

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Тувинский государственный университет»
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ**

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

**Реализация функционально-графического подхода в задачах с
параметром**

Работа допущена к защите
Зав. кафедрой _____
Танзы М.В., к.п.н., доцент _____
(фамилия, и.о., уч.степень, звание)

Работа защищена «__» _____ 20__ г.
С оценкой _____
Председатель ГЭК _____
(подпись)

Сенашов В.И. д.ф-м.н., профессор
ведущий научный сотрудник Института
вычислительного моделирования
СО РАН, Красноярск

Члены комиссии _____

(подписи)

Студента(ки) 4 курса 5 группы
направления подготовки 01.03.01
профиль «Математика»

очной формы обучения

Сат Аюша Монгун-ооловна
(Ф. И. О.)

(подпись)
«__» _____ 20__ г.

Научный руководитель: _____
(подпись)

Троякова Г.А. к.ф-м.н., доцент
(фамилия, и. о., должность, уч.степень, звание)

Кызыл – 2020.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ	6
1.1. Понятие уравнений и неравенств в школьном курсе математики.....	6
1.2. Классификация и методы решения заданий по теме «Уравнения и неравенства с параметрами»	12
ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ	18
2.1. Методические рекомендации к решению уравнений и неравенств с параметрами.....	18
2.2. Разработка элективного курса «Уравнения и неравенства с параметрами».....	25
2.3. Апробация результатов исследования	48
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	62
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	64

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных педагогических задач школьного учителя является результат осознания цели обучения, а также условий и способов ее реализации на практике. У обучающегося после взаимодействия с педагогом и, в процессе решения педагогической задачи в результате должен появиться образовательный сегмент в форме знания или умения.

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (ФГОС) выдвинул новые требования к качеству трех основных параметров результативности образовательного процесса. А именно, требования к качеству образовательного результата, качеству учебно-познавательной деятельности образовательного процесса и качеству информационно-образовательной среды. Требования ФГОС к образовательным результатам носят рамочный характер и не дают учителям конкретных указаний относительно технологий их достижения, что инициирует потребность в поиске собственных методических подходов к разрешению возникающих педагогических ситуаций.

У школьного учителя математики одной из важных задач является развитие алгоритмического стиля мышления. Каждый ребёнок и человек мыслит по-разному, значит существуют различные стили мышления. Логика и математика развивают (логический или математический) стиль мышления, то есть способность рационально рассуждать, использовать математические формулы, из одних утверждений логически выводить другие (теоремы из аксиом и уже известных теорем) [16, с. 8].

Исходя из вышесказанного, можно сделать краткий вывод, что каждый стиль мышления и развивается самостоятельно, и с помощью различных средств. К примеру, в формирование алгоритмического стиля мышления вносит вклад школьный предмет «Алгебра и начала анализа», в частности, изучение такого раздела, как уравнения и неравенства с параметрами.

Актуальность выбранной темы состоит в том, что умение решать задачи с параметрами позволяет проверить истинные знания ученика, а не

его натренированность в процессе решения однотипных задач. Так же большую роль играет и то, что задачи с параметрами встречаются в ОГЭ и ЕГЭ, что говорит о важности умения учеников решать такие задачи. Вместе с тем, знаний, полученных в рамках школьной программы, недостаточно для решения данного типа заданий. Поэтому целесообразно изучение заданий с параметром в рамках курса по выбору.

Для основной массы школы задачи с параметрами непривычны, а для некоторых они являются сложными. Для их решения мало обычного применения формул, в процессе их решения нужно понимать закономерности и уметь анализировать отдельные случаи с помощью общих свойств объекта. При решении задач с параметрами должны присутствовать системность и последовательность [19, с. 376] .

Объем знаний, который необходимо усвоить ученику для освоения школьного курса математики, сильно возрастает, а количество часов, отведенное для занятий по данному предмету, остается тем же. Это касается не только темы «Уравнения и неравенства с параметром», но и других различных тем по алгебре и геометрии. В связи с этим возникает необходимость введения элективных курсов (курсов по выбору) по математике. Это позволяет в более полном объеме освоить курс математики, а также способствует успешному участию учеников в олимпиадах различного уровня. Кроме того, благодаря курсам по выбору, школьники учатся решать задания, отсутствующие в учебниках, но встречающиеся на ОГЭ и ЕГЭ.

Объектом исследования является процесс обучения математике в средней общеобразовательной школе.

Предмет исследования – методические особенности обучения решению уравнений и неравенств с параметром в школе.

Цель работы состоит в разработке методики обучения решению уравнений и неравенств с параметрами в рамках курса по выбору по математике.

Гипотеза исследования заключается в том, что разработка данного элективного курса поможет обеспечить более углубленное изучение школьниками методов решения уравнений и неравенств с параметром, расширить возможности развития мыслительной деятельности учащихся.

Чтобы осуществить эту цель необходимо решить следующие задачи:

Рассмотреть, как в различных учебниках вводится понятие «параметр» (анализ действующих учебников).

Рассмотреть типы уравнений и неравенств с параметрами, которые встречаются в школьной программе.

Разработать методику обучения решению уравнений и неравенств, содержащих параметр.

Разработать элективный курс для учащихся 11-го класса по теме «Уравнения и неравенства с параметром».

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1. Понятие уравнений и неравенств в школьном курсе математики

Понятие уравнения является ведущим алгебраическим понятием.

Параметр - независимая переменная, значение которой считается фиксированным или произвольным числом, или числом, принадлежащим заданному условию задачи промежутку [22, с. 40].

Уравнение с параметром — математическое уравнение, внешний вид и решение которого зависит от значений одного или нескольких параметров[22, с. 40].

Решить уравнение с параметром означает для каждого значения α найти значения x , удовлетворяющие этому уравнению, а также:

1. Исследовать, при каких значениях параметров уравнение имеет корни и сколько их при разных значениях параметров
2. Найти все выражения для корней и указать для каждого из них те значения параметров, при которых это выражение действительно определяет корень уравнения.

Рассмотрим уравнение $\alpha(x+k)=\alpha+c$, где α , c , k , x -переменные величины.

Системой допустимых значений переменных α , c , k , x называется любая система значений переменных, при которой и левая и правая части этого уравнения принимают действительные значения.

Пусть A – множество всех допустимых значений α , K – множество всех допустимых значений k , X – множество всех допустимых значений x , C -множество всех допустимых значений c . Если у каждого из множеств A , K , C , X выбрать и зафиксировать соответственно по одному значению α , k , c , и подставить их в уравнение, то получим уравнение относительно x , т.е. уравнение с одним неизвестным.

Переменные α , k , c , которые при решении уравнения считаются постоянными, называются параметрами, а само уравнение называется уравнением, содержащим параметры.

Параметры обозначаются первыми буквами латинского алфавита: α , b , c , d , ..., k , l , m , n , а неизвестные – буквами x , y , z . [19, с. 376].

Два уравнения, содержащие одни и те же параметры, называются **равносильными**, если:

- а) они имеют смысл при одних и тех же значениях параметров;
- б) каждое решение первого уравнения является решением второго и наоборот

Можно выделить три типа преобразований неравенств и их систем в школьном курсе математики:

- 1) Преобразование одной из частей неравенства.
- 2) Согласованное преобразование обеих частей неравенства.
- 3) Преобразование логической структуры.

Преобразования первого типа используются при упрощении выражения, входящего в запись неравенства. Преобразование одной из частей неравенства используют раньше других преобразований, это происходит еще в начальном курсе математики. Прочность владения навыком преобразований этого типа имеет большое значение для успешности изучения других видов преобразований, поскольку они применяются очень часто [19, с. 377].

Преобразования второго типа заключаются в согласованном изменении обеих частей неравенства в результате применения к ним арифметических действий или элементарных функций. Преобразования второго типа сравнительно многочисленны. Они являются ядром материала, изучаемого в линии неравенств.

Приведем примеры преобразований этого типа.

- 1. Прибавление к обеим частям неравенства одного и того же выражения.

2. Умножение (деление) обеих частей неравенства на выражение, принимающее только положительные значения.

Умножение (деление) обеих частей неравенства на выражение, принимающее только отрицательные значения и изменение знака неравенства на противоположный.

3. Переход от неравенства $a > b$ к неравенству $f(a) > f(b)$, где f - возрастающая функция, или обратный переход.

Переход от неравенства $a < b$ к неравенству $f(a) < f(b)$, где f - убывающая функция, или обратный переход.

Среди преобразований второго типа преобразования неравенств образуют сложную в изучении, обширную систему. Этим в значительной степени объясняется то, что навыки решения неравенств формируются медленнее навыков решения уравнений и не достигают у большинства учащихся такого же уровня.

К третьему типу преобразований относятся преобразования неравенств и их систем, изменяющие логическую структуру заданий. То есть, в каждом задании можно выделить элементарные предикаты - отдельные уравнения или неравенства [19, с. 378].

Изучение и применение преобразований оказывают большое влияние на формирование логической культуры учащихся.

В итоге изучения неравенств и их систем, учащиеся должны не только овладеть применением алгоритмических предписаний к решению конкретных заданий, но и научиться использовать логические средства для обоснования решений в случаях, когда это необходимо.

При изучении материала линии неравенств необходимо учитывать два противоположно направленных процесса, сопровождающих обучение. Первый процесс - постепенное возрастание количества классов неравенств и приемов их решения, различных преобразований, применяемых в решении. За счет увеличения объема материал как бы дробится, изучение его новых фрагментов затрудняется наличием уже изученных. Второй процесс -

установление разнообразных связей между различными классами неравенств, выявление более общих классов, закрепление обобщенных типов преобразований, упрощение описания и обоснования решений.

Можно выделить четыре основные ступени распределения материала по изучению неравенств и их систем: независимое изучение основных типов неравенств и их систем; постепенное расширение количества изученных классов неравенств и их систем; формирование приемов решения и анализа неравенств и их систем, имеющих широкую область применимости; синтез материала линии уравнений и неравенств.

К основным типам неравенств и систем неравенств, изучаемых в школьном курсе математики, относятся: линейные неравенства с одним неизвестным, квадратные неравенства, простейшие иррациональные и трансцендентные неравенства.

Введение нового основного класса неравенств сопровождается введением новой области числовых выражений, которые входят в стандартную форму записи ответа. Когда материал усвоен, следует предлагать задания, в которых могут возникать нестандартные ответы для данного класса неравенств.

Заметную роль при изучении неравенств играют универсальные средства решения и исследования. Их можно разделить на три группы.

