1}{\upsilon} = Y_1, \frac{y_2}{\upsilon} = Y_2, \frac{y_3}{\upsilon} = Y_3$ Если $\upsilon \to \min$, то $\frac{1}{\upsilon} \to \max$.

Получим двойственные задачи линейного программирования для нахождения оптимальных стратегий 1-го и 2-го игрока:

$$L(\bar{x}) = X_1 + X_2 + X_3 \to \min \qquad S(\bar{y}) = Y_1 + Y_2 + .Y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ge 1 \\ 2X_1 + 5X_2 + 2X_3 \ge 1. \\ 3X_1 + 2X_2 + 3X_3 \ge 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \le 1 \\ 4Y_1 + 5Y_2 + 2Y_3 \le 1 \\ 3Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 \le 1 \end{cases}$$

$$X_1 \ge 0, X_2 \ge 0, X_3 \ge 0 \qquad Y_1 \ge 0, Y_2 \ge 0,.Y_3 \ge 0$$

Вначале найдем оптимальную стратегию для 2-го игрока, решив задачу линейного программирования с помощью симплекс-метода.

Введем три фиктивные переменные по количеству неравенств: Y_4, Y_5, Y_6. У целевой функции $S = Y_1 + Y_2 + Y_3$ перенесем переменные в одну сторону. Получим систему4-ых уравнений с 7-мью неизвестными.

$$\begin{cases} Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 + Y_4 = 1 \\ 4Y_1 + 5Y_2 + 2Y_3 + Y_5 = 1 \\ 3Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 + Y_6 = 1 \\ S - Y_1 - Y_2 - Y_3 = 0 \end{cases}$$

Данная система имеет бесконечное множество решений. Из этих уравнений нам нужно найти такое, для которого значение S будет максимальным.

Выпишем коэффициенты при неизвестных и свободные члены (СЧ) системы в виде симплекс-таблицы.

Расчеты представим в виде таблицы:

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП	min
0	1	2	3	1	0	0	1	Y_4	1
0	4	5	2	0	1	0	1	Y_5	1/4
0	3	2	3	0	0	1	1	Y_6	1/3
1	-1	-1	-1	0	0	0	0	S	

Выберем столбец с переменной Y_1 и 2-ую строку. Теперь переменную Y_1 делаем базисной, оставив ее только во 2-ом уравнении.

Разделим 2-ое уравнение на 4.

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП
0	1	2	3	1	0	0	1	Y_4
0	1	5/4	1/2	0	1/4	0	1/4	Y_5
0	3	2	3	0	0	1	1	Y_6
1	-1	-1	-1	0	0	0	0	S

Исключим переменную Y_1 из 1-го, 3-го и S- уравнения:

- 1-ое уравнение сложим со 2-ым, умноженным на (-1):
- 3-е уравнение сложим со 2-ым, умноженным на (-3);
- S-уравнение сложим со 2-ым.

Так как в строке для целевой функции остались отрицательные элементы, то преобразование симплекс-таблицы продолжим.

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП	min
0	0	3/4	5/2	1	-1/4	0	3/4	Y_4	3/10
0	1	5/4	1/2	0	1/4	0	1/4	Y_1	1/2
0	0	-7/4	3/2	0	-3/4	1	1/4	Y_6	1/6
1	0	1/4	-1/2	0	1/4	0	1/4	S	

Выберем столбец с переменной Y_3 и 3-ью строку; переменную Y_3 делаем базисной, оставив ее только в 3-ем уравнении.

Разделим выбранное 3-ье уравнение на 3/2:

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП
0	0	3/4	5/2	1	-1/4	0	3/4	Y_4
0	1	5/4	1/2	0	1/4	0	1/4	Y_1
0	0	-7/6	1	0	-1/2	2/3	1/6	Y_6
1	0	1/4	-1/2	0	1/4	0	1/4	S

Исключим переменную Y_3 из 1-го, 2-го и S- уравнения:

- 1-ое уравнение сложим с 3-им, умноженным на (-5/2):
- 2-е уравнение сложим с 3-им, умноженным на (-1/2);
- S-уравнение сложим с 3-им, умноженным на (1/2).

Так как в строке для целевой функции остались отрицательные элементы, то преобразование симплекс-таблицы продолжим.

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП	min
0	0	11/3	0	1	1	-5/3	1/3	Y_4	**1/11**
0	1	11/6	0	0	1/2	-1/3	1/6	Y_1	1/11
0	0	-7/6	1	0	-1/2	2/3	1/6	Y_3	-
1	0	-1/3	0	0	0	1/3	1/3	S	

Минимальное значение выбираем только из положительных ($Y_i \geq 0$). Из двух равных минимальных значений выберем то уравнение, которое ранее не выбирали.

Выбираем столбец с переменной Y_2 и 1-ую строку, т.е. переменную Y_2 делаем базисной, оставив ее только в 1-ом уравнении.

Разделим выбранное 1-ое уравнение на 11/3:

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП
0	0	1	0	3/11	3/11	-5/11	1/11	Y_4
0	1	11/6	0	0	1/2	-1/3	1/6	Y_1
0	0	-7/6	1	0	-1/2	2/3	1/6	Y_3
1	0	-1/3	0	0	0	1/3	1/3	S

Исключим переменную Y_2 из 2-го, 3-го и S- уравнения:

- 2-ое уравнение сложим с 1-ым, умноженным на (-11/6):
- 3-ье уравнение сложим с 1-ым, умноженным на (7/6);
- S-уравнение сложим с 1-ым, умноженным на (1/3)

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП
0	0	1	0	3/11	3/11	-5/11	1/11	Y_2
0	1	0	0	-1/2	0	1/2	0	Y_1
0	0	0	1	7/22	-2/11	3/22	3/11	Y_3
1	0	0	0	1/11	1/11	2/11	4/11	S

В строке для целевой функции не осталось отрицательных элементов. Следовательно, преобразование симплекс-таблицы закончилось.

В получившейся таблице столбцу свободных членов соответствуют значения базисных переменных: $Y_1 = 0$, $Y_2 = 1/11$, $Y_3 = 3/11$, $S = 4/11$.

Для нахождения значений оптимальной стратегии для 2-го игрока нужно вернуться к замене, а также от модифицированной игры перейти к первоначальной:

$$\frac{y_1}{\upsilon} = Y_1, \frac{y_2}{\upsilon} = Y_2, \frac{y_3}{\upsilon} = Y_3, S = \frac{1}{\upsilon}$$

$$S = \frac{1}{\upsilon} = \frac{4}{11} \Rightarrow \upsilon = \frac{11}{4};$$

$$Y_1 = \frac{y_1}{\upsilon} = 0 \Rightarrow y_1 = Y_1\upsilon = 0;$$

$$Y_2 = \frac{y_2}{\upsilon} = \frac{1}{11} \Rightarrow y_2 = Y_2\upsilon = \frac{1}{11} \cdot \frac{11}{4} = \frac{1}{4};$$

$$Y_3=\frac{y_3}{\upsilon}=\frac{3}{11}\Rightarrow y_3=Y_3\upsilon=\frac{3}{11}\cdot\frac{11}{4}=\frac{3}{4};$$

Оптимальная стратегия для 2-го игрока для модифицированной и первоначальной игры: $\overline{y_{опт}}=\left(0;\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$.

Цена модифицированной игры $\upsilon=\frac{11}{4}$, а цена первоначальной игры $\upsilon=\frac{11}{4}-3=-\frac{1}{4}$

Оптимальную стратегию для 1-го игрока для модифицированной игры найдем из последней симплекс-таблицы, используя свойство двойственной задачи. Значения коэффициентов для фиктивных переменных в строке целевой функции соответствуют значениям базисных переменных для 1-го игрока: $X_1=1/11$, $X_2=1/11$, $X_3=2/11$, $S=4/11$.

Для нахождения значений оптимальной стратегии для 1-го игрока вернемся к замене:

$\frac{x_1}{\upsilon}=X_1, \frac{x_2}{\upsilon}=X_2, \frac{x_3}{\upsilon}=X_3$, где цена игры та же: $\upsilon=\frac{11}{4}$

$$X_1=\frac{x_1}{\upsilon}=\frac{1}{11}\Rightarrow x_1=X_1\upsilon=\frac{1}{11}\cdot\frac{11}{4}=\frac{1}{4};$$

$$X_2=\frac{x_2}{\upsilon}=\frac{1}{11}\Rightarrow x_2=X_2\upsilon=\frac{1}{11}\cdot\frac{11}{4}=\frac{1}{4};$$

$$X_3=\frac{x_3}{\upsilon}=\frac{1}{11}\Rightarrow x_3=X_3\upsilon=\frac{2}{11}\cdot\frac{11}{4}=\frac{1}{2};$$

Оптимальная стратегия для 1-го игрока для модифицированной и первоначальной игры: $\overline{x_{опт}}=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$..

Ответ: оптимальные стратегии для игроков: $\overline{x_{опт}}=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$., $\overline{y_{опт}}=\left(0;\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ и цена игры $\upsilon=-\frac{1}{4}$

Применение матричных игр в маркетинговых исследованиях

Пример: Торговая фирма разработала несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учетом меняющейся конъюнктуры и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели дохода представлены в таблице.

Величина дохода, ден.ед.

План продажи	**Конъюнктура и спрос**		
	$К_1$	$К_2$	$К_3$
$П_1$	8	4	2
$П_2$	2	8	4
$П_3$	1	2	8

Определить оптимальный план продажи товаров.

Обозначим вероятность применения торговой фирмой стратегии $П_1 - x_1$, $П_2 - x_2$, $П_3 - x_3$; вероятность использования стратегии $K_1 - y_1$, $K_2 - y_2, K_3 - y_3$.

Стратегии 2-го игрока	Ожидаемый выигрыш 1-го игрока
1	$8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \geq \upsilon$
2	$4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \geq \upsilon$
3	$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \geq \upsilon$
	$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
	$L(\bar{x}) = \upsilon \to \max$

Стратегии 1-го игрока	Ожидаемый проигрыш 2-го игрока
1	$8 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \leq \upsilon$
2	$2 \cdot y_1 + 8 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 \leq \upsilon$
3	$1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 8 \cdot y_3 \leq \upsilon$
	$y_1 + y_2 + y_3 = 1$
	$S(\bar{y}) = \upsilon \to \min$

Для первого игрока (торговой фирмы) и второго игрока (конъюнктуры рынка и спроса покупателей) математические модели задачи имеют вид:

$$L(\bar{x}) = X_1 + X_2 + X_3 \to \min \qquad S(\bar{y}) = Y_1 + Y_2 + .Y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 8X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 1 \\ 4X_1 + 8X_2 + 2X_3 \geq 1. \\ 2X_1 + 4X_2 + 8X_3 \geq 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1 \\ 2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \leq 1 \\ Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0 \qquad Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0,.Y_3 \geq 0$$

где: $\frac{x_i}{\upsilon} = X_i$; $\frac{y_j}{\upsilon} = Y_j$, υ, - цена игры.