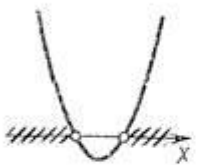
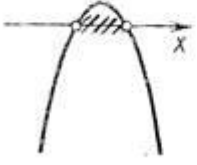
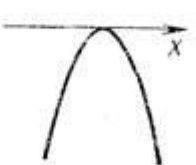
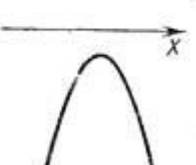
Первая группа включает в себя логические методы обоснования решения. Он заключается в переходе от исходных неравенств к новым. Такие переходы производятся до тех пор, пока не получаются задания, относящиеся к известным классам.

Вторая группа состоит из вычислительных приемов, с помощью которых производятся упрощения одной из частей данного неравенства, проверка найденных корней при помощи подстановки вместо неизвестного, различные промежуточные подсчеты и т.д.

Третья группа - это наглядно-графические приемы. В качестве основы, большинство этих приёмов, используют координатную прямую или координатную плоскость. [2, с. 378].

Координатная прямая позволяет решать некоторые неравенства и системы неравенств с одним неизвестным, а также неравенства с модулями. Например, прием решения систем линейных неравенств с одним неизвестным состоит в том, что на координатную прямую наносятся множества решений каждого неравенства, а потом выделяется их общая часть.

Использование координатной плоскости позволяет применить графические методы к решению и исследованию неравенств и их систем с одним, а также с двумя неизвестными. Графические приемы эффективно применяются для изображения результатов исследования там, где аналитическая запись громоздка. Характерным примером служит схема, на которой приведены различные случаи решения неравенства $ax^2+bx+c>0$, помещенная на рис.3. В результате определенной тренировки учащиеся привыкают пользоваться такой схемой, а затем ее мысленным образом.

$ax^2+bx+c>0$			
	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			

Основные классы неравенств и их систем можно разбить на две группы. Первая группа алгебраические неравенства и системы. Вторая

группа - трансцендентные неравенства и системы. В состав этой группы входят показательные, логарифмические и тригонометрические неравенства.

Первая группа получает достаточное развертывание, вплоть до формирования прочных навыков решения, уже в курсе алгебры неполной средней школы. Вторая же группа в этом курсе только начинает изучаться, причем рассматриваются далеко не все классы, а окончательное изучение происходит в курсе алгебры и начал анализа. При изучении второй группы приходится опираться на общие понятия и методы, относящиеся к линии неравенств. Указанное различие, однако, не является единственным, которое противопоставляет эти две группы. Более существенным является учет особенностей, связанных с развертыванием материала каждой из этих групп. По сравнению с первой группой неравенства, входящие в состав второй, в процессе их изучения обнаруживают значительно более сложные связи с другими линиями курса математики - числовой, функциональной, тождественных преобразований и др [19, с. 378].

Последовательность изучения различных классов неравенств и систем различна в разных учебниках. Однако количество возможных вариантов для последовательности их введения не слишком велико - классы находятся в определенной логической зависимости друг от друга, которая предписывает порядок их появления в курсе.

Наличие такого разнообразия подходов затрудняет методическое описание, поскольку принятие того или иного пути требует различных приемов изучения материала.

Отметим ряд особенностей в изучении неравенств:

1) Как правило, навыки решения неравенств, за исключением квадратных, формируются на более низком уровне, чем уравнений соответствующих классов. Эта особенность имеет объективную природу: теория неравенств сложнее теории уравнений. Отмеченное обстоятельство отчасти смягчается другими особенностями изучения неравенств, поэтому в

целом можно считать, что содержательная сторона неравенств в школьном курсе от этого не страдают.

2) Большинство приемов решения неравенств состоит в переходе от данного неравенства $a > b$ к уравнению $a = b$ и последующем переходе от найденных корней уравнения к множеству решений исходного неравенства. Пожалуй, такого перехода не производится лишь при рассмотрении линейных неравенств, где в нем нет необходимости из-за простоты процесса решения таких неравенств. Эту особенность необходимо постоянно подчеркивать, для того, чтобы переход к уравнениям и обратный переход превратились в основной метод решения неравенств; в старших классах он представлен в виде "метода интервалов".

3) В изучении неравенств большую роль играют наглядно-графические средства. [23, с. 28-33].

Указанные особенности могут быть использованы для обоснования расположения материала, относящегося к неравенствам, количества заданий, необходимых для усвоения программного минимума.

Перечисленные особенности показывают, что изучение предшествующего материала сильно влияет на изучение неравенств. Поэтому роль этапа синтеза в изучении неравенств особенно возрастает.

1.2. Классификация и методы решения заданий по теме «Уравнения и неравенства с параметрами»

1. Линейное уравнение $ax = b$, записанное в общем виде, можно рассматривать как уравнение с параметрами, где x – неизвестное, a , b – параметры. Для этого уравнения особым или контрольным значением параметра является то, при котором обращается в нуль коэффициент при неизвестном

2. При решении линейного уравнения с параметром рассматриваются случаи, когда параметр равен своему особому значению и отличен от него

3. Особым значением параметра a является значение $a = 0$

4. Если $a \neq 0$, то при любой паре параметров a и b оно имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$

5. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид: $0x = b$. В этом случае значение

$b = 0$ является особым значением параметра b

При $b \neq 0$ уравнение решений не имеет

При $b = 0$ уравнение примет вид: $0x = 0$. Решением данного уравнения является любое действительное число

Неравенства вида $ax > b$ и $ax < b$ ($a \neq 0$) называются линейными неравенствами. Множество решений неравенства $ax > b$ – промежуток

$(\frac{b}{a}; +\infty)$, если $a > 0$, и $(-\infty; \frac{b}{a})$, если $a < 0$. Аналогично для неравенства

$ax < b$ множество решений – промежуток $(-\infty; \frac{b}{a})$, если $a > 0$, и $(\frac{b}{a}; +\infty)$,

если $a < 0$

Пример 1. Решить уравнение $ax = 5$

Решение: Это линейное уравнение

Если $a = 0$, то уравнение $0x = 5$ решения не имеет

Если $a \neq 0$, $x = \frac{5}{a}$ - решение уравнения

Ответ: при $a \neq 0$, $x = \frac{5}{a}$

при $a = 0$ решения нет

Пример 2. Решить уравнение $ax - 6 = 2a - 3x$.

Решение: Это линейное уравнение, $ax - 6 = 2a - 3x$ (1)

$$ax + 3x = 2a + 6$$

Перепишав уравнение в виде $(a+3)x = 2(a+3)$, рассмотрим два случая:

$a = -3$ и $a \neq -3$

Если $a = -3$, то любое действительное число x является корнем уравнения (1). Если же $a \neq -3$, уравнение (1) имеет единственный корень $x = 2$

Ответ: При $a = -3$, $x \in R$; при $a \neq -3$, $x = 2$

Пример 3. При каких значениях параметра a среди корней уравнения

$2ax - 4x - a^2 + 4a - 4 = 0$ есть корни больше 1?

Решение: Решим уравнение $2ax - 4x - a^2 + 4a - 4 = 0$ – линейное уравнение

$$2(a - 2)x = a^2 - 4a + 4$$

$$2(a - 2)x = (a - 2)^2$$

При $a = 2$ решением уравнения $0x = 0$ будет любое число, в том числе и большее

1. При $a \neq 2$ $x = \frac{a-2}{2}$. По условию $x > 1$, то есть $\frac{a-2}{2} > 1$, $a > 4$

Ответ: При $a \in \{2\} \cup (4; \infty)$

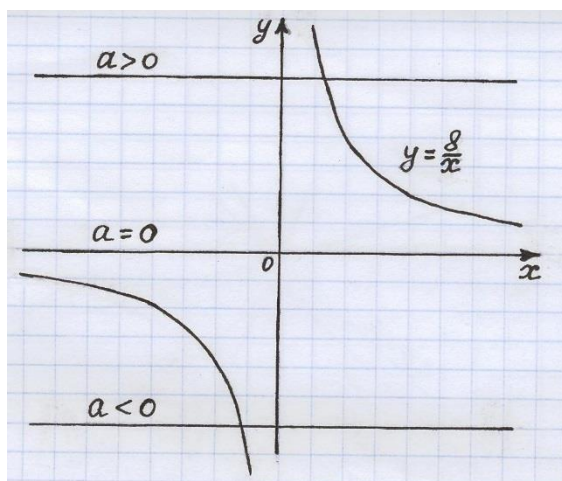
Пример 4. Для каждого значения параметра a найти количество корней уравнения $ax = 8$

Решение. $ax = 8$ – линейное уравнение.

$$a = \frac{8}{x},$$

$y = a$ – семейство горизонтальных прямых;

$y = \frac{8}{x}$ – графиком является гипербола. Построим графики этих функций



Ответ: Если $a = 0$, то уравнение решений не имеет. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет одно решение

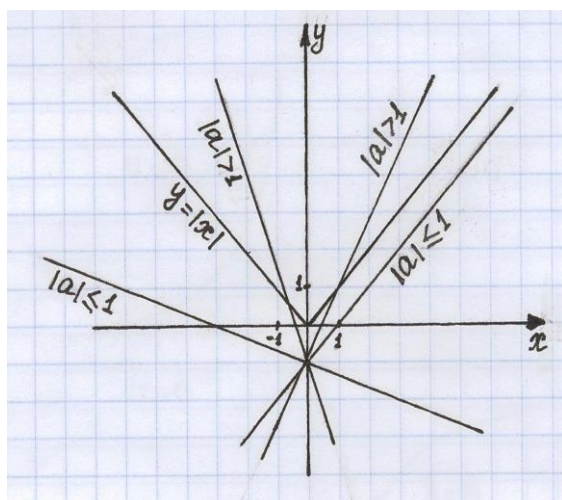
Пример 5. С помощью графиков выяснить, сколько корней имеет уравнение:

$$|x| = ax - 1.$$

$$y = |x|,$$

$y = ax - 1$ – графиком является прямая, проходящая через точку $(0; -1)$.

Построим графики этих функций



Ответ: При $|a| > 1$ – один корень

при $|a| \leq 1$ – уравнение корней не имеет

Пример 6. Решить неравенство $ax + 4 > 2x + a^2$

1. Решение : $ax + 4 > 2x + a^2 \Leftrightarrow (a - 2)x > a^2 - 4$. Рассмотрим три случая

2. $a=2$. Неравенство $0 < x < 0$ решений не имеет
3. $a > 2$. $(a-2)x > (a-2)(a+2) \Leftrightarrow x > a+2$
4. $a < 2$. $(a-2)x > (a-2)(a+2) \Leftrightarrow x < a+2$

Ответ. $x > a+2$ при $a > 2$; $x < a+2$, при $a < 2$; при $a=2$ решений нет

Квадратные уравнения, содержащие параметр

Квадратное уравнение – это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, a, b, c – параметры.

Для решения квадратных уравнений с параметром можно использовать стандартные способы решения на применение следующих формул:

1) дискриминанта квадратного уравнения: $D = b^2 - 4ac$, $(\frac{D}{4} = k^2 - ac)$

2) формул корней квадратного уравнения: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$,

$$(x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a})$$

Квадратными называются неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad (1), (2)$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad (3), (4)$$

Множество решений неравенства (3) получается объединением множеств решений неравенства (1) и уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Аналогично находится множество решений неравенства (4)

Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ меньше нуля, то при $a > 0$ трехчлен положителен при всех $x \in \mathbb{R}$

Если квадратный трехчлен имеет корни $(x_1 < x_2)$, то при $a > 0$ он положителен на множестве $(-\infty; x_2) \cup (x_2; +\infty)$ и отрицателен на интервале $(x_1; x_2)$. Если $a < 0$, то трехчлен положителен на интервале $(x_1; x_2)$ и отрицателен при всех $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

Пример 1. Решить уравнение $ax^2 - 2(a-1)x - 4 = 0$.

Это квадратное уравнение

Решение: Особое значение $a = 0$

При $a = 0$ получим линейное уравнение $2x - 4 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = 2$

При $a \neq 0$. Найдем дискриминант

$$D = (a-1)^2 + 4a = (a+1)^2$$

Если $a = -1$, то $D = 0$ – один корень

Найдем корень, подставив вместо $a = -$

$1-x^2 + 4x - 4 = 0$, то есть $x^2 - 4x + 4 = 0$, находим, что $x = 2$

Если $a \neq -1$, то $D > 0$. По формуле корней получим: $x = \frac{(a-1) \pm (a+1)}{a}$;

$$x_1 = 2, x_2 = -\frac{2}{a}$$

Ответ: При $a=0$ и $a=-1$ уравнение имеет один корень $x = 2$; при $a \neq 0$ и

$a \neq -1$ уравнение имеет два корня $x_1 = 2, x_2 = -\frac{2}{a}$

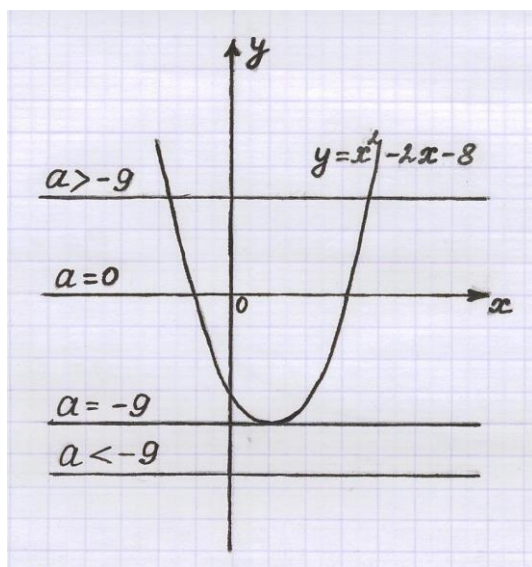
Пример 2. Найдите количество корней данного уравнения $x^2 - 2x - 8 - a = 0$ в зависимости от значений параметра a

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $x^2 - 2x - 8 = a$

$y = x^2 - 2x - 8$ - графиком является парабола;

$y = a$ - семейство горизонтальных прямых

Построим графики функций



Ответ: При $a < -9$, уравнение решений не имеет; при $a = -9$, уравнение имеет одно решение; при $a > -9$, уравнение имеет два решения

Пример 3. При каких a неравенство $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$ выполняется для всех значений x ?

Решение. Квадратный трехчлен положителен при всех значениях x , если $a - 3 > 0$ и $D < 0$, т.е. при a , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} a - 3 > 0 \\ a^2 - (a - 3)(3a - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 > 0 \\ 2a^2 - 15a + 18 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (3; +\infty) \\ a \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (6; +\infty) \end{cases}, \text{ откуда следует,}$$

что $a > 6$

Ответ. $a > 6$

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

2.1. Методические рекомендации к решению уравнений и неравенств с параметрами

Одним из сложнейших разделов в курсе школьной математики является решение задач с параметром. Для того, чтобы не потерять решений и не получить лишние необходимо не только умение применять стандартные методы решения уравнений и неравенств, но и внимательность, умение проводить логические построения. Для применения этих умений при решении задач, от школьника требуется развитие математической культуры и логического мышления.

К сожалению, в неспециализированных школах не уделяется должного внимания решению задач с параметром, и даже в школах и классах с углубленным изучением математики («Алгебра и математический анализ для 10 и 11 классов», Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд) им отведено место только в 11 классе. По моему мнению, задачи с параметром необходимо вводить начиная с изучения линейных и квадратных уравнений и неравенств. Таковыми могут являться задачи на определение корней

уравнения, исследования их количества или поиск решения в общем виде. Необходимо, чтобы учащиеся в самом начале изучения уравнений с параметром усвоили следующее:

- важность особого обращения с параметром, так как параметр – это некое число, но в то же время оно неизвестно.
- как правило, запись ответа при решении уравнений с параметром существенно отличается от ответов аналогичных уравнений не содержащих параметра.

На наш взгляд, если бы каждый тип изученных уравнений или неравенств закреплялся аналогичными примерами с параметром, то школьникам было бы намного легче привыкнуть к самому понятию параметр, к тому же это позволило бы эффективнее закрепить пройденный материал и, наконец, решение уравнений с параметром способствует развитию интереса к предмету математика, способствует развитию логики и математической культуры.

Так же необходимость изучения задач с параметром в школьном курсе математики обусловлена тем, что подобные задания встречаются на ЕГЭ, и естественно вызывают большие затруднения у школьников.

На основе анализа учебной [1,4,6,7] и методической [2,3,5] литературы был выделен следующий алгоритм решения уравнений и неравенств с параметром:

Найти область определения параметра, учитывая, чтобы выражение или функция при данном параметре имели смысл.

Найти контрольные значения параметра, если они, при нанесении их на числовую ось, разбивают область допустимых значений параметра на промежутки, то на каждом из них необходимо найти решение заданного уравнения.

Оставить только те решения, которые удовлетворяют полученным ограничениям.

Найденные значения параметра так же добавить на числовую ось и в зависимости от значений параметра, записать полученные решения.

Выписать решение в зависимости от значений параметра.

Ответ при решении задач с параметром записывается специальным образом, так как необходимо, чтобы можно было установить правильный ответ при любой значении параметра. Кроме того необходимо записать в ответ те решения, при которых выражение не имеет смысла.

Для наглядности решения удобно использовать числовую прямую. На нее необходимо нанести все контрольные значения параметра и отметить на полученных промежутках ответы задачи.

Далее рассмотрим применение данного алгоритма на примере:

$$b(b - 3)x > 3 - b$$

Решение: Неравенство $b(b - 3)x > 3 - b$ не будет иметь смысла тогда, когда оно не будет содержать переменной x , т.е. при $b(b - 3) = 0$. Отсюда получим два решения данного равенства: $b = 0$ и $b = 3$. Нанеся значения на числовую прямую, получим три промежутка: $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

Для каждого из промежутков найдем решение неравенства.

При $b < 0$ выражение $b(b - 3) > 0$. Следовательно, мы можем разделить обе части уравнения на это выражение не меняя знак неравенства.

Получим:

$$x > -\frac{1}{b}$$

При $0 < b < 3$ выражение $b(b - 3) < 0$. Следовательно, получим:

$$x < -\frac{1}{b}$$

При $b > 3$ выражение $b(b - 3) > 0$. Следовательно, получим:

$$x > -\frac{1}{b}$$

При $b = 0$ и $b = 3$ получим: $0 * x > 2$, не имеющее решений.

Поместим все полученные решения на числовую ось Ox и запишем ответ:

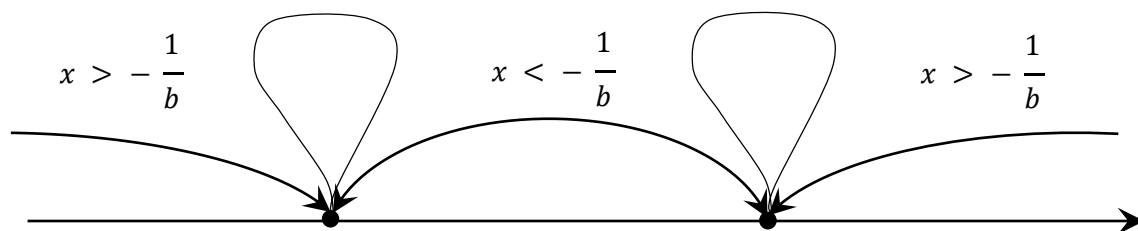


Рис. 5. Числовая прямая с контрольными значениями и интервалами.

Ответ. Если $b < 0$, то $x < -\frac{1}{b}$; если $0 < b < 3$, то $x > -\frac{1}{b}$; если $b > 3$,

то $x < -\frac{1}{b}$; если $b = 0$ и $b = 3$ – решений нет.

Главная особенность задач с параметрами - ветвления решения в зависимости от значений параметров. Другими словами, процесс решения осуществляется классификаций частных уравнений (неравенств) по типам с последующим поиском решений каждого типа.

Одновременно решение бесконечной совокупности частных уравнений и неравенств с учетом требования равносильности преобразований возможно лишь при развитии достаточного уровня логического мышления. С другой стороны, формирование методов решения уравнений и неравенств с параметрами обеспечивает значительный процесс в развитии математической культуры учащихся. Развивающий характер уравнений и неравенств с параметрами определяется их способностью реализовывать многие виды мыслительной деятельности учащихся:

Выработка определенных алгоритмов мышления.

Умение определить наличие и количество корней в уравнении.

Решение семейств уравнений, являющихся следствием данного.

Выражение одной переменной через другую.

Нахождение области определения уравнения.

Повторение большого объема формул при решении.

Значение соответствующих методов решения.

Широкое применение словесной и графической аргументации.

Развитие графической культуры учащихся.

Все вышесказанное позволяет говорить о необходимости изучения решений задач с параметрами.