Найдем оптимальное решение задачи для 2-го игрока симплекс-методом:

Расчеты представим в виде таблицы:

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП	min
0	8	4	2	1	0	0	1	Y_4	1/8
0	2	8	4	0	1	0	1	Y_5	1/2
0	1	2	8	0	0	1	1	Y_6	1/3
1	-1	-1	-1	0	0	0	0		

Выберем столбец с переменной Y_1 и 1-ую строку и преобразуем выбранную строку:

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП
0	1	1/2	1/4	1/8	0	0	1/8	Y_4
0	2	8	4	0	1	0	1	Y_5
0	1	2	8	0	0	1	1	Y_6
1	-1	-1	-1	0	0	0	0	

Исключим переменную Y_1 из 2-го, 3-го и S-уравнения:

- 2-ое уравнение сложим с 1-ым, умноженным на (-2):
- 3-е уравнение сложим с 1-ым, умноженным на (-1);
- S- уравнение сложим с 1-ым.

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП	min
0	1	1/2	1/4	1/8	0	0	1/8	Y_4	1/2
0	0	7	7/2	-1/4	1	0	3/4	Y_1	3/14
0	0	3/2	31/4	-1/8	0	1	7/8	Y_6	7/62
1	0	-1/2	-3/4	1/8	0	0	1/8		

Выберем столбец с переменной Y_3 и 3-ью строку и преобразуем выбранную строку:

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП
0	1	1/2	1/4	1/8	0	0	1/8	Y_4
0	0	7	7/2	-1/4	1	0	3/4	Y_1
0	0	6/31	1	-1/62	0	4/31	7/62	Y_6
1	0	-1/2	-3/4	1/8	0	0	1/8	

Исключим переменную Y_3 из 1-го, 2-го и S-уравнения:

- 1-ое уравнение сложим с 3-им, умноженным на (-1/4):
- 2-ое уравнение сложим с 3-им, умноженным на (-7/2);
- S-уравнение сложим с 3-им, умноженным на (+3/4).

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП	min
0	1	14/31	0	4/31	0	-1/31	3/31	Y_4	3/14
0	0	196/31	0	-6/31	1	-14/31	11/31	Y_1	11/196
0	0	6/31	1	-1/62	0	3/31	7/62	Y_3	7/12
1	0	-11/31	0	7/62	0	3/31	13/62		

Выберем столбец с переменной Y_2 и 2-ую строку и преобразуем выбранную строку:

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП
0	1	14/31	0	4/31	0	-1/31	3/31	Y_4

0	0	1	0	-3/98	31/196	-1/14	11/196	Y_1
0	0	6/31	1	-1/62	0	3/31	7/62	Y_3
1	0	-11/31	0	7/62	0	3/31	13/62	

Исключим переменную Y_2 из 1-го, 3-го S-уравнения:

- 1-ое уравнение сложим со 2-ым, умноженным на (-14/31):
- 3-ье уравнение сложим со 2-ым, умноженным на (-6/31);
- S-е уравнение сложим со 2-ым, умноженным на (+11/31).

S	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	СЧ	БП
0	1	0	0	1/7	-1/14	0	1/14	Y_4
0	0	1	0	-3/98	31/196	-1/14	11/196	Y_1
0	0	0	1	-1/98	-3/98	1/7	5/49	Y_3
1	0	0	0	5/49	11/196	1/14	45/196	

В строке для целевой функции не осталось отрицательных элементов. Следовательно, преобразование симплекс-таблицы закончилось.

Оптимальная стратегия для 2-го игрока:

$Y_1 = 1/14$, $Y_2 = 11/196$, $Y_3 = 5/49$, $S = 45/196$.

$S = \frac{1}{\upsilon} = \frac{45}{196} \Rightarrow \upsilon = \frac{196}{45}$;

$Y_1 = \frac{y_1}{\upsilon} = \frac{1}{14} \Rightarrow y_1 = Y_1\upsilon = \frac{1}{14} \cdot \frac{196}{45} = \frac{14}{45}$;

$Y_2 = \frac{y_2}{\upsilon} = \frac{11}{196} \Rightarrow y_2 = Y_2\upsilon = \frac{11}{196} \cdot \frac{196}{45} = \frac{11}{45}$;

$Y_3 = \frac{y_3}{\upsilon} = \frac{5}{49} \Rightarrow y_3 = Y_3\upsilon = \frac{5}{49} \cdot \frac{196}{45} = \frac{4}{9}$;

$\overline{y_{опт}} = \left(\frac{14}{45}; \frac{11}{45}; \frac{4}{9}\right)$.

Оптимальная стратегия для 1-го игрока:

$X_1 = 5/49$, $X_2 = 11/196$, $X_3 = 1/14$.

$X_1 = \frac{x_1}{\upsilon} = \frac{5}{49} \Rightarrow x_1 = X_1\upsilon = \frac{5}{49} \cdot \frac{196}{45} = \frac{4}{9}$;

$X_2 = \frac{x_2}{\upsilon} = \frac{1}{11} \Rightarrow x_2 = X_2\upsilon = \frac{11}{196} \cdot \frac{196}{45} = \frac{11}{45}$;

$X_3 = \frac{x_3}{\upsilon} = \frac{1}{11} \Rightarrow x_3 = X_3\upsilon = \frac{1}{14} \cdot \frac{196}{45} = \frac{14}{45}$;

$\overline{x_{опт}} = \left(\frac{4}{9}; \frac{11}{45}; \frac{14}{45}\right)$..

Ответ: торговая фирма должная придерживаться стратегии $\overline{x_{опт}} = \left(\frac{4}{9}; \frac{11}{45}; \frac{14}{45}\right)$., при этом она получит доход не менее $\upsilon = \frac{196}{45}$ д.е.

Упражнения

В матричной игре симплекс-методом найти оптимальные стратегии для игроков и цену игры:

$$1).\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ 2).\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};\ 3).\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};\ 4).\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Розничное торговое предприятие разработало несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учетом меняющейся конъюнктуры и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели прибыли представлены в таблице. Определить оптимальный план продажи товаров.

Величина прибыли, млн.руб.

План продажи	**Конъюнктура и спрос**		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	2	1	3
$П_2$	1	2	3
$П_3$	2	3	1

Глава 3. Игры с «природой».

В рассмотренных выше матричных играх принимают участие два игрока; интересы их противоположны; выбор стратегий одного игрока зависит от выбора стратегий другим игроком и направлен на увеличении выигрыша (уменьшение проигрыша).

Однако, в некоторых задачах, которые также относятся к матричным играм, выбор стратегии 1-ым игроком зависит не от выбора стратегии 2-ым игроком, а от случайного состояния объективной действительности, называемой «природой». Природу будем считать условно 2-ым игроком, а ее возможные состояния стратегиями.

«Природа» - это обобщенное понятие противника, не преследующего собственных целей в игре.

Математическая модель выбора оптимальной стратегии для игрока в зависимости от состояний природы называется ***игрой с природой***.

Примеры «игр с природой» - выбор стратегии в условиях:

- колебания спроса;
- нестабильной экономической ситуации;
- изменения курса валют;
- колебания уровня инфляции;
- неустойчивой биржевой ситуации;
- погоды как природного явления и др.

Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Игра с природой представляется в виде платежной матрицы, элементы которой – выигрыши игрока А, но не является проигрышами природы П.

Матрица еще называется ***матрицей доходности***, в которой представлена информация о возможной доходности вариантов стратегии при различных сценариях развития экономической ситуации (a_{ij}- это доход игрока А в случае, если он выбрал свою i-ю стратегию, а «природа» приняла свое j-ое состояние).

Виды задач в играх с природой:

1.Задачи о принятии решений **в условиях неопределенности**, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы.

2.Задача о принятии решений **в условиях риска**, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний.

Игры с «природой» в условиях неопределенности.

При решении задачи о принятии решений в условиях неопределенности для отбора вариантов стратегии применяют так называемые ***критерии оптимальности***:

1. Критерий Вальде;

2. Критерий максимума (оптимизма);
3. Критерий минимума (пессимизма);
4. Критерий Сэвиджа;
5. Критерий Гурвица.

Для выбора наиболее эффективного варианта стратегии ко всем возможным вариантам развития применяются все критерии оптимальности одновременно: каждый из критериев позволяет отобрать только один вариант, оптимальным же будет являться тот из них, на который указало большинство критериев.

1. Критерий Вальде (максиминный критерий).

Критерий предназначен для выбора максимального элемента доходности из всех минимально возможных для каждой стратегии:

$$W = \max_i \min_j a_{ij}$$

Данный критерий ориентирует лицо, принимающее решение на осторожную линию поведения, направленную на получение дохода и минимизацию возможных рисков одновременно.

2. Критерий максимума (критерий оптимизма).

Критерий предназначен для выбора максимального элемента доходности из всех максимально возможных для каждой стратегии:

$$M = \max_i \max_j a_{ij}$$

Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет благоприятной для лица принимающего решение.

3. Критерий минимума (пессимизма).

Критерий предназначен для выбора минимального элемента доходности из всех минимально возможных для каждой стратегии:

$$P = \min_i \min_j a_{ij}$$

Данный критерий предполагает, что развитие ситуации будет неблагоприятной для лица, принимающего решение.

4. Критерий Сэвиджа (критерий минимаксного риска Сэвиджа).

Критерий предназначен для выбора минимального из всех максимально возможных элементов матрицы рисков для каждой стратегии:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}$$

r_{ij}- элементы матрицы рисков: $r_{ij} = \max_j a_{ij} - a_{ij}$,

$\max_j a_{ij}$ – максимальный элемент по столбцам исходной матрицы.

Элементы матрицы рисков показывают, какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он выберет не наилучшую стратегию, т.к. заранее не знает, какое состояние примет природа.