Пример

1 Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$a^2x - a = x + 1$$

Решение.

$$a^2x - a = x + 1$$

$$a^2x - x = a + 1$$

$$(a^2 - 1)x = a + 1$$

$$(a - 1)(a + 1)x = a + 1$$

$$(a - 1)(a + 1) = 0$$

$$a = 1 \text{ или } a = -1$$

если $a = 1$, то уравнение принимает вид

$$0 \cdot x = 2 - \text{нет решения}$$

Если $a = -1$

$$0 \cdot x = 0, x \in \mathbb{Z}$$

Если $a \neq 1; a \neq -1$

$$x = \frac{a+1}{(a+1)(a-1)} \text{ единственное решение}$$

$$x = \frac{1}{a-1}$$

Ответ: при $a = -1$, x – любое

$a = 1$, нет решения

$a \neq 1$

$$a \neq -1 \quad x = \frac{1}{a-1}$$

Пример 2

При всех значениях a решите уравнение

$$\frac{2(a+1)x}{a} = 3(x+1) + \frac{7}{a}$$

Решение

ОДЗ: $x \in R, a \neq 0$

$a = 0$ – нет корней

$a \neq 0$ умножим обе части уравнения на $a \neq 0$

$$2(a+1)x = 3a(x+1) + 7$$

$$2ax + 2x - 3ax - 3a = 7$$

$$2x - ax = 7 + 3a$$

$$(2-a)x = 7 + 3a$$

$$ax = b$$

$$2-a=0 \Rightarrow a=2$$

Если $a=2$, то $0 \cdot x = 13$ – нет корней

Если $a \neq 2$ уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{3a+7}{2-a}$$

при $a=0$ или $a=2$ – нет корней

Пример

При каких значениях параметра a уравнение

$(a^2-1)x = a^2-2a-3$ имеет единственное решение, принадлежащее лучу $[1; +\infty)$

Решение

$$(a^2-1)x = a^2-2a-3$$

$$a^2-1=0 \quad a^2=1 \quad a=\pm 1$$

Если $a=1 \Rightarrow 0 \cdot x = -4$ – нет решения

$a=-1 \Rightarrow 0-x=0, \quad x \in R$ – условие не выполняется

если $a \neq 1, a \neq -1$ – уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{a^2-2a-3}{a^2-1}$$

$$x = \frac{(a+1)(a-3)}{(a+1)(a-1)}$$

$$x = \frac{a-3}{a-1} \text{ тогда } \frac{a-3}{a-1} \geq -1$$

$$\frac{a-3+a-1}{a-1} \geq 0$$

$$\frac{2a-4}{a-1} \geq 0$$

$$\frac{a-2}{a-1} \geq 0$$

Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup [2; +\infty)$

Пример.

При каких значениях параметра a не имеет решений уравнение

$$\frac{x-a}{x-2} - \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$$

Решение:

ОДЗ: $a \in R, x \neq 2$ и $x \neq -2$

На ОДЗ преобразуем исходное уравнение:

$$\frac{x-a}{x-2} - \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x^2-4} \quad / \cdot (x-2)(x+2) \neq 0$$

$$(x-a)(x+a) - x(x-2) = 1$$

$$x^2 + 2x - ax - 2a - x^2 + 2x = 1$$

$$2x - ax + 2x = 2a + 1$$

$$4x - ax = 2a + 1$$

$$(4-a)x = 2a + 1 \Rightarrow ax = b$$

$$4-a=0$$

$$a=4$$

если $a=4 \Rightarrow 0 \cdot x = 9$ – нет решений

если $a \neq 4$, то $x = \frac{2a+1}{4-a}$ – единственное решение

$$\frac{2a+1}{4-a} = 2$$

$$\frac{2a+1}{4-a} = -2$$

$$2a+1 = 2(4-a)$$

$$2a+1 = -8+2a$$

$$2a + 1 = 8 - 2a$$

$$0 * a = -9 - \text{нет решений}$$

$$4a = 7$$

$$a = \frac{7}{4} = 1,75$$

Ответ: При $a = 1,75$ и $a=4$ уравнение не имеет решений

Пример

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ 2xy = 2a - 1 \end{cases} \text{ имеет ровно два решения}$$

Решение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ 2xy = 2a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = x^2 + y^2 \\ 2xy = x^2 + y^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a = x^2 + y^2 \\ (x - y)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = x^2 + y^2 \\ x - 1 = 1 \\ x - y = -1 \Leftrightarrow x = y - 1 \end{cases} \quad x = y + 1 \Rightarrow$$

$$2y^2 + 2y - 2a = 1 \quad D = 16a - 4$$

$$2y^2 - 2y - 2a + 1 = 0 \quad D = 16a - 4$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{1}{4}$$

2.2. Разработка элективного курса «Уравнения и неравенства с параметрами»

Задачи с параметрами в настоящее время включены в программу большинства подготовительных факультативов, а также ряда базовых курсов алгебры и начал анализа в связи с потребностью подготовки учащихся к сдаче вступительных и единых экзаменов. Однако значимость этого курса не ограничивается лишь диагностической ценностью. Умение решать задачи с параметром способствует повышению качества знаний и умений учащихся, интеллектуальному развитию. Задачи с параметрами дают прекрасный материал для настоящей учебно-исследовательской работы. К сожалению, в

школьных учебниках таких задач недостаточно. Основная цель курса расширить и углубить знания учащихся по умению решать задачи с параметром. Курс разработан на основе материалов газеты «Математика» и вступительных экзаменов в различные российские вузы

Курс рассчитан на 35 часов. В неделю – 2,5 часа

Цель:

Создать условия для формирования и развития у учащихся:

Интеллектуальных и научно-исследовательских способностей

Интереса к изучению задач с параметрами, имеющих реальное внутриматематическое и прикладное значение

Умения самостоятельно приобретать и применять знания

Содержание программы

1. Введение (2 ч.)
2. Линейные уравнения и простейшие уравнения вида $p(x)/q(x)=0$. (2ч.)
3. Квадратные уравнения. (5ч.)
4. Задачи с параметрами в разделе «Элементы математического анализа». (2ч.)
5. Семинар: решение задач с параметром, предлагаемых на ЕГЭ. (2ч.)

Введение

1. Что такое параметр?

Определение. Параметром называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству

(Независимость параметра заключается в его «неподчинении» свойствам, вытекающим из условия задачи.)

Например: $2a(a-2) = a-2$, где a – произвольное действительное число, т.е. параметр

2. Что означает «решить задачу с параметром»?

Это зависит от вопроса в задаче.

Если требуется решить уравнение, неравенство и т. п., то это означает найти ответ для любого значения параметра

Если надо найти значение параметра, при котором множество решений уравнения и т. д. удовлетворяет какому-то условию, то решение задачи состоит в поиске этих значений

3. Основные типы задач с параметром

Тип 1. Задачи, которые надо решить или для любого значения параметра, или для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству

Тип 2. Задачи, для которых требуется найти количество решений в зависимости от значений параметра

Тип 3. Задачи, для которых надо найти все те значения параметра, при которых указанные задачи имеют заданное число решений

Тип 4. Задачи, для которых при искомым значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения

4. Основные методы решения задач с параметром

Способ 1. Аналитический. Самый трудный, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им. Способ силового, прямого, «наглого» решения

Способ 2. Графический. В зависимости от задачи рассматриваются графики или в координатной плоскости $(x; y)$, или в координатной плоскости $(x; a)$

Графический способ применяют тогда, когда параметр присутствует в уравнении только в качестве слагаемого и не связан с переменной

Способ 3. Решение относительно параметра. Переменные x и a принимаются равнозначными, и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных и заканчиваем решение

План решения

Множество значений параметра разбиваем на подмножества, на которых происходит качественное изменение уравнения

Для этого необходимо найти контрольные значения параметра.
(В дальнейшем будем обозначать К.З.)

Линейные уравнения и неравенства

Уравнение вида $ax - b = 0$, где a, b – параметры, называется линейным уравнением относительно x . Оно приводится к виду $ax = b$

К.З. находятся при обращении старшего коэффициента в 0

1. $0x = 0$ множество решений
2. $0x = c$ корней нет
3. $kx = b$ единственное решение

Решение примеров

1. Для каждого значения параметра, a найдите решение уравнения

А). $ax = 5$

Решение

К.З: $a = 0$

Если $a = 0$, то $0x = 5$ корней нет

Если $a \neq 0$, то $x = \frac{5}{a}$ один корень

Ответ: при $a \neq 0$ $x = \frac{5}{a}$; при $a = 0$ корней нет

Б). $ax + 1 > 0$

Решение

К.З. $a = 0$

Ответ: При $a = 0$ $0x > -1$ множество решений

При $a > 0$ $x > -\frac{1}{a}$

При $a < 0$ $x < -\frac{1}{a}$.

В). $2a(a-2)x = a-2$

Решение

К.З. $2a(a-2) = 0$, $a = 0$, $a = 2$

Ответ: При $a = 0$ $0x = -2$ корней нет

При $a = 2$ $0x = 0$ множество корней

При $a \neq 0$, $a \neq 2$ $x = \frac{a-2}{2a(a-2)} = \frac{1}{2a}$ один корень

Г). $(a^2 - 9)x = a - 3$

Решение

К.З. $a = 3, a = -3$

Ответ: При $a = 3$ $0x = 0$ множество решений

При $a = -3$ $0x = -6$ корней нет

При $a \neq 3, a \neq -3$ $x = \frac{1}{a+3}$; один корень

2. Сколько корней имеет уравнение $ax = 3a + 8$ при указанных значениях параметра a : $a = 10, a = -2, a = \frac{1}{4}, a = 0$

Решение

$x = \frac{3a+8}{a}$, О.Д.З. $a \neq 0$

Ответ: При $a = 10, a = -2, a = \frac{1}{4}$ один корень

При $a = 0$ корней нет

3. При каких значениях параметра a среди корней уравнения

$2ax - 4x - a^2 + 4a - 4 = 0$ есть корни больше 1?

Решение

$(2a - 4)x = (a - 2)^2$ К.З. $a = 2$

При $a = 2$ $0x = 0$ множество решений, в том числе и больше

1 При $a \neq 2$ $x = \frac{a-2}{2}$. По условию $x > 1$, значит $\frac{a-2}{2} > 1, a > 4$

Ответ: при $a = 2; a \in (4; +\infty)$

Задачи для самостоятельного решения

Блок 1. Простейшие уравнения и неравенства

№	задание	Ответ
1.	$x - a = 0$	при $a \in \mathbb{R}, x = a$.
2.	$5x = a$	при $a \in \mathbb{R}, x = \frac{a}{5}$
3.	$ax = 0$	при $a = 0, x \in \mathbb{R}$; при $a \neq 0, x = 0$.
4.	$(a - 1)x = 6$	при $a = 1$ корней нет, при $a \neq 1, x = \frac{6}{a-1}$
5.	$2ax = 1 - x$	при $a = -0,5$ корней нет, при $a \neq -0,5, x = \frac{1}{2a+1}$
6.	$3 - ax = x$	при $a = -1$ корней нет, при $a \neq -1, x = \frac{3}{a+1}$
7.	$xa^2 = a + x$	при $a = \pm 1$ корней нет, при $a \neq \pm 1, x = \frac{a}{a^2-1}$
8.	$4a - a^2x = 2ax$	при $a = 0, x \in \mathbb{R}$, при $a = -2$ корней нет, при других a $x = \frac{4}{a+2}$
9.	$(a^2 - 4)x = a^2 + a - 6$	при $a = 2$ $x \in \mathbb{R}$, при $a = -2$ к.н., при других a

		$x = \frac{a+3}{a+2}$
10.	$(a^2 - 9)x = 9a^2 - 10a - 51$	при $a = 3$ $x \in \mathbb{R}$, при $a = -3$ к.н., при других a $x = \frac{9a+17}{a+3}$
11.	$(a^2 - 5a + 6)x = a^4 - 16$	при $a = 2$, $x \in \mathbb{R}$, при $a \neq 2$ $x = \frac{(a^2+4)(a+2)}{a-3}$, при $a = 3$ к.н.
12.	$ax < 5$	при $a = 0$ $x \in \mathbb{R}$, при $a > 0$ $x < \frac{5}{a}$, при $a < 0$ $x > \frac{5}{a}$
13.	$(a - 1)x > 6$	при $a = 1$ к.н. при $a > 1$ $x > \frac{6}{a-1}$, при $a < 1$ $x < \frac{6}{a-1}$
14.	$2a(a - 2)x < a - 2$	при $a = 2$; 0 к.н., при $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ $x < \frac{1}{2a}$, при др. a $x > \frac{1}{2a}$.
15.	$(a^2 - 9)x > a + 3$	при $a = \pm 3$ к.н., при $ a > 3$ $x > \frac{1}{a-3}$, при др. a $x < \frac{1}{a-3}$.
16.	$2ax \leq 1 - x$	при $a = -0,5$ $x \in \mathbb{R}$, при $a > -0,5$; $x \leq \frac{1}{2a+1}$, при $a < -0,5$ $x \geq \frac{1}{2a+1}$

Уравнения вида $P(X)/G(X) = 0$

К.З. находятся при обращении старшего коэффициента и знаменателя в 0

1. Решить уравнение

А). $\frac{x^2 - 9}{x - a} = 0$

Решение

К.З. $x \neq a$

$x^2 - 9 = 0$, $x = 3$, $x = -3$

Ответ: При $a = 3$ $x = -3$. При $a = -3$ $x = 3$ При $a \neq 3$, $a \neq -3$, $x = 3$, $x = -3$.

Б). $\frac{ax - 5 - x}{a^2 - 4} = 0$. О.Д.З. $x \neq 2$, $x \neq -2$

Решение

$(a - 1)x - 5 = 0$. К.З. $a =$

1 При $a = 1$ $0x = 5$, корней нет

При $a \neq 1$, $x = \frac{5}{a-1}$; $\frac{5}{a-1} \neq 2$, $\frac{5}{a-1} \neq -2$
 $a \neq 3,5$ $a \neq -1,5$

Ответ: при $a = 1$; $a = 3,5$; $a = -1,5$. корней нет

при $a \neq 1$; $a \neq 3,5$; $a \neq -1,5$. один корень $x = \frac{5}{a-1}$

В). $\frac{a}{2a-x} = 3$

Решение

К.З. $a = 0, x \neq 2a$

Преобразуем уравнение $a = 6a - 3x, x = \frac{5a}{3}$

При $a = 0$ $0 = 3$ корней нет

При $a \neq 0$ $x = \frac{5a}{3}, \frac{5a}{3} \neq 2a, a \neq 0$

Ответ: при $a = 0$ корней нет. При $a \neq 0$ один корень $x = \frac{5a}{3}$

Г). $\frac{x^2+a}{x-1} - x - 1 = a.$ О.Д.З. $x \neq 1$

Решение

Преобразуем уравнение к виду $ax = 2a + 1.$ К.З. $a = 0$

При $a = 0$ $0 = 1$ корней нет

При $a \neq 0$ $x = \frac{2a+1}{a}.$ Учтем О.Д.З. $\frac{2a+1}{a} \neq 1, a \neq -1$

1 Ответ: при $a = 0, a = -1$ решений нет

При $a \neq 0, a \neq -1$ один корень $x = \frac{2a+1}{a}.$

Д). при каких значениях a сократима дробь: $\frac{x^2+x-12}{x+a}$

Решение

$\frac{(x+4)(x-3)}{x+a}$

Ответ: При $a = -4; 3.$ дробь будет сократима

Задачи для самостоятельного решения
Блок 2. Дробно-рациональные уравнения.

№	задание	Ответ
1.	$\frac{x-a}{x-1} = 0$	при $a = 1$ к.н., при $a \neq 1, x = a.$
2.	$\frac{x}{x+a} = 0$	при $a = 0$ к.н., при $a \neq 0 x = 0.$
3.	$\frac{x}{x-a^2} = 0$	при $a = 0$ к.н., при $a \neq 0 x = 0.$
4.	При каких a дробь сократима: $\frac{(x^2-a)}{x^2-9x+8}$	при $a = 1; 64$
5.	$\frac{x-a}{x^2-3x-4}$	при $a = -1; 4.$

Зачет № 1

Решить уравнение

- 1). $ax = 1$
1. 2). $(a - 2)x = a^2 - 4$
2. 3). $(a^2 - 4)x = (a + 2)(a - 3)$
3. 4). $ax - 2x + a = 0$
4. Сколько корней имеет уравнение $(a^2 - 5a + 6)x = a^4 - 16$ при указанных значениях параметра a : $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = -$
5. 1 Найдите значения a , при каждом из которых уравнение $a(3x - a) = 6x - 4$ имеет положительный корень
6. При каких значениях a среди корней уравнения $x - ax + a^2 - 1 = 0$ есть корни больше 1?
7. При каких значениях параметра корни уравнения $\frac{(ax + a)}{x + a} = 2$ будут не меньше -1

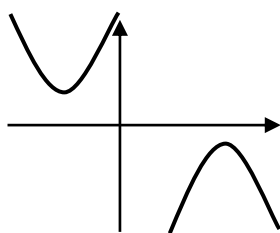
Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c выражения, зависящие только от параметров, и $a \neq 0$ называется квадратным уравнением относительно x

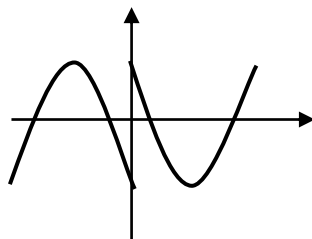
К.З. находятся при обращении в 0 старшего коэффициента и дискриминанта

10 правил расположения корней квадратного трехчлена

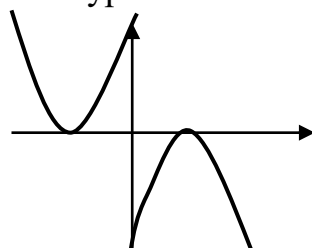
Правило 1. Квадратное уравнение не имеет корней, если $D < 0$



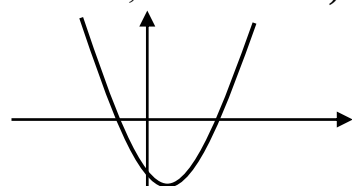
Правило 2. Квадратное уравнение имеет два различных корня, если $D > 0$



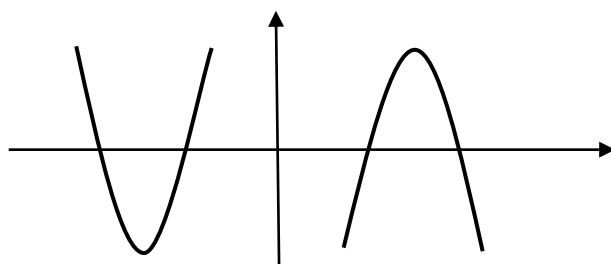
Правило 3. Квадратное уравнение имеет два кратных корня, если $D = 0$



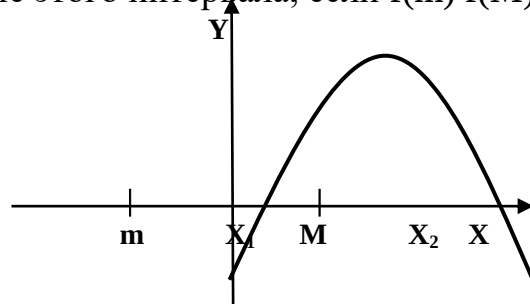
Правило 4. Квадратное уравнение имеет два корня $x_1 < M$ и $x_2 > M$, если $af(M) < 0$. (корни разных знаков, если $M = 0$.)



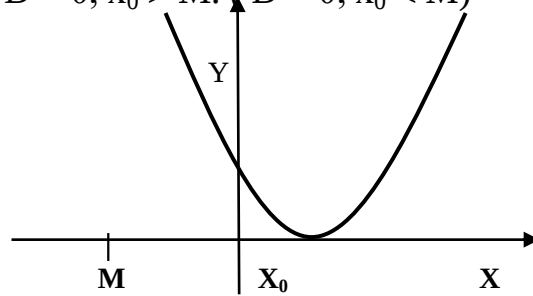
Правило 5. Квадратное уравнение имеет два разных корня $x_1, x_2 \geq (\leq) M$, если $D > 0$, $af(M) \geq 0$, $x_0 > (<) M$. (оба положительные или оба отрицательные, если $M = 0$)



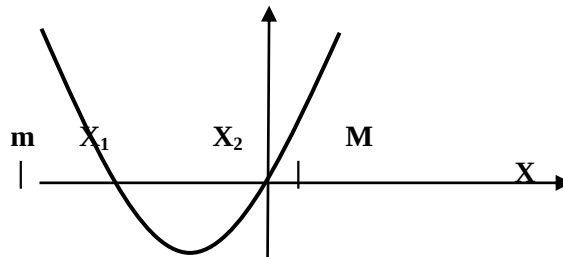
Правило 6. Квадратное уравнение имеет один корень внутри интервала $(m; M)$, а другой вне этого интервала, если $f(m)f(M) < 0$



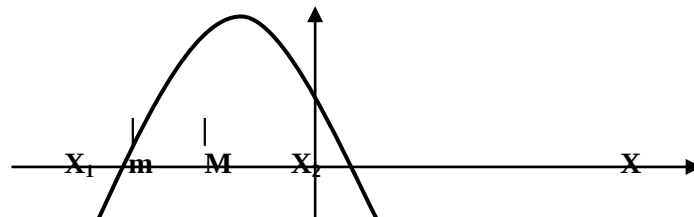
Правило 7. Квадратное уравнение имеет единственное решение $x_1 = x_2 > M$, ($x_1 = x_2 < M$), если $D = 0$, $x_0 > M$. ($D = 0$, $x_0 < M$)



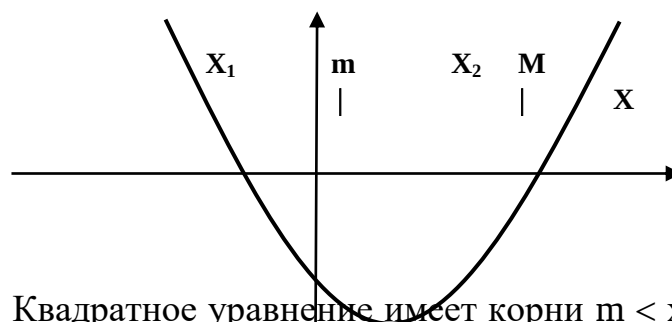
Правило 8. Квадратное уравнение имеет разные корни внутри интервала $(m; M)$ или промежутка $[m; M]$, если $D > 0$, $af(m) > 0$, $af(M) > 0$, $m < x_0 < M$, или $D > 0$, $af(m) \geq 0$, $af(M) \geq 0$, $m < x_0 < M$.