Критерий ориентирует лицо принимающее решение на более благоприятное развитие ситуации по сравнению с наихудшим состоянием, на которое рассчитывает вначале.

5. Критерий Гурвица.

Критерий предназначен для выбора некоторого среднего элемента матрицы доходности, отличающегося от крайних состояний – от минимального и максимального:

$$H = \max_i(\lambda \cdot \max_j a_{ij} + (1-\lambda) \cdot \min_j a_{ij}),$$

где λ – коэффициент оптимизма, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Игрок выбирает коэффициент на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта в схожих ситуациях.

Данный критерий ориентирован на установление баланса между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма при выборе стратегии путем взвешивания обоих исходов с помощью коэффициента оптимизма.

Пример: Магазин может завести в различных пропорциях товары трех типов. Их реализация и прибыль зависит от вида товара и спроса на него.

Тип товара	**Спрос**		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

1.Найти оптимальную стратегию по критерию Валде.

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(10; 12; 13) = 13$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_3.

2. Найти оптимальную стратегию по критерию максимума.

$$M = \max_i \max_j a_{ij} = \max(20; 16; 18) = 20$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_1.

3. Найти оптимальную стратегию по критерию минимума.

$$P = \min_i \min_j a_{ij} = \min(10; 12; 13) = 10$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_1.

4. Найти оптимальную стратегию по критерию Севиджа.

Матрица рисков:

Тип товара	**Спрос**		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0	3	5
A_2	4	6	1
A_3	7	0	0

$$S = \min_i \max_j r_{ij} = \min(5; 6; 7) = 5$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_1.

5. Найти оптимальную стратегию по критерию Гурвица, λ=0,5.

$H_1 = 0{,}5 \cdot 20 + (1 - 0{,}5) \cdot 10 = 10 + 5 = 15;$
$H_2 = 0{,}5 \cdot 16 + (1 - 0{,}5) \cdot 12 = 8 + 6 = 14;$
$H_3 = 0{,}5 \cdot 18 + (1 - 0{,}5) \cdot 13 = 9 + 6{,}5 = 15{,}5;$
$H = \max(15\ 14; 15{,}5) = 15{,}5;$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_3.

1. Критерий Вальде оптимальная стратегия A_3;
2. Критерий максимума (оптимизма) оптимальная стратегия A_1;
3. Критерий минимума (пессимизма) оптимальная стратегия A_1;
4. Критерий Сэвиджа оптимальная стратегия A_1;
5. Критерий Гурвица оптимальная стратегия A_3.

Ответ: в условиях неопределенности предпочтительней выбрать стратегию A_1.

Игры с «природой» в условиях риска.

Предположим, что игроку известны не только состояния, в которых случайным образом может находиться природа $\Pi_{\mathbf{1}}, \Pi_{\mathbf{2}}, \dots, \Pi_{\boldsymbol{n}}$, но и из статистических данных (предположений на личном опыте) вероятности наступления этих состояний $q_1, q_2, \dots, q_n$, при этом $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$. Это говорит о том, что лицо принимающее решение находится в условиях риска.

Игрок принимает решение на основе критериев максимального ожидаемого среднего выигрыша или минимального ожидаемого среднего риска.

Критерии оптимальности в условиях риска:

1. Критерий Байеса;
2. Критерий Лапласа;
3. Критерий Гермейера.

1. Критерий Байеса.

Критерий Байеса относительно выигрышей:

Матрицу выигрышей игрока и вероятности состояний природы можно представить в виде общей матрицы:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ \hline
A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\
q_j & q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ \hline
\end{array}$$

Критерий Байеса относительно выигрышей предназначен для выбора максимального из ожидаемых средних выигрышей (доходов) для каждой стратегии (математических ожиданий):

$$\text{B} = \max_i(q_1 \cdot a_{i1} + q_2 \cdot a_{i2} + \cdots + q_n \cdot a_{in})$$

Критерий Байеса относительно рисков:

Матрицу рисков игрока и вероятности состояний природы можно представить в виде общей матрицы:

$$\begin{array}{c|cccc|} & \Pi_1 & \Pi_2 & \ldots & \Pi_n \\ \hline A_1 & r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ A_2 & r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m & r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mn} \\ q_j & q_1 & q_2 & \ldots & q_n \\ \hline \end{array}$$

Критерий Байеса относительно рисков предназначен для выбора минимального значения из средних рисков для каждой стратегии:

$$B^r = \min_i(q_1 \cdot r_{i1} + q_2 \cdot r_{i2} + \cdots + q_n \cdot r_{in})$$

Критерий Байеса относительно выигрышей и относительно рисков эквивалентны, т.е. по обоим критериям оптимальной будет одна и та же стратегия.

2. Критерий Лапласа

Критерий Лапласа относительно выигрышей:

Вероятности состояний природы оцениваются субъективно как равнозначные: $q_j = \frac{1}{n}$.

Матрица выигрышей игрока А задается следующим образом:

$$\begin{array}{c|cccc|} & \Pi_1 & \Pi_2 & \ldots & \Pi_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \\ q_j & q_1 = \dfrac{1}{n} & q_2 = \dfrac{1}{n} & \ldots & q_n = \dfrac{1}{n} \\ \hline \end{array}$$

Критерий Лапласа относительно выигрышей предназначен для выбора максимального из ожидаемых средних выигрышей (доходов) для каждой стратегии (математических ожиданий) при равной вероятности наступления возможных состояний природы:

$$L = \max_i\left(\frac{a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}}{n}\right)$$

Критерий Лапласа относительно рисков:

Матрицу рисков игрока и вероятности состояний природы при критерии Лапласа относительно рисков можно представить матрицей:

	$П_1$	$П_2$	$\dots$	$П_n$
A_1	r_{11}	r_{12}	$\dots$	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	$\dots$	r_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	r_{m1}	r_{m2}	$\dots$	r_{mn}
q_j	$q_1 = \frac{1}{n}$	$q_2 = \frac{1}{n}$	$\dots$	$q_n = \frac{1}{n}$

Критерий Лапласа относительно рисков предназначен для выбора минимального значения из средних рисков для каждой стратегии при равной вероятности наступления возможных состояний природы:

$$L^r = \min_i \left(\frac{r_{i1} + r_{i2} + \dots + r_{in}}{n} \right)$$

Критерий Лапласа относительно выигрышей и относительно рисков эквивалентны, т.е. по обоим критериям оптимальной будет одна и та же стратегия.

3. Критерий Гермейера

Критерий Гермейера относительно выигрышей:

Критерий Гермейера относительно выигрышей предназначен для выбора максимального из всех минимально возможных элементов матрицы Гермейера для каждой стратегии.

$$G = \max_i \min_j (a_{ij} \cdot q_j)$$

Матрица Гермейера выглядит следующим образом:

	$П_1$	$П_2$	$\dots$	$П_n$
A_1	$a_{11}q_1$	$a_{12}q_2$	$\dots$	$a_{1n}q_n$
A_2	$a_{21}q_1$	$a_{22}q_2$	$\dots$	$a_{2n}q_n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	$a_{m1}q_1$	$a_{m2}q_2$	$\dots$	$a_{mn}q_n$
q_j	q_1	q_2	$\dots$	q_n

Пример. Магазин может завести в различных пропорциях товары трех типов. Их реализация и прибыль зависит от вида товара и спроса на него. Также известны вероятности состояний природы (спроса).

Тип товара	**Спрос**		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15
q	0,2	0,3	0,5

1.Найти оптимальную стратегию по критерию Байеса.

Вычислим средние выигрыши (прибыли) для каждой стратегии:

$B_1 = 20 \cdot 0{,}2 + 15 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}5 = 13{,}5;$

$B_2 = 16 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}3 + 14 \cdot 0{,}5 = 13{,}8;$
$B_3 = 13 \cdot 0{,}2 + 18 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}5 = 15{,}5;$

$$B = \max(13{,}5; 13{,}8; 15{,}5) = 15{,}5$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_3.

2. Найти оптимальную стратегию по критерию Лапласа.

Тип товара	**Спрос**		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15
q	1/3	1/3	1/3

Вычислим средние выигрыши:

$L_1 = \frac{20+15+10}{3} = 15;$
$L_2 = \frac{16+12+14}{3} = 14;$
$L_3 = \frac{13+18+15}{3} = 15{,}33;$

$$L = \max(15; 14; 15{,}33) = 15{,}33$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_3.

3.Найти оптимальную стратегию по критерию Гермейера.

Матрица Гермейера

Тип товара	**Спрос**		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	4	4,5	5
A_2	3,2	3,6	7
A_3	2,6	5,4	7,5

$G_1 = \min(4; 4{,}5; 5) = 4;$

$G_2 = \min(3{,}2; 3{,}6; 7) = 3{,}2;$

$G_3 = \min(2{,}6; 5{,}4; 7{,}5) = 2{,}6;$

$G = \max(4; 3{,}2; 2{,}6) = 4$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_1.

Определение производственной программы предприятия в условиях риска и неопределенности.

Фирма «Фармацевт» - производитель медикаментов и биомедицинских изделий в регионе. Известно, что пик спроса на некоторые лекарственные препараты приходится на летний период (препараты сердечно-сосудистой группы, анальгетики), на другие – на осенний и весенний периоды (антиинфекционные, противокашлевые).

Затраты за 1 усл.ед. продукции за сентябрь-октябрь составили: по первой группе (препараты сердечно-сосудистые и анальгетики) – 20 руб.; по второй группе (антиинфекционные, противокашлевые препараты) – 15 руб.

По данным наблюдений за несколько последних лет службой маркетинга фирмы установлено, что она может реализовать в течение рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды 3050 усл.ед. продукции первой группы и 1100 усл.ед. продукции второй группы; в условиях холодной погоды – 1525 усл.ед. продукции первой группы и 3690 усл.ед. второй группы.

В связи с возможными изменениями погоды ставится задача – определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации при цене продажи 40 руб. за 1 усл.ед. продукции первой группы и 30 руб. – второй группы.

Решить задачу, рассмотрев различные возможности:

- если у фирмы существует возможность использовать смешанную стратегию (договоры с другими организациями по реализации других объемов продукции), то решить графическим методом;

- если такой возможности нет, то применить критерии природы в условиях неопределенности, приняв коэффициент оптимизма λ=0,6;

- если также известны вероятности наступления состояний погоды, то применить критерии природы в условиях риска, приняв вероятности наступления теплой погоды - 0,4, а холодной погоды – 0,6.