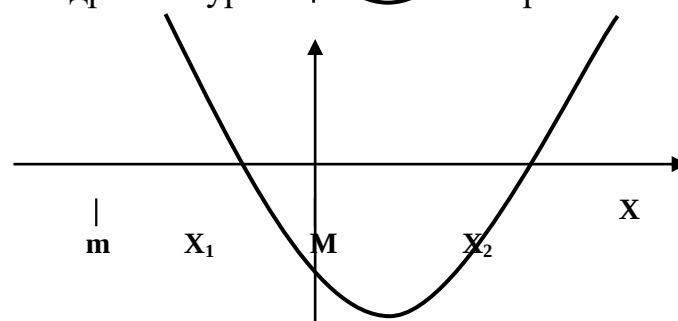
Правило 9. Квадратное уравнение имеет корни вне интервала или промежутка, если $af(m) < 0$, $af(M) < 0$, или $af(m) \leq 0$, $af(M) \leq 0$



Правило 10а. Квадратное уравнение имеет корни $x_1 < m < x_2 < M$, если $af(m) < 0$, $af(M) > 0$



Правило 10б. Квадратное уравнение имеет корни $m < x_1 < M < x_2$, если $af(m) > 0$, $af(M) < 0$



Примеры решения задач

Пример 1. При каких значениях a уравнение $x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 3 = 0$

- 1). Не имеет корней
- 2). Имеет корни разных знаков
- 3). Имеет положительные корни
- 4). Имеет два разных отрицательных корня

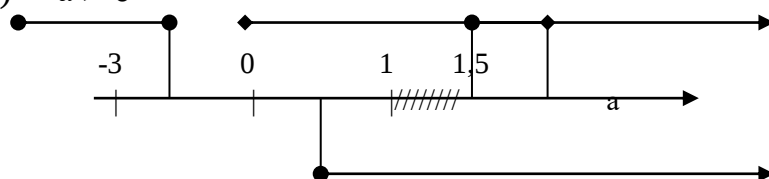
Решение

1). Корней нет, если $D < 0$

$$D = -4(2a - 3) < 0, \text{ при } a > 1,5$$

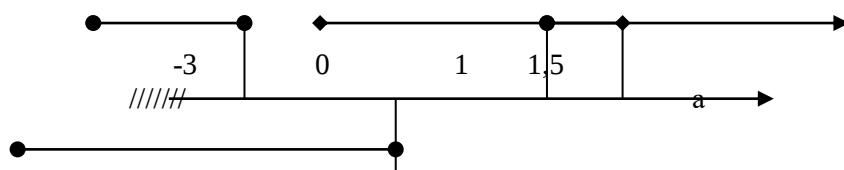
2). Корни разных знаков для $M = 0$ имеем $f(0) = a^2 + 2a - 3 < 0$, откуда $a \in (-3; 1)$

3). Положительные корни для $M = 0$, $D \geq 0$ при $a \leq 1,5$; $f(0) = a^2 + 2a - 3 > 0$ при $a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; $(x_0)' = a > 0$



4). два разных отрицательных корня для $M = 0$, $D > 0$ при $a < \frac{3}{2}$

$f(0) = a^2 + 2a - 3 > 0$ при $a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ $(x_0)' = a < 0$



Ответ: 1). $a > 1,5$. 2). $a \in (-3; 1)$. 3). $1 \leq a \leq 1,5$. 4). $a < -3$.

Пример 2. При каких значениях a уравнение $x^2 + 2(a - 1)x + a + 5 = 0$ имеет хотя бы один положительный корень?

▲ Решение

Если один корень положителен, то

1. Другой может быть отрицательным. Для $M = 0$ имеем $f(0) = a + 5 < 0$. $a < -5$

2. Другой корень может равняться 0. Для $M = 0$ имеем $\begin{cases} f(0) = a + 5 = 0 \\ (x_0)' = 1 - a > 0 \end{cases}$, откуда

$$a = -5$$

3. Другой корень может быть положительным. Для $M = 0$ имеем $\begin{cases} D = a^2 - 3a - 4 \geq 0, \\ f(0) = a + 5 > 0 \\ (x_0)' = 1 - a > 0, \text{ откуда } a \in (-5; -1] \end{cases}$

Ответ: объединяя все три случая, получаем $a \in (-\infty; -1]$

Пример 3. При каких значениях a уравнение $x^2 + 2(a - 1)x + a - 5 = 0$ имеет корни разных знаков, не превосходящих по модулю 5?

Решение

Решим систему

$$\begin{cases} f(-5) = 30 - 9a \geq 0 \\ f(0) = a - 5 < 0, \\ f(5) = 11a + 10 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq 10/3 \\ a < 5 \\ a \geq -10/11, \end{cases}$$

Ответ: откуда $a \in [-10/11; 10/3]$

Пример 4. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2ax + 9 = 0$ имеет один корень?

Решение

$$D = 0, D = 4a^2 - 36 = 0, a = \pm 3$$

Ответ: $a = \pm 3$

Пример 5. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - x + 3 = 0$ имеет один корень?

Решение

$$1. D = 0, D = 1 - 12a = 0, a = \frac{1}{12}$$

$a = 0$, линейное уравнение имеет один корень

Ответ: $a = \frac{1}{12}; 0$

Пример 6. Решить уравнение $(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + 4a + 3 = 0$

Решение

1. Уравнение имеет один корень, если $a - 1 = 0, a = 1. \quad 6x + 7 = 0, x = -\frac{7}{6}.$

Уравнение имеет один корень, если $a \neq 1, D = 0, D = 20a + 16 = 0. a = -\frac{4}{5}.$

Ответ: $a = 1; -\frac{4}{5}$

2. Уравнение не имеет корней, если $D < 0$, т.е. $a < -\frac{4}{5}$

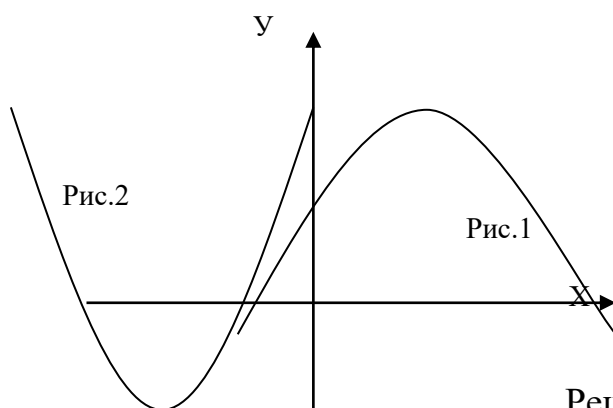
Ответ: $a < -\frac{4}{5}$

3. Уравнение имеет два корня, если $D > 0, a > -\frac{4}{5}, a \neq$

1 Ответ: $a > -4/5; a \neq$

1 График квадратного трехчлена

1. Что вы можете сказать о знаках параметров a, b, c , если график функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет вид, изображенный на рис.1? рис.2?



Решение

- 1). Ветви параболы направлены вниз, поэтому $a < 0$.
- 2). Т.к. парабола пересекает ось Y в точке $(0;c)$, то $c > 0$.
- 3). $x_0 = -\frac{b}{2a} > 0$ значит $\frac{b}{2a} < 0, b > 0$ рис.

1Решение

- 1). Ветви параболы направлены вверх, поэтому $a > 0$.
- 2). Т.к. парабола пересекает ось Y в точке $(0;c)$, то $c > 0$.
- 3). $x_0 = -\frac{b}{2a} > 0$, значит $\frac{b}{2a} < 0, b > 0$ Рис.2

2. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a-2)x^2 - 2ax + a+3 = 0$ положительны?

Решение

- 1). К.з. $a = 2 \quad x = \frac{5}{4} > 0$
- 2). $a \neq 2$, тогда $D \geq 0$, т.е. $6 - a \geq 0$, по теореме Виета $x_1 x_2 = \frac{a+3}{a-2} > 0$,
 $x_1 + x_2 = \frac{2a}{a-2} > 0$ т.к. оба корня положительны. В результате задача сводится к системе:

$$\begin{cases} \frac{a+3}{a-2} > 0, \\ \frac{2a}{a-2} > 0 \\ 6 - a \geq 0. \end{cases}$$

из которой находим $a < -3, 2 < a \leq 6$

Ответ: $a < -3, 2 \leq a \leq 6$

3. При каких значениях a корни уравнения $(a-2)x^2 - 2ax + a+3 = 0$ меньше 3?

Решение

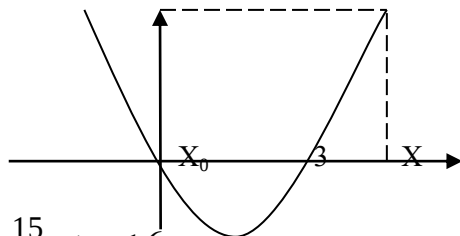
Разделим обе части уравнения на $a-2$, получим $x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{a+3}{a-2} = 0$

- 1). К.з. $a = 2 \quad x = \frac{5}{4} < 3$

2). $a \neq 2$, тогда $D \geq 0$, $f(3) > 0$. $x_0 < 3$. Получаем систему:

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ f(3) = \frac{4a-15}{a-2} > 0, \\ x_0 = \frac{a}{a-2}. \end{cases}$$

Из которой находим $a < 2$, $\frac{15}{4} < a \leq 6$.



Ответ: $a < 2$, $\frac{15}{4} < a \leq 6$

4. При каких значениях a корни уравнения $(a-2)x^2 - 2ax + a+3 = 0$ заключены в интервале $(1;3)$?