Группы препаратов	**Затраты руб. за 1 усл.ед.**	**Цена руб. за 1 усл.ед.**	**Реализация усл. ед. (если тепло)**	**Реализация усл.ед. (если холодно)**
Первая группа	20	40	3050	1525
Вторая группа	15	30	1100	3690

Фирма располагает двумя стратегиями (двумя планами по производству и дальнейшей реализации препаратов двух групп):

A_1 - произвести 3050 усл.ед. препаратов 1 группы и 1100 усл.ед. препаратов 2 группы (производитель предполагает, что будет теплая погода);

A_2 – произвести 1525 усл.ед. препаратов 1 группы и 3690 усл.ед. препаратов 2 группы (производитель предполагает, что будет холодная погода).

Природа имеет два состояния:

B_1 – будет теплая погода;

B_2 – будет холодная погода.

Составим платежную матрицу (матрицу доходности), рассчитав доходы от реализации продукции, в зависимости от плана производства и состояния природы.

Рассчитаем доходы фирмы, из расчета:

$К_1 \cdot (С_1 - З_1) + К_2 \cdot (С_2 - З_2) - (П_1 - К_1) \cdot З_1 - (П_2 - К_2) \cdot З_2$,где

$К_i$ – количество реализованных товаров i-ой группы;

$С_i$ – цена товара i-ой группы;

$З_i$ – затраты на производство товара i-ой группы;

$П_i$ – планируемое количество реализованных товаров i-ой группы;

Если фирма примет стратегию $А_1$ и в действительности будет теплая погода – состояние природы $В_1$, то вся выпущенная продукция будет полностью реализована:

$$a_{11} = 3050 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) = 77\,500.$$

Если фирма примет стратегию $А_1$, а в действительности будет холодная погода – состояние природы $В_2$, то препараты второй группы будут все реализованы, а препараты первой группы будут реализованы частично (фирма понесет убытки):

$$a_{12} = 1525 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) - (3050 - 1525) \cdot 20 = 16\,500.$$

Если фирма примет стратегию $А_2$ и в действительности будет теплая погода – состояние природы $В_1$, то препараты первой группы будут все реализованы, а препараты второй группы будут реализованы частично (фирма понесет убытки):

$$a_{21} = 1525 \cdot (40 - 20) + +110 \cdot (30 - 15) - (3690 - 1100) \cdot 15 = 8\,150.$$

Если фирма примет стратегию $А_2$, а в действительности будет холодная погода – состояние природы $В_2$, то вся выпущенная продукция будет полностью реализована:

$$a_{22} = 1525 \cdot (40 - 20) + 3690 \cdot (30 - 15) = 85\,850.$$

Доход фирмы, руб.

План производства	**Состояния погоды**	
	$В_1$	$В_2$
$А_1$	77 500	16 500
$А_2$	8 150	85 850

$\alpha = maxmin = max\{16\,500; 8\,150\} = 16\,500$ руб. нижняя цена игры;

$\beta = minmax = min\{77\,500; 85\,850\} = 77\,500$ руб. верхняя цена игры;

Цена игры лежит в диапазоне 16 500 руб. $\leq v \leq$ 77 500 руб.

При всех условиях доход фирмы будет не меньше 16 500 руб., но если погодные условия совпадут с выбранной стратегией, то доход фирмы может составить 77 500 руб.

Графический метод:

Набор вероятностей для первого игрока (фирмы):

$\bar{x} = (x_1, x_2)$, где $x_1 + x_2 = 1$, $x_2 = 1 - x_1$.

Матрица доходности:

$\boldsymbol{x_1}$	**77 500**	16 500
$\boldsymbol{x_2 = 1 - x_1}$	**8 150**	85 850

Ожидаемый доход 1-го игрока:

Состояния природы	Ожидаемый доход фирмы	
1	$77\,500 \cdot x_1 + 8\,150 \cdot (1 - x_1)$=	$69\,350x_1 + 8\,150$
2	$16\,500 \cdot x_1 + 85\,850 \cdot (1 - x_1)$=	$-69\,350x_1 + 85\,850$

Максимальное из всех минимальных значений на графике – это точка пересечения двух прямых.

Найдем координаты точки пересечения:

$69\,350x_1 + 8\,150 = -69\,350x_1 + 85\,850$

$x_1 = \frac{77\,700}{138\,700} \approx 0{,}56;\ x_2 = 1 - 0{,}56 \approx 0{,}44$

Цена игры: $\upsilon \approx 49\,686$ руб.

Оптимальный план производства лекарственных препаратов составит:

Препараты первой группы – $0{,}56 \cdot 3050 + 0{,}44 \cdot 1525 = 2379$ усл.ед.

Препараты второй группы – $0{,}56 \cdot 1100 + 0{,}44 \cdot 3690 = 2239{,}6$ усл.ед.

Таким образом, фирме целесообразно производить в течение сентября и октября:

Препараты первой группы – 2 379 усл.ед.

Препараты второй группы – 2 240 усл.ед.

Ожидаемый доход составит- 46 986 руб.

В условиях неопределенности и риска используем критерии природы:

Матрица доходности:

План производства	Состояния погоды	
	B_1	B_2
A_1	77 500	16 500
A_2	8 150	85 850

Критерии природы в условиях неопределенности:

1. **Критерий Вальде;**

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(16\,500; 8\,150) = 16\,500$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_1.

2. **Критерий максимума (оптимизма);**

$$M = \max_i \max_j a_{ij} = \max(77\,500; 85\,850) = 85\,850$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_2.

3. **Критерий минимума (пессимизма);**

$$P = \min_i \min_j a_{ij} = \min(16\,500; 8\,150) = 8\,150$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_2.

4. **Критерий Сэвиджа;**

Матрица рисков:

План производства	Состояния погоды	
	B_1	B_2
A_1	0	69 350
A_2	69 350	0

$$S = \min_i \max_j r_{ij} = \min(69\,350; 69\,350) = 69\,350$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_1 или A_2.

5. **Критерий Гурвица.**

Найти оптимальную стратегию по критерию Гурвица, λ=0,6.

$H_1 = 0{,}6 \cdot 77\,500 + (1 - 0{,}6) \cdot 16\,500 = 53\,100;$

$H_2 = 0{,}6 \cdot 85\,850 + (1 - 0{,}6) \cdot 8\,150 = 54\,770;$

$H = \max(53\,100\,54\,770) = 54\,770;$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_2.

1. Критерий Вальде: оптимальная стратегия A_1;
2. Критерий максимума: оптимальная стратегия A_2;
3. Критерий минимума: оптимальная стратегия A_2;
4. Критерий Сэвиджа: оптимальная стратегия A_1 или A_2;
5. Критерий Гурвица: оптимальная стратегия A_2.

Ответ: в условиях неопределенности предпочтительней выбрать стратегию A_2.

Критерии природы в условиях риска:

1. **Критерий Байеса;**

Матрица доходности:

План производства	Состояния погоды	
	B_1	B_2
A_1	77 500	16 500
A_2	8 150	85 850
q	0,4	0,6

$B_1 = 77\,500 \cdot 0{,}4 + 16\,500 \cdot 0{,}6 = 40\,900;$

$B_2 = 8\,150 \cdot 0{,}4 + 85\,850 \cdot 0{,}6 = 54\,770;$

$$B = \max(40\,900; 54\,770) = 54\,770$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_2.

2. **Критерий Лапласа;**

Матрица доходности:

План производства	Состояния погоды	
	B_1	B_2
A_1	77 500	16 500
A_2	8 150	85 850
q	0,5	0,5

$L_1 = \frac{77\,500+16\,500}{2} = 47\,000;$

$L_2 = \frac{8\,150+85\,850}{2} = 47\,000;$

$$L = \max(47\,000; 47\,000) = 47\,000$$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_1 или A_2.

3. Критерий Гермейера.

Матрица доходности:

План производства	Состояния погоды	
	B_1	B_2
A_1	77 500	16 500
A_2	8 150	85 850
q	0,4	0,6

Матрица Гермейера:

План производства	Состояния погоды	
	B_1	B_2
A_1	31 000	9 900
A_2	3 260	51 510

$\mathrm{G}_1 = \min(31\,000; 9\,900) = 9\,900;$

$\mathrm{G}_2 = \min(3\,260; 51\,510) = 3\,260;$

$\mathrm{G} = \max(9\,900; 3\,260) = 9\,900.$

Вывод: полученный результат соответствует стратегии A_1.

Упражнения

1. Розничное торговое предприятие разработало несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учетом меняющейся конъюнктуры и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели прибыли представлены в таблице. Определить оптимальный план продажи товаров, применив критерии природы, приняв коэффициент оптимизма λ=0,6 и вероятности установления конъюнктуры и спроса q_1=0,3; q_2=0,3; q_3=0,4.

Величина прибыли, млн.руб.

План продажи	**Конъюнктура и спрос**		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	2	1	3
$П_2$	1	2	3
$П_3$	2	3	1

2. Директор торговой фирмы, продающей телевизоры, решил открыть представительство в областном центре. У него имеются альтернативы либо создать собственный магазин в отдельном помещении, либо организовать сотрудничество с местными торговыми центрами. Всего можно выделить 5 альтернатив решения: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Успех торговой фирмы зависит от того как сложится ситуации на рынке представляемых услуг. Эксперты выделяют 4 возможных варианта развития ситуации S_1,S_2,S_3,S_4. Прибыль фирмы для каждой альтернативы при каждой ситуации представлена матрицей выигрышей (млн.р./год).

Альтернативы решения	**Варианты развития ситуации на рынке услуг**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	8	12	14	5
A_2	9	10	11	10
A_3	2	4	9	22
A_4	12	14	10	1
A_5	15	6	7	14

Определить оптимальную альтернативу для принятия решения применив критерии природы, приняв коэффициент оптимизма λ=0,7 и вероятности развития ситуации на рынке услуг q_1=0,1; q_2=0,2; q_3=0,4, q_4=0,3.

3. Предприниматель решил закупить партию продовольственного товара. У него имеются 5 варианта закупки: партии A, B, C, D и E. В результате прибыль предпринимателя зависит от того, какой спрос будет не его продукцию. Возможны 4 варианта спроса: S_1,S_2,S_3,S_4. Прибыль каждой партии для каждого варианта спроса представлена в таблице:

Вид товара	**Спрос**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	161	184	171	201
B	198	187	207	204
C	187	197	207	187
D	164	164	205	207
E	206	173	190	188

Определить оптимальную альтернативу для принятия решения применив критерии природы, приняв коэффициент оптимизма λ=0,4 и вероятности состояний спроса q_1=0,2; q_2=0,3; q_3=0,1, q_4=0,4.

4. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение августа-сентября за единицу продукции составили: платья – 7 ден.ед., костюмы – 28 ден.ед. Цена реализации составляет 15 и 50 ден.ед. соответственно.

По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 1950 платье и 610 костюмов, а при прохладной погоде – 630 платьев и 1050 костюмов.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции.

Задачу решить графическим методом и с использованием критериев игр с природой, приняв коэффициент оптимизма $\lambda=0,5$ и вероятности состояний погоды $q_1 = 0,7$ и $q_2=0,3$.

Позиционные игры

Примеры, которые мы рассматривали до сих пор, включали получение единого решения (оптимальной стратегии).

На практике результат одного решения может привести к необходимости принятия следующего решения и т.д. Получается многоэтапный процесс. Графически подобные процессы могут быть представлены с помощью «дерева» решений.

Дерево решений

Дерево решений – это графическое изображение процесса принятия решений, в котором отражены альтернативные решения, альтернативные состояния среды, соответствующие вероятности и выигрыши (доходы) для любых комбинаций альтернатив и состояний среды.

Располагают дерево решений слева направо. Дерево решений состоит из «узлов» (вершин) и «ветвей».

Выделяют:

-«решающие» вершины, изображающиеся в виде квадратных узлов и обозначающие места, в которых принимаются решения;

-«ветви», выходящие из «решающих» вершин, обозначают возможные альтернативные решения и на них указываются все расходы вызванные возможными решениями;

-«случайные» вершины, изображающиеся в виде круглых узлов и обозначающие места исходов «случайных» событий (состояний «природы»), влияющих на принятие того или иного решения, а также влияющих на доход;

-«ветви», выходящие из «случайных» вершин, обозначают все возможные исходы «случайных» событий и на них указываются вероятности их появления, а также проставляются ожидаемые денежные доходы.

После того, как на «дереве» указана вся необходимая информация, на следующе этапе необходимо рассчитать ожидаемый общий доход для каждой из возможных альтернатив.

Ожидаемый общий доход рассчитывается, как ожидаемая общая прибыль за вычетом предполагаемых затрат для всех возможных альтернатив. Так как на ожидаемую прибыль влияют исходы «случайных» событий, то ее рассчитывают, как математическое ожидание для исходов и соответствующих им значений доходов.

Рассчитав ожидаемый общий доход для всех рассматриваемых альтернатив, выбирается та, для которой ожидаемый доход максимальный.

Выбор оптимальной стратегии развития предприятия в условиях трансформации рынка

Фирма может принять решение о строительстве среднего или малого предприятия. Малое предприятие впоследствии можно расширить. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на сооружаемом предприятии. Строительство среднего предприятия экономически оправдано при высоком спросе. С другой стороны, можно построить малое предприятие и через два года его расширить. Фирма рассматривает данную задачу на десятилетний период.

Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса равны 0,7 и 0,3 соответственно. Строительство среднего предприятия обойдется в 4 млн. руб., а малого – в 1 млн. руб. Затраты на расширение через два года малого предприятия оцениваются в 3,5 млн. руб.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

- среднее предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,9 (0,2) млн. руб.;
- малое предприятие при низком спросе дает 0,1 млн. руб.;
- малое предприятие при высоком спросе дает 0,2 млн. руб. в течение 10 лет;
- расширенное предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,8 (0,1) млн. руб.;
- малое предприятие без расширения при высоком спросе в течение первых двух лет и последующем низком спросе дает 0,1 млн. руб. в год за остальные восемь лет.

Определить оптимальную стратегию фирмы в строительстве предприятий.

Решение:

Изобразим вначале «дерево» решений со всеми данными.

На начальном этапе фирма решает*:* какое предприятие построить - «решающая» вершина №1.

Решение имеет две возможные альтернативы - выходящие «ветви»:

-построить среднее предприятие с затратой в 4 млн.руб

-построить малое предприятие с затратой в 1 млн.руб.

На ожидаемый доход влияет уровень спроса: «случайные» события (состояния) - «случайные» вершины:

-уровень спроса (для среднее предприятия) – «случайная» вершина №2;

-уровень спроса (для малого предприятия) – «случайная» вершина №3.

Каждая «случайная» вершина имеют по два возможных исхода – выходящие «ветви» (размер предприятия не влияет на уровень спроса):

- высокий спрос с вероятностью р=0,7;
- низкий спрос с вероятностью р=0,3.

Двигаясь из «случайной» вершины №3 по «ветви» высокий спрос, через два года фирма решает: расширять предприятие или нет – «решающая» вершина №4.

Решение имеет две возможные альтернативы - выходящие «ветви»:

-расширить малое предприятие с затратой в 3,5 млн.руб

-не расширять малое предприятие без затрат.

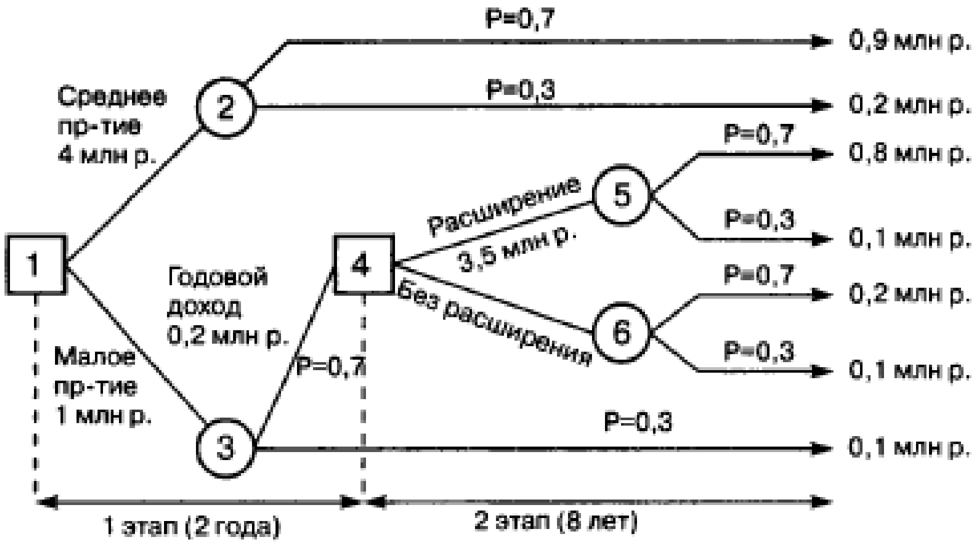
Аналогично, для выбранных альтернатив, уровень спроса – «случайные» вершины:

-уровень спроса (для расширенного малого предприятия) – «случайная» вершина №5;

-уровень спроса (для малого предприятия без расширения) – «случайная» вершина №6.

«Случайные» вершины №5 и №6 имеют те же исходы и вероятности, что и «случайные» вершины №2 и №3 .

Указав также на «ветвях», выходящих из «случайных» вершин предполагаемые ежегодные доходы получим следующее «дерево» решений:



Произведем расчеты для каждой из альтернатив.

Рассчитаем предполагаемый доход, как математическое ожидание за определенный временной промежуток с учетом затрат.

Вычисления начнем со 2-го этапа («решающей» вершины №4) за восьмилетний период:

$\text{ДР} = (0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}3) \cdot 8 - 3{,}5 \; = 1{,}22$ млн. руб.,

$\text{ДБР} = (0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}3) \cdot 8 = 1{,}36$ млн. руб.,

где ДР – доход с расширением, ДБР – доход без расширения предприятия.

Таким образом, в вершине №4 выгоднее не проводить расширение, при этом доход составит 1,36 млн. руб.

Теперь для дальнейших расчетов оставим одну «ветвь», выходящую из вершины 4, которой соответствует доход 1,36 млн. руб. за остальные восемь лет. Перейдем к вычислениям 1-го этапа. Для «решающей» вершины №1:

$\text{ДС} = (0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}3) \cdot 10 - 4 = 2{,}9$ млн. руб.;

$\text{ДМ} = (0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}3) \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 8 + 1{,}36 - 1 = 0{,}94$ млн. руб.,

где ДС – доход среднего предприятия, ДМ – доход малого предприятия.

Сравним получаемые в вершине №1 ожидаемые доходы среднего и малого предприятия. Видим, что более предпочтительным является вариант строительства среднего предприятия.

Вывод: на первоначальном этапе фирме целесообразно построить среднее предприятие.

Упражнения

1. Фирма может принять решение о строительстве среднего или малого предприятия. Малое предприятие впоследствии можно расширить. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на сооружаемом предприятии. Строительство среднего предприятия экономически оправдано при высоком спросе. С другой стороны, можно построить малое предприятие и через два года его расширить.

Фирма рассматривает данную задачу на десятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса равны 0,75 и 0,25 соответственно. Строительство среднего предприятия обойдется в 5 млн. руб., а малого – в 1 млн. руб. Затраты на расширение через два года малого предприятия оцениваются в 4,2 млн. руб.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

- среднее предприятие при высоком (низком) спросе дает 1 (0,3) млн. руб.;
- малое предприятие при низком спросе дает 0,2 млн. руб.;
- малое предприятие при высоком спросе дает 0,25 млн. руб. в течение 10 лет;
- расширенное предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,9 (0,2) млн. руб.;
- малое предприятие без расширения при высоком спросе в течение первых двух лет и последующем низком спросе дает 0,2 млн. руб. в год за остальные восемь лет.

Определить оптимальную стратегию фирмы в строительстве предприятий.

2. Фирма может принять решение о замене старого оборудования на новое того же вида или его ремонте. Отремонтированное оборудование впоследствии можно частично заменить на новое, более современное, или отремонтировать его заново.

Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую производят на этом оборудовании.

Полная замена оборудования экономически оправданна при высоком уровне спроса. С другой стороны, можно отремонтировать старое оборудование и через один год, например, заменить его на новое, более совершенное, или заново его отремонтировать.

Предполагается, что спрос может оказаться высоким, средним и низким. Фирма будет рассматривать возможность установления более совершенного оборудования или повторного ремонта старого в том случае, если спрос по истечении одного года установится на высоком уровне.

Фирма рассматривает эту задачу на пятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого, среднего и низкого уровней спроса составляют 0,6; 0,3 и 0,1 соответственно. Замена новым оборудованием того же вида, что и старое, обойдется в 2,5 млн. руб., а ремонт старого – в 0,8 млн. руб.

Затраты на частичную замену оборудования не более совершенное, чем старое, оценивается в 1,5 млн. руб., а повторный ремонт старого – в 0,8 млн. руб.

Ежегодные доходы для каждой стратегии фирмы следующие.

1.Замена старого оборудования на новое того же вида при высоком, среднем и низком уровнях спроса дает 0,95; 0,7 и 0,45 млн. руб. соответственно.

2.Ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса оценивается в 0,3; 0,15 и 0,1 млн. руб. соответственно.

3.Частичная замена оборудования на более совершенное при высоком, среднем и низком уровнях спроса составит 0,9; 0,6 и 0,4 млн. руб. соответственно.

4.Повторный ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса предполагает 0,3; 0,2 и 0,1 млн. руб. соответственно.

Определить оптимальную стратегию фирмы в замене оборудования.

3.Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий.

1) Построить большой завод стоимостью M1=700 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере R1=280 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p1=0,8 и низкий спрос (ежегодные убытки R2=80 тысяч долларов) с вероятностью p2=0,2.

2) Построить маленький завод стоимостью M2=300 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере T1=180 тысяч долларов в течении следующих 5 лет) с вероятностью p1=0,8 и низкий спрос (ежегодные убытки T2=55 тысяч долларов) с вероятностью p2=0,2.

3) Отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью p3=0,7 и p4=0,3 соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса меняются на p5=0,9 и p6=0,1 соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет.

Все расчеты выражены в текущих ценах и не должны меняться. Определить наиболее эффективную последовательность действий, основываясь на ожидаемых доходах.

Комплект индивидуальных заданий

Задания по разделу «Исследование операций»

Задача 1.Решить задачу графическим методом.

Вариант	Упражнения:	
1	а) $f = 4x_1 - 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = 2x_1 + x_2 \to \min$ $\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 \le 56, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ -2x_1 + x_2 \le 0, \\ x_1 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
2	а) $f = 3x_1 - 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_2 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = 3x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 30, \\ -3x_1 - 2x_2 \le -6, \\ -x_1 + x_2 \le 0, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
3	а) $f = 5x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 5x_1 - 4x_2 \le 20, \\ x_1 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = -x_1 + x_2 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ -2x_1 - 3x_2 \le -6, \\ x_1 - 3x_2 \le 0, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
4	а) $f = x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = x_1 + 3x_2 \to \min$ $\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 \le 60, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 0, \\ -x_1 \le -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
5	а) $f = x_1 - 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 3x_1 - x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = -x_1 - 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 12, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 0, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
6	а) $f = 3x_1 + 2x_2 \to \max$	б) $f = -2x_1 + 2x_2 \to \min$

	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ -x_1 + 3x_2 \le 0, \\ x_1 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
7	а) $f = 3x_1 + 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} 8x_1 \le 0, \\ -x_1 + 2x_2 \le 12, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = x_1 + x_2 \to \min$ $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 \le 42, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 0, \\ -x_2 \le -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
8	а) $f = x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1 + x_2 \le 11, \\ x_1 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = -x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \le -2, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 0, \\ x_1 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
9	а) $f = 4x_1 + 3x_2 \to \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \le 32, \\ 2x_1 + x_2 \le 19, \\ 3x_1 - x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = 3x_1 \to \min$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le -6, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 0, \\ x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$
10	а) $f = 3x_1 + 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \\ -x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ -x_1 \le -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

Задача 2. Составить математическую модель и решить задачу графическим способом.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют три вида ресурсов S_1, S_2, S_3. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице.

Виды ресурсов	**Число ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции.**	**Запас ресурсов**

	P_1	P_2	
S_1	a_{11}	a_{12}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	b_2
S_3	a_{31}	a_{32}	b_3
Прибыль	C_1	C_2	

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	C_1	C_2
1	16	4	8	7	5	9	784	552	567	4	6
2	5	2	3	3	2	3	505	393	348	7	4
3	10	9	5	11	4	15	1870	1455	1815	7	9
4	2	3	3	6	2	8	428	672	672	3	8
5	9	5	7	8	4	16	1431	1224	1326	3	2
6	3	2	3	3	2	5	273	300	380	4	5
7	8	3	7	6	4	9	864	864	945	2	3
8	6	2	4	3	3	4	600	520	600	6	3
9	15	4	11	5	9	10	1095	865	1080	3	2
10	8	2	6	3	3	2	840	870	560	6	2

Задача 3. Составить математическую модель и решить задачу графическим способом.

Имеется два вида корма $К_1$ и $К_2$, содержащие питательные вещества $Р_1$, $Р_2$, $Р_3$. Содержание числа единиц питательных веществ в единице каждого вида корма, необходимый минимум питательных веществ в суточном рационе животных и стоимость единицы корма приведены в таблице.

Питательное Вещество	**Содержание питательных веществ в единице корма**		**Необходимый минимум питательных веществ**
	$К_1$	$К_2$	
$Р_1$	a_{11}	a_{12}	b_1
$Р_2$	a_{21}	a_{22}	b_2
$Р_3$	a_{31}	a_{32}	b_3
Стоимость единицы корма	C_1	C_2	

Составить суточный рацион кормления животных, имеющий минимальную стоимость, которая обеспечивает содержание необходимого количества питательных веществ.

Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	C_1	C_2
1	3	1	1	1	1	3	6	4	6	4	2
2	2	1	1	1	1	3	10	8	12	3	2
3	3	1	5	7	1	3	15	73	15	6	3
4	2	4	3	2	4	1	44	30	20	5	2
5	4	1	1	1	1	2	14	8	11	9	6
6	2	1	2	3	1	4	10	18	14	4	3
7	5	4	3	4	1	3	50	38	18	5	5
8	1	2	2	1	1	1	10	14	9	3	2
9	7	2	1	1	1	3	35	10	16	4	3
10	3	8	1	1	1	6	66	12	22	6	4

Задача 4. Решить задачу симплекс-методом.

Вариант	Упражнения:	
1	а) $f = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 8, \\ -6x_1 + x_2 + x_3 \ge -5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$
2	а) $f = 4x_1 + 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 7, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 12x_3 \le 16, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12, \\ -6x_1 + x_2 + x_3 \ge -10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$
3	а) $f = 6x_1 + 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 12x_3 \le 16, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 7, \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$
4	а) $f = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 10x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 \to \max$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 9x_3 \le 14, \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 9, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge -1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$
5	а) $f = 5x_1 + 4x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$	б) $f = 9x_1 - 5x_2 + 8x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 \le 8, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$
6	а) $f = x_1 + 3x_2 \to \max$	б) $f = x_1 - 5x_2 + x_3 \to \max$

	$\begin{cases} x_1+5x_2\le 5, \\ 5x_1+x_2\le 13, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3\le 10, \\ 5x_1+8x_2-4x_3\le 5, \\ x_1-x_2-2x_3\ge -5, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases}$
7	а) $f=7x_1+4x_2\to\max$ $\begin{cases} 3x_1+2x_2\le 5, \\ 2x_1+x_2\le 3, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0. \end{cases}$	б) $f=-5x_1+7x_2+6x_3\to\max$ $\begin{cases} 5x_1+4x_2+3x_3\le 7, \\ -5x_1+x_2+x_3\ge -8, \\ 9x_1+x_2+9x_3\le 10, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases}$
8	а) $f=3x_1+4x_2\to\max$ $\begin{cases} x_1+x_2\le 5, \\ x_1+2x_2\le 2, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0. \end{cases}$	б) $f=10x_1-3x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases} 10x_1-2x_2+x_3\le 11, \\ 5x_1+8x_2-4x_3\le 1, \\ x_1-x_2-2x_3\ge -1, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases}$
9	а) $f=5x_1+6x_2\to\max$ $\begin{cases} x_1+2x_2\le 8, \\ 3x_1+2x_2\le 12, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0. \end{cases}$	б) $f=x_1-3x_2+2x_3\to\max$ $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3\le 2, \\ 6x_1+8x_2-5x_3\le 1, \\ 4x_1-x_2-5x_3\ge -1, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases}$
10	а) $f=x_1+x_2\to\max$ $\begin{cases} 2x_1+x_2\le 4, \\ 2x_1+5x_2\le 5, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0. \end{cases}$	б) $f=7x_1-3x_2+8x_3\to\max$ $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3\le 12, \\ 4x_1+8x_2-5x_3\le 8, \\ 4x_1-x_2-5x_3\ge -10, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases}$

Задача 5. Составить двойственную задачу и решить симплекс-методом.

Вариант	Упражнения:
1	$f=12x_1+8x_2+10x_3\to\min$ $\begin{cases} x_1+4x_2-4x_3\ge 7, \\ -2x_1+8x_2+x_3\ge -3, \\ x_1-5x_2+5x_3\ge 8, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases}$
2	$f=2x_1+x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases} x_1+6x_2-4x_3\ge 1, \\ -2x_1+8x_2+x_3\ge -3, \\ x_1-5x_2+5x_3\ge 2, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0. \end{cases}$
3	$f=11x_1+x_2+x_3\to\min$

	$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 10, \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 \geq -3, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$
4	$f = 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$ $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 9x_3 \geq -5, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \geq 7, \\ 3x_1 - x_2 + 9x_3 \geq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$
5	$f = 10x_1 + 5x_2 + 5x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 1, \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 \geq -5, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$
6	$f = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 \geq 9, \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 \geq -5, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$
7	$f = 14x_1 + 9x_2 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 5, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \geq -5, \\ 9x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$
8	$f = 16x_1 + 7x_2 \to \min$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \geq -5, \\ 12x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$
9	$f = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 4x_3 \geq 1, \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 \geq -3, \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 \geq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$
10	$f = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 5, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$

Задача 6. Составить математическую модель и решить задачу симплекс-методом.

Производство двух видов продукции P_1 и P_2 должно осуществляться на трех типах технологических линий S_1, S_2, S_3, причем каждая продукция должна пройти обработку на каждой из линий. Нормы времени на обработку единицы продукции, время работы технологических линий и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице.