Решение

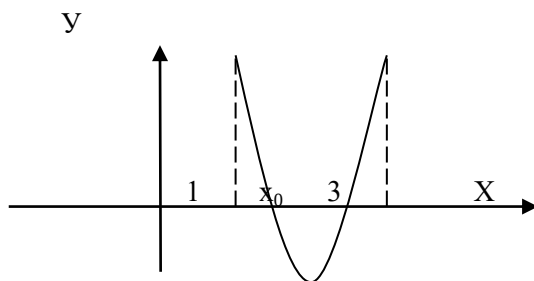
Разделим обе части уравнения на $a-2$, получим $x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{a+3}{a-2} = 0$

1). К.з. $a = 2$ $x = \frac{5}{4}$ этот корень лежит в данном интервале

2). $a \neq 2$, тогда $D \geq 0$, $f(1) > 0$, $f(3) > 0$, $1 < x_0 < 3$. получаем систему

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ \frac{4a-15}{a-2} > 0, \\ \frac{1}{a-2} > 0, \\ 1 < \frac{a}{a-2} < 3 \end{cases}$$

Из которой находим $a = 2$, $\frac{15}{4} < a \leq 6$



Ответ: $a = 2$, $\frac{15}{4} < a \leq 6$

Задачи для самостоятельного решения
Блок 3. Исследование квадратных уравнений.

№	задание	Ответ
---	---------	-------

1.	Решить: $(a-1)x^2 - x + a = 0$	при $a = 1$ $x = 1$; при $a \in (-\infty; -0,2) \cup (1,2; +\infty)$ к.н. при $a = -0,2; 1,2$ $x = \frac{1}{2(a-1)}$, при других a два корня.
2.	$ax^2 - 2x + a - 1 = 0$	при $a = 0$ $x = 0,5$; при $a \in (-\infty; -0,6) \cup (1,6; +\infty)$ к.н. при $a = -0,6; 1,6$ $x = \frac{1}{a}$; при других a два корня.
3.	$ax^2 - 2x + 4 = 0$	при $a = 0,25$; $x = 4$; $a = 0$ $x = 2$; при $a > 0,25$ к.н. при других a два корня.
4.	При каких a уравнение имеет один корень? $4x^2 - 4ax + 1 = 0$	$a = \pm 1$
5.	$9x^2 - 2x + a = 6 - ax$	$20 \pm 6\sqrt{5}$
6.	$ax^2 - 2x + 5 = 0$	$0; \frac{1}{20}$.

Блок 4. Применение теоремы Виета и ей обратной.

№	задание	Ответ
1.	$x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ найти все b при которых уравнение имеет:	
	Отрицательные корни	$(-6; -2]$
	Положительные корни	$[3; +\infty)$
	Корни разных знаков	$(-\infty; -6]$
2.	Исследуйте знаки корней $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$	При $a \in [1; 1,5)$ оба отрицательны; при $a = 1,5$ $x_1 = 0, x_2 < 0$; При $a \in (1,5; 2)$ разные знаки; при $a = 2$ $x = 0,25$; При $a \in (2; 6]$ оба положительны.
3.	Найти все значения параметра, при которых один корень вдвое больше другого: $x^2 + (2a-1)x + a^2 + 2 = 0$	$a = -4$
	Разность корней равна 1 $x^2 + ax + 12 = 0$	$a = \pm 7$
	Отношение корней равно 2 $x^2 + ax + a + 2 = 0$	$a = -1,5; 6$.
4.	при каких значениях параметра сумма квадратов корней уравнения наименьшая	$a = 1$

	$x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$	
5.	при каких значениях параметра оба корня уравнения лежат в промежутке $(-1; 1)$ $4x^2 - 2x + a = 0$	$(-2; 0,25]$
	Оба больше 1 $(a - 1)x^2 + 2ax + a - 2 = 0, a \neq 1$	$(\frac{2}{3}; \frac{3}{4})$
	3 разделяет корни $x^2 - 2(a + 1)x + 4 - a = 0$	$(\frac{10}{7}; +\infty)$
	Оба корня положительны $(a + 2)x^2 - 2ax + 3a = 0$	$[-3; -2)$

Зачет № 2

1. Исследуйте знаки корней: $(a - 3)x^2 - 6x + a + 5 = 0$

Ответ:.. при $a \in [-6; -5)$ оба отрицательны, при $a \in (-5; 3)$ разных знаков, при $a \in (3; 4)$ оба положительны, при $a = -5$ $x_1 = 0, x_2 < 0$, при $a = 3$ $x = \frac{4}{3}$

2. Найти все значения параметра, при которых разность корней уравнения равна 3

$(a - 2)x^2 - (a - 4)x - 2 = 0$ Ответ: 1,5; 3

3. Найти все значения параметра, при которых отношение корней равно 1,5

$ax^2 - (a + 3)x + 3 = 0$ Ответ: 2; 4,5

4. При каких значениях параметра сумма квадратов корней уравнения наибольшая

$x^2 + (a - 1)x + a^2 - 1,5 = 0$ Ответ: - 1

5. Нарисуйте различные случаи расположения параболы относительно осей координат и в каждом случае ответьте на вопросы о знаках $a, b, c, D, f(0)$

6. При каких значениях параметра оба корня уравнения лежат в промежутке $(1; 3)$

$x^2 - ax + 2 = 0$ Ответ: $[2\sqrt{2}; 3)$

7. При каких значениях параметра оба корня уравнения больше 3?

$x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ Ответ: $(\frac{11}{9}; +\infty)$

8. При каких значениях параметра 2 разделяет корни?

$ax^2 + x + 1 = 0$ Ответ: $(-\frac{3}{4}; 0)$

9. При каких значениях параметра оба корня уравнения положительны?

$(a - 2)x^2 - 2ax + 5a = 0$ Ответ: $[3; \frac{15}{4}]$

10. При каких значениях параметра уравнение имеет один корень?

$(2a - 5)x^2 - 2(a - 1)x + 3 = 0$ Ответ: 2,5; 4

11. Решить для всех значений параметра уравнение: $ax^2 - x + 3 = 0$

Ответ: при $a = 0$ $x = 3$; при $a = \frac{1}{12}$ $x = 6$; при $a > \frac{1}{12}$ к.н., при других a два корня

12. При каких значениях параметра оба корня уравнения отрицательны?

$$x^2 + (a + 1)x + a + 4 = 0$$

Ответ: $(5; +\infty)$

Простейшие иррациональные уравнения

Решение этих уравнений сводится к постепенному переходу от иррациональных к рациональным путем возведения в степень обеих частей уравнения. Решение должно сопровождаться тщательной проверкой

Прием решения

По определению корня подставить данное значение x в уравнение

Найти ОДЗ полученного уравнения

Решить полученное уравнение с одним неизвестным (параметром)

Сделать проверку

Записать ответ

1. Решить уравнение $(x - 1) \sqrt{x - a} = 0$

ОДЗ: $x - a \geq 0$

Решение

1. Если $x_1 = 1$, то $x_2 = a$

2. Если $a = 1$, то $x_1 = x_2 =$

Если $a < 1$, то $x_1 = 1$ удовлетворяет условию $x \geq a$, т.е. является корнем

Если $a > 1$, то $x_1 = 1$ не удовлетворяет условию $x \geq a$, т.е. является посторонним корнем

Ответ: 1). $a < 1$, то $x_1 = 1$, $x_2 = a$. 2). $a \geq 1$, то $x = a$

2. При каких значениях параметра уравнение имеет один корень?

$(\sqrt{x} - 2)(x - a) = 0$ О.Д.З.: $x \geq 0$

Решение

1. Если $x_1 = 4$, то $x_2 = a$

2. Если $a = 4$, то корень будет единственный

3. Если $a < 0$, то корень будет единственный

Ответ: уравнение имеет один корень, при $a < 0$ или $a = 4$

3. Решить уравнение: $\sqrt{2x + 1} = 4x + a$

Решение

ОДЗ: $x \geq -\frac{1}{2}$. Воспользуемся методом замены переменной

Заменим корень на y , и преобразуем уравнение $y = 2(y^2 - 1) + a$ $y \geq 0$

$2y^2 - y + (a - 2) = 0$. $D = 17 - 8a$. $a = 2,125$

1. При $a > 2,125$ к.н

2. При $a = 2,125$ $y = 0,25$ значит $x = -\frac{15}{32}$

3. При $a < 2,125$ два корня $y = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{4}$, причем $\frac{1 - \sqrt{D}}{4} \geq 0$, решая неравенство, получим, что $a \in [2; 2,125]$

4. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 - 1} = a - x$

Решение

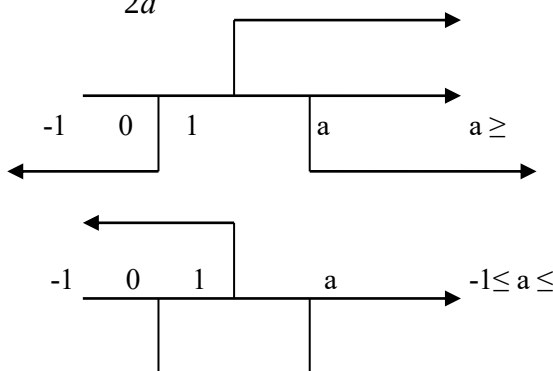
ОДЗ: $a - x \geq 0$; $x \leq a$

Возведем обе части в квадрат: $x^2 - 1 = (a - x)^2$, $2ax = a^2 + 1$, $x = \frac{a^2 + 1}{2a}$, где $a \neq 0$

Найдем значения, при которых $x \leq a$. $\frac{a^2 + 1}{2a} \leq a$

$$1. \quad \begin{cases} a > 0, \\ a^2 + 1 \leq 2a^2. \end{cases} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} a < 0, \\ a^2 + 1 \geq 2a^2. \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ a^2 \leq 1 \end{cases}$$

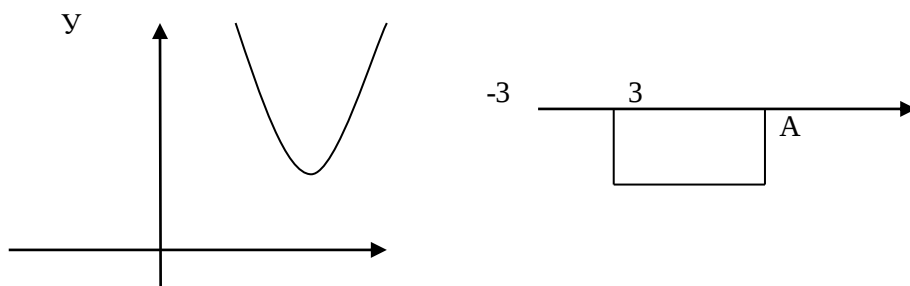


Ответ: при $a \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$, $x = \frac{a^2 + 1}{2a}$

Рациональные неравенства

1. При каких значениях a неравенство $x^2 - 2ax + 9 > 0$ выполняется для всех x ?