Технологическая линия	**Норма времени на обработку единицы продукции**		**Время работы линии**
	P_1	P_2	
S_1	a_{11}	a_{12}	t_1
S_2	a_{21}	a_{22}	t_2
S_3	a_{31}	a_{32}	t_3
Прибыль	C_1	C_2	

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	t_1	t_2	t_3	C_1	C_2
1	2	3	3	6	2	8	436	672	672	3	8
2	6	2	4	3	3	4	321	520	600	6	3
3	2	1	3	6	3	7	765	747	812	7	5
4	4	3	3	4	3	5	876	393	450	6	5
5	4	3	3	4	2	6	540	444	546	2	4
6	5	2	3	3	2	3	234	393	348	7	4
7	5	3	4	3	3	4	908	630	700	5	6
8	3	2	3	3	2	5	564	300	380	4	5
9	7	3	6	3	1	2	675	600	650	6	5
10	8	2	6	3	3	2	385	870	560	6	2

Задача 7. У поставщиков A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции. Потребители B_1, B_2, B_3, B_4 должны получить эту продукцию. Количественные данные о запасах, потребностях и тарифы перевозок представлены в таблице.

Необходимо составить план перевозок, при котором сумма затрат на все перевозки была бы минимальной.

Вариант	Упражнения:
1	а)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	1	8	2	10	**190**

A2	20	21	7	8	**120**
A3	7	11	5	9	**240**
	210	**120**	**170**	**50**	

б)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	11	9	4	4	**300**
A2	5	7	10	5	**100**
A3	3	5	4	6	**650**
	300	**100**	**50**	**600**	

2

а)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	2	2	5	1	**140**
A2	1	8	11	1	**190**
A3	9	8	7	2	**230**
	120	**210**	**190**	**40**	

б)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	12	18	23	14	**150**
A2	4	5	3	16	**250**
A3	11	8	17	4	**350**
	250	**200**	**150**	**150**	

3

а)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	3	3	3	2	**200**
A2	1	7	5	11	**180**
A3	4	3	9	3	**190**
	130	**230**	**80**	**130**	

б)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	13	8	20	10	**100**
A2	22	2	7	8	**120**

A3	7	11	5	9	**240**
	210	**50**	**150**	**50**	

4

а)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	4	3	2	5	**250**
A2	22	2	5	8	**130**
A3	10	16	22	3	**230**
	70	**230**	**240**	**70**	

б)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	14	10	25	10	**450**
A2	12	8	11	15	**950**
A3	9	8	7	12	**230**
	330	**500**	**350**	**450**	

5

а)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	5	1	1	2	**250**
A2	7	2	4	3	**130**
A3	4	7	2	4	**230**
	70	**230**	**240**	**70**	

б)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	15	11	3	22	**200**
A2	10	10	5	11	**800**
A3	14	22	11	22	**900**
	350	**200**	**850**	**500**	

6

а)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	6	3	14	10	**250**
A2	3	15	4	5	**130**

A3	8	11	5	2	**250**
	160	**200**	**200**	**70**	

б)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	10	3	2	5	**450**
A2	2	2	5	8	**1000**
A3	10	6	2	3	**550**
	450	**600**	**500**	**450**	

7

а)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	7	12	5	9	**500**
A2	4	2	9	21	**300**
A3	12	3	4	7	**350**
	150	**250**	**250**	**500**	

б)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	17	15	10	11	**100**
A2	9	8	14	12	**300**
A3	6	12	15	8	**250**
	150	**100**	**150**	**250**	

8

а)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	8	10	5	11	**100**
A2	7	6	4	5	**300**
A3	7	2	8	2	**350**
	50	**300**	**200**	**200**	

б)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	18	8	12	18	**200**
A2	9	16	4	5	**200**

А3	25	18	14	6	**250**
	150	**200**	**100**	**200**	

9

а)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
А1	9	15	10	1	**100**
А2	3	8	3	2	**300**
А3	6	2	5	8	**250**
	150	**100**	**150**	**250**	

б)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
А1	19	9	6	7	**300**
А2	5	7	10	9	**200**
А3	8	5	8	6	**650**
	300	**100**	**150**	**600**	

10

а)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
А1	10	8	12	18	**200**
А2	23	1	4	25	**200**
А3	25	18	4	6	**250**
	150	**200**	**100**	**200**	

б)

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
А1	20	18	23	14	**250**
А2	14	5	12	16	**250**
А3	11	8	17	14	**350**
	250	**200**	**250**	**150**	

Задания по разделу «Теория игр»

Задача 1. В матричной игре найти:

а) верхнюю и нижнюю цены игры; б) седловую точку (если она существует); в) цену игры (решение матричной игры) и сделать вывод.

Вариант	Упражнения:
1	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ 10 & 5 & 6 & 4 \\ 20 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
2	а) $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -5 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -5 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 7 & -5 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3	а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
4	а) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 2 & 10 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & -1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

	в) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 & 10 & 5 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 8 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$
5	а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 10 & 14 & 5 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 10 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
6	а) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 4 & 6 & 7 & 5 \\ 7 & 3 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 6 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
7	а) $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 23 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 14 & 10 & 11 & 10 & 11 & 13 & 12 \\ 11 & 8 & 14 & 9 & 10 & 20 & 15 \\ 13 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 5 & 8 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 6 & 4 & 8 \\ 6 & 4 & 4 & 10 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 7 & 5 & 6 \\ 10 & 5 & 4 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

8	а) $\begin{pmatrix} 10 & -2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 8 & 6 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 15 & 16 & 7 & 4 \\ 2 & 10 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 0 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 6 & 8 & 8 \\ 10 & 9 & 11 & 9 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 9 & 10 & 10 & 9 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
9	а) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 10 & 5 & 6 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 12 & 8 & 9 & 8 & 10 \\ 11 & 8 & 10 & 7 & 12 \\ 12 & 7 & 8 & 6 & 11 \\ 10 & 8 & 9 & 8 & 12 \\ 10 & 7 & 9 & 8 & 11 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
10	а) $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 10 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ -2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Задача 2. В матричной игре найти оптимальные стратегии для игроков и цену игры:

Вариант	Упражнения:
1	а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \\ 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
2	а) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3	а) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
4	а) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
5	а) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
6	а) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$
7	а) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
8	а) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
9	а) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
10	а) $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Задача 3. В матричной игре симплекс-методом найти оптимальные стратегии для игроков и цену игры:

Вариант	Упражнения:
1	а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2	а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
3	а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
4	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
5	а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6	а) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
7	а) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
8	а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
9	а) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
10	а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Задача 4. Торговая фирма разработала несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учетом меняющейся конъюнктуры и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели дохода представлены в таблице. Определить оптимальный план продажи товаров.

<table>
<tr><td>Вариант</td><td>Упражнения:</td></tr>
<tr><td>1</td><td>
<table>
<tr><th rowspan="2">План продажи</th><th colspan="3">Конъюнктура и спрос</th></tr>
<tr><td>$К_1$</td><td>$К_2$</td><td>$К_3$</td></tr>
<tr><td>$П_1$</td><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$П_2$</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$П_3$</td><td>4</td><td>2</td><td>5</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
<table>
<tr><th>План</th><th>Конъюнктура и спрос</th></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

	продажи	$К_1$	$К_2$	$К_3$
	$П_1$	2	4	2
	$П_2$	1	3	5
	$П_3$	4	2	-3
3	**План продажи**	**Конъюнктура и спрос**		
		$К_1$	$К_2$	$К_3$
	$П_1$	3	4	2
	$П_2$	1	2	4
	$П_3$	5	3	1
4	**План продажи**	**Конъюнктура и спрос**		
		$К_1$	$К_2$	$К_3$
	$П_1$	4	3	5
	$П_2$	6	2	3
	$П_3$	2	5	-2
5	**План продажи**	**Конъюнктура и спрос**		
		$К_1$	$К_2$	$К_3$
	$П_1$	3	2	4
	$П_2$	5	3	2
	$П_3$	2	5	-5
6	**План продажи**	**Конъюнктура и спрос**		
		$К_1$	$К_2$	$К_3$
	$П_1$	5	3	-4
	$П_2$	-2	5	2
	$П_3$	1	1	3
7	**План продажи**	**Конъюнктура и спрос**		
		$К_1$	$К_2$	$К_3$
	$П_1$	2	3	3
	$П_2$	4	2	1
	$П_3$	3	2	4
8	**План продажи**	**Конъюнктура и спрос**		
		$К_1$	$К_2$	$К_3$
	$П_1$	2	1	3
	$П_2$	4	3	1
	$П_3$	1	4	2
9	**План продажи**	**Конъюнктура и спрос**		
		$К_1$	$К_2$	$К_3$
	$П_1$	3	2	4
	$П_2$	5	3	2
	$П_3$	2	5	5
10	**План продажи**	**Конъюнктура и спрос**		
		$К_1$	$К_2$	$К_3$
	$П_1$	2	4	3

	$П_2$	3	1	4
	$П_3$	2	3	3

Задача 5. Предприниматель решил закупить партию продовольственного товара. У него имеются 5 варианта закупки: партии A, B, C, D и E. В результате прибыль предпринимателя зависит от того, какой спрос будет не его продукцию. Возможны 4 варианта спроса: S_1, S_2, S_3, S_4. Прибыль каждой партии для каждого варианта спроса представлена в таблице:

Определить оптимальную альтернативу для принятия решения применив критерии природы, приняв коэффициент оптимизма λ и вероятности состояний спроса а q_i.

Вариант | Упражнения:

Вариант 1

Вид товара	**Спрос**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	161	185	171	201
B	198	187	197	204
C	200	197	207	187
D	164	164	205	175
E	206	168	190	188
q_i	0,1	0,4	0,3	0,2

λ=0,9

Вариант 2

Вид товара	**Спрос**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	161	179	171	201
B	198	187	203	204
C	194	197	207	187
D	164	164	205	162
E	206	195	190	188
q_i	0,3	0,2	0,1	0,4

λ=0,8

Вариант 3

Вид товара	**Спрос**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	161	163	171	201
B	198	187	196	204
C	196	197	207	187
D	164	164	205	177
E	206	200	190	188
q_i	0,3	0,3	0,3	0,1

λ=0,7

4

Вид товара	**Спрос**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	161	197	171	201
B	198	187	176	204
C	161	197	207	187
D	164	164	205	183
E	206	177	190	188
q_i	0,2	0,2	0,3	0,3

λ=0,6

5

Вид товара	**Спрос**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	161	164	171	201
B	198	187	188	204
C	190	197	207	187
D	164	164	205	183
E	206	194	190	188
q_i	0,1	0,5	0,3	0,1

λ=0,5

6

Вид товара	**Спрос**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	161	205	171	201
B	198	187	191	204
C	193	197	207	187
D	164	164	205	182
E	206	194	190	188
q_i	0,2	0,3	0,2	0,3

λ=0,4

7

Вид товара	**Спрос**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	161	210	171	201
B	198	187	208	204
C	164	197	207	187
D	164	164	205	184
E	206	191	190	188
q_i	0,4	0,1	0,4	0,1

λ=0,3

8

Вид товара	**Спрос**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	161	161	171	201

B	198	187	181	204
C	198	197	207	187
D	164	164	205	193
E	206	176	190	188
q_i	0,3	0,2	0,4	0,1

λ=0,2

9

Вид товара	**Спрос**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	161	185	171	201
B	198	187	193	204
C	192	197	207	187
D	164	164	205	186
E	206	177	190	188
q_i	0,4	0,3	0,2	0,1

λ=0,1

10

Вид товара	**Спрос**			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A	161	172	171	201
B	198	187	186	204
C	209	197	207	187
D	164	164	205	178
E	206	172	190	188
q_i	0,2	0,3	0,3	0,2

λ=0,7

Задача 6. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. В таблице приведены данные: затраты фирмы в течение апреля-мая на единицу продукции; цена реализации за единицу продукции. Также по данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать разное количество платьев и костюмов в условиях теплой погоды и холодной погоды. Данные реализации за условную единицу продукции в условиях погоды также представлены в таблице.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход.

Задачу решить графическим методом и с использованием критериев игр с природой, приняв коэффициент оптимизма λ и вероятности состояний погоды q_1 и q_2.

Вариант	Упражнения:

1

Виды изделий	**Затраты ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Цена ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Реализация усл. ед. (если тепло)**	**Реализация усл.ед. (если холодно)**
Платья	5	10	1220	410
Костюмы	25	40	550	930

λ =0,4; q_1=0,4; q_2=0,6.

2

Виды изделий	**Затраты ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Цена ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Реализация усл. ед. (если тепло)**	**Реализация усл.ед. (если холодно)**
Платья	10	18	1370	450
Костюмы	35	80	530	970

λ =0,6; q_1=0,6; q_2=0,4.

3

Виды изделий	**Затраты ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Цена ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Реализация усл. ед. (если тепло)**	**Реализация усл.ед. (если холодно)**
Платья	7	12	1340	430
Костюмы	28	55	490	950

λ =0,3; q_1=0,3; q_2=0,7.

4

Виды изделий	**Затраты ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Цена ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Реализация усл. ед. (если тепло)**	**Реализация усл.ед. (если холодно)**
Платья	12	22	1430	460
Костюмы	40	95	510	920

λ =0,7; q_1=0,7; q_2=0,3.

5

Виды изделий	**Затраты ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Цена ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Реализация усл. ед. (если тепло)**	**Реализация усл.ед. (если холодно)**
Платья	15	28	1460	470
Костюмы	42	115	570	980

λ =0,5; q_1=0,1; q_2=0,9.

6

Виды изделий	**Затраты ден.ед. за 1**	**Цена ден.ед. за 1**	**Реализация усл. ед. (если**	**Реализация усл.ед. (если**

	усл.ед.	**усл.ед.**	**тепло)**	**холодно)**
Платья	9	15	1310	440
Костюмы	32	70	560	990

λ =0,4; q_1=0,9; q_2=0,1.

7

Виды изделий	**Затраты ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Цена ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Реализация усл. ед. (если тепло)**	**Реализация усл.ед. (если холодно)**
Платья	11	20	1390	465
Костюмы	38	85	580	960

λ =0,3; q_1=0,2; q_2=0,8.

8

Виды изделий	**Затраты ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Цена ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Реализация усл. ед. (если тепло)**	**Реализация усл.ед. (если холодно)**
Платья	13	24	1510	475
Костюмы	41	105	605	910

λ =0,7; q_1=0,8; q_2=0,2.

9

Виды изделий	**Затраты ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Цена ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Реализация усл. ед. (если тепло)**	**Реализация усл.ед. (если холодно)**
Платья	6	11	1480	480
Костюмы	26	50	590	940

λ =0,6; q_1=0,15; q_2=0,85.

10

Виды изделий	**Затраты ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Цена ден.ед. за 1 усл.ед.**	**Реализация усл. ед. (если тепло)**	**Реализация усл.ед. (если холодно)**
Платья	8	14	1550	490
Костюмы	30	60	600	880

λ =0,5; q_1=0,85; q_2=0,15.

Задача 7. Фирма может принять решение о строительстве среднего или малого предприятия. Малое предприятие впоследствии можно расширить. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на сооружаемом предприятии. Строительство среднего предприятия экономически оправдано при высоком спросе. С другой стороны, можно построить малое предприятие и через два года его расширить.

Фирма рассматривает данную задачу на десятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса равны A и B соответственно. Строительство среднего предприятия обойдется в C млн. руб., а малого – в D млн. руб. Затраты на расширение через два года малого предприятия оцениваются в E млн. руб.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

- среднее предприятие при высоком (низком) спросе дает F (K) млн. руб.;
- малое предприятие при низком спросе дает L млн. руб.;
- малое предприятие при высоком спросе дает M млн. руб. в течение 10 лет;
- расширенное предприятие при высоком (низком) спросе дает N (p) млн. руб.;
- малое предприятие без расширения при высоком спросе в течение первых двух лет и последующем низком спросе дает R млн. руб. в год за остальные восемь лет.

Определить оптимальную стратегию фирмы в строительстве предприятий.

Вариант	A	B	C	D	E	F	K	L	M	N	P	R
1	0,7	0,3	10	3	6	2	0,5	0,4	0,5	1,8	0,4	0,4
2	0,8	0,2	9	2,5	5	1,8	0,45	0,35	0,4	1.7	0,3	0,35
3	0,75	0,25	8	2	4	1,6	0,4	0,3	0,3	1,6	0,25	0,28
4	0,6	0,4	7	1,5	3	1,4	0,3	0,2	0,25	1,5	0,2	0,18
5	0,65	0,35	6	1	2	1,2	0,2	0,15	0,2	1,3	0,15	0,1
6	0,7	0,3	8,5	2,8	4,6	1,7	0,4	0,32	0,33	1,65	0,26	0,32
7	0,8	0,2	7,5	1.7	3,8	1,5	0,35	0,22	0,28	1,55	0,22	0,21
8	0,75	0,25	9,5	2,6	5,2	1,9	0,5	0,36	0,45	1,75	0,35	0,37
9	0,6	0,4	6,5	1,2	2,3	1,3	0,25	0,15	0,25	1,4	0,18	0,15
10	0,65	0,35	7,5	1,8	3,4	1,4	0,38	0,25	0,27	1,6	0,24	0,2

Задача 8. Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий.

1) Построить большой завод стоимостью M_1 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере R_1 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p_1 и низкий спрос (ежегодные убытки R_2 тысяч долларов) с вероятностью p_2.

2) Построить маленький завод стоимостью M_2 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере T_1 тысяч долларов в течении следующих 5 лет) с вероятностью p_3 и низкий спрос (ежегодные убытки T_2 тысяч долларов) с вероятностью p_4.

3) Отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью p_3 и p_4 соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса меняются на p_5 и p_6 соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет.

Все расчеты выражены в текущих ценах и не должны меняться. Определить наиболее эффективную последовательность действий, основываясь на ожидаемых доходах.

Вариант	M_1	M_2	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	R_1	R_2	T_1	T_2
1	600	350	0,7	0,3	0,8	0,2	0,9	0,1	250	50	150	25
2	605	345	0,65	0,35	0,75	0,25	0,91	0,09	245	45	145	20
3	610	340	0,75	0,25	0,85	0,15	0,92	0,08	240	40	140	15
4	615	335	0,7	0,3	0,85	0,15	0,93	0,07	235	35	135	10
5	620	330	0,65	0,35	0,8	0,2	0,94	0,06	230	30	130	5
6	625	325	0,75	0,25	0,75	0,25	0,95	0,05	255	55	155	30
7	630	320	0,7	0,3	0,75	0,25	0,94	0,06	260	60	160	35
8	635	315	0,65	0,35	0,85	0,15	0,93	0,07	265	65	165	40
9	640	310	0,75	0,25	0,8	0,2	0,92	0,08	270	70	170	45
10	645	305	0,7	0,3	0,75	0,25	0,91	0,09	275	75	175	50

Список литературы

1. Алехин, В.В. Теория игр в экономике : лекции и примеры / В.В. Алехин ; Министерство науки и высшего образования РФ, Южный федеральный университет. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Южный федеральный университет, 2018. – 153 с. : ил. – Текст : электронный – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499455 (дата обращения: 21.11.2020). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-9275-2695-6. — Режим доступа: по подписке.
2. Красс М.С., Чупрынов Б.П., Основы математики и ее приложения в экономическом образовании : Учебник / Красс М.С., Чупрынов Б.П. — 4-ое изд., испр. — Москва : Дело, 2003. – 688 с. – Текст : электронный. – URL: https://www.studmed.ru/krass-ms-chuprynov-bp-osnovy-matematiki-i-ee-prilozheniya-v-ekonomicheskom-obrazovanii_6cd5198eac8.html (дата обращения: 21.11.2020) – ISBN 5-7749-0186-6. – Режим доступа: свободный.
3. Кайдалова, Л. В. Теория игр и исследование операций : учебное пособие / Л. В. Кайдалова, О. Е. Лаврусь. — Самара : СамГУПС, [б. г.]. — Часть 1 — 2014. — 53 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/130311 (дата обращения: 21.11.2020) — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Кайдалова, Л. В. Теория игр и исследование операций : учебное пособие / Л. В. Кайдалова, О. Е. Лаврусь. — Самара : СамГУПС, [б. г.]. — Часть 2 — 2014. — 46 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/130312 (дата обращения: 21.11.2020) — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Благодатских, А. И. Сборник задач и упражнений по теории игр : учебное пособие / А. И. Благодатских, Н. Н. Петров. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2014. — 304 с. — ISBN 978-5-8114-1665-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/49465 (дата обращения: 21.11.2020)— Режим доступа: для авториз. пользователей.