Решение:

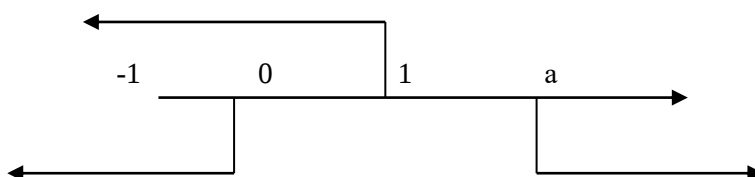
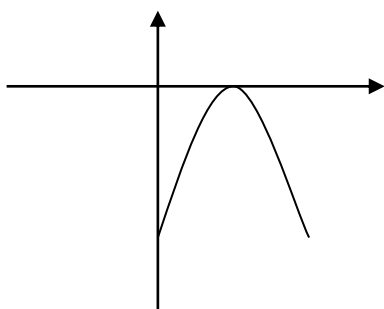


Т.к. $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, значит корней нет, $D < 0$. $4a^2 - 36 < 0$. $-3 < a < 3$

Ответ: $-3 < a < 3$.

2. При каких значениях параметра неравенство $ax^2 + 2(a + 1)x + 2a + 2 \leq 0$ выполняется для всех x ?

Решение



Т.к. $y \leq 0$, то ветви параболы направлены вниз, значит $a < 0$, $D \leq 0$.

$$4(a+1)^2 - 4a(2a+2) \leq 0, 4a^2 + 8a + 4 - 8a^2 - 8a \leq 0, -4a^2 + 4 \leq 0, a \leq -1, a \geq 1$$

Ответ: $a \leq -1$ или $a \geq 1$

13. При каких значениях параметра неравенство $(x^3 - 8)(a - x) \geq 0$ имеет один корень?

Решение

Преобразуем неравенство к виду $(x-2)(x^2+2x+4)(x-a) \leq 0$

Т.к. $x^2+2x+4 > 0$ при всех x ($D < 0$), то получим неравенство $(x-2)(x-a) \leq 0$

1. Если $a = 2$, то $(x-2)^2 \neq 0$, откуда $x = 2$

2. Если $a \neq 2$, то при $a < 2$ имеем $a \leq x \leq 2$

при $a > 2$ имеем $2 \leq x \leq a$.

Ответ: один корень при $a = 2$

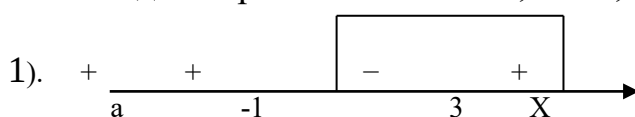
4. При каких значениях параметра решением неравенства $(x-a)^2(x-3)(x+1) \leq 0$

служит сплошной промежуток?

Решение

Применим метод интервалов. К.т. $x = a$, $x = 3$, $x = -1$

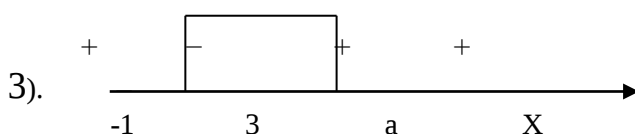
1



при $a < -1$, $-1 \leq x \leq 3$, $x = a$



при $-1 < a < 3$, $-1 \leq x \leq 3$



при $a > 3$, $-1 \leq x \leq 3$, $x = a$



при $a = -1$ имеем неравенство $(x+1)^3(x-3) \leq 0$, откуда $-1 \leq x \leq 3$



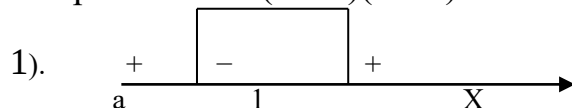
при $a = 3$ имеем неравенство $(x+1)^3(x-3) \leq 0$, откуда $-1 \leq x \leq 3$

Ответ: $-1 \leq a \leq 3$

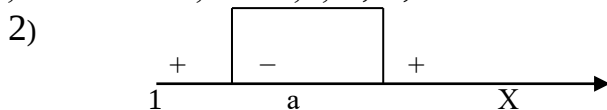
5. При каких значениях параметра во множестве решений неравенства $(1-x)(x-a) \geq 0$ содержится 5 целых чисел?

Решение

Преобразуем неравенство $(x-1)(x-a) \leq 0$. К.т. $x=1$, $x=a$



при $a < 1$, $a \leq x \leq 1$, т.е. 1, 0, -1, -2, -3. $-4 < a \leq -3$



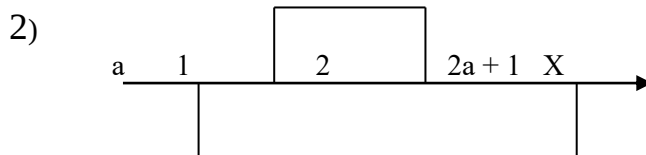
при $a < 1$, $1 \leq x \leq a$, т.е. 1, 2, 3, 4, 5. $5 \leq a < 6$

Ответ: $-4 < a \leq -3$; $5 \leq a < 6$

6. При каких значениях параметра неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a} < 0$ выполняется для всех x из отрезка $[1; 2]$

Решение

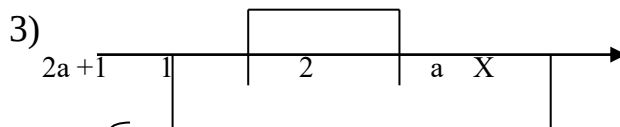
1. Если $a = 2a + 1$, то $\frac{x-a}{x-a} < 1$ к.н



При $a < 2a + 1$, $\begin{cases} a < 1, \\ 2 \leq 2a + 1 \end{cases}$

$1\frac{1}{2} < a <$

1



При $a < 2a + 1$, $\begin{cases} a > 2, \end{cases}$

$1 > 2a + 1$. корней нет

Ответ: $\frac{1}{2} < a <$

13 Задачи для самостоятельного решения

Блок 5. Исследование квадратных неравенств.

№	Задание	Ответ
1.	Решить для всех значений a $x^2 - 2ax + 1 > 0$	при $ a > 1$ $x \in \mathbb{R}$; при $a = 1$ $x = 1$; при $a = -1$ $x = -1$ при др. a $x \in (-\infty; a - \sqrt{a^2 - 1}) \cup (a + \sqrt{a^2 - 1}; +\infty)$;
2.	$x^2 - 4ax + 9 \leq 0$	при $ a > 1,5$ к.н. при $a = \pm 1,5$ $x = \pm 3$; при др. a $x \in [2a - \sqrt{4a^2 - 9}; 2a + \sqrt{4a^2 - 9}]$
3.	$ax^2 + (a+1)x + 1 > 0$	при $a = 0$ $x > -1$; при $a = 1$ $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; при $a > 1$ $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{a}; +\infty)$; при $a < 0$ $x \in (-1; -\frac{1}{a})$

		при $a \in (0; 1)$ $x \in (-\infty; -\frac{1}{a}) \cup (-1; +\infty)$;
4.	При каких a неравенство выполняется для всех x ? $x^2 - (a + 2)x + 8a + 1 > 0$	$(0; 28)$.
5.	$\frac{1}{24}x^2 + ax - a + 1 > 0$	$(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$.
6.	При каких значениях a нер-во не имеет решений? $ax^2 + (2a + 3)x + a - 1 \geq 0$	$(-\infty; -\frac{9}{16})$.
7.	$(4 - a^2)x^2 + 2(a + 2)x - 1 > 0$	$(-\infty; -2]$.

Зачет №3

1. При каких значениях параметра a неравенство $(x - a)(x - 2) \leq 0$ имеет одно решение?

Ответ: $a = 2$

2. Решить для всех значений параметра $ax^2 - (a + 2)x + 2 \leq 0$

Ответ: 1). при $a = 0$ $x \geq 1$; при $a = 2$ $x = 1$;

2). при $a > 2$ $x \in [\frac{2}{a}; 1]$

3). при $a \in (0; 2)$ $x \in [1; \frac{2}{a}]$

4). при $a < 0$ $x \in [-\infty; \frac{2}{a}] \cup (1; +\infty)$;

3. При каких a неравенство $ax^2 + 2(a + 1)x + 2a + 2 > 0$ выполняется для всех x ?

Ответ: $0 < a <$

1

4. Решить для всех значений параметра

$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) \leq 0$

Ответ: 1). при $a < -\frac{4}{5}$ множество решений

2). при $a = -\frac{4}{5}$ множество решений

3). при $-\frac{4}{5} < a < 1$ два корня

4) при $a = 1$ $x \leq -\frac{7}{6}$

5). при $a > 1$ $[x_2; x_1]$

5. При каких a неравенство $ax^2 + 4ax + a + 3 < 0$ выполняется для всех x ?

Ответ: $(-\infty; -4)$

6. При каких a неравенство $ax^2 - 4ax - 3 \leq 0$ выполняется для всех x ?
 Ответ: $[-0.75; 0]$

7. При каких значениях параметра a неравенство не имеет решений?

А) $x^2 + 2ax + 1 < 0$

Ответ: $[-1; 1]$

Б) $ax^2 + 4ax + 5 \leq 0$

Ответ: $[0; 1,25)$

Решение задач с параметром, предлагаемых на ЕГЭ

1. При каких значениях параметра уравнение $\log_3^2 x - (2a + 3)\log_3 x + a^2 + 3a = 0$ имеет два различных корня, равноудаленных от точки $x = 42$

Решение

Пусть $\log_3 x = t$, тогда уравнение примет вид $t^2 - (2a + 3)t + a^2 + 3a = 0$,
 его корни $t = a + 3$; a

$\log_3 x = a + 3$ или $\log_3 x = a$

$x_1 = 3^{a+3}$ $x_2 = 3^a$.

Точка $x = 42$ является серединой отрезка. По формуле координаты середины отрезка: $\frac{3^{a+3} + 3^a}{2} = 42$, откуда $a =$

1) Ответ: $a =$

1

2. При каких значениях параметра уравнение $(2a + 3)x^2 + (a + 3)x + 1 = 0$

а) имеет хотя бы один корень

б) число различных корней равных числу различных корней уравнения:

$$\frac{2x+1}{21-a} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$$

Решение

а) $2a + 3 = 0$, $a = -1,5$. один корень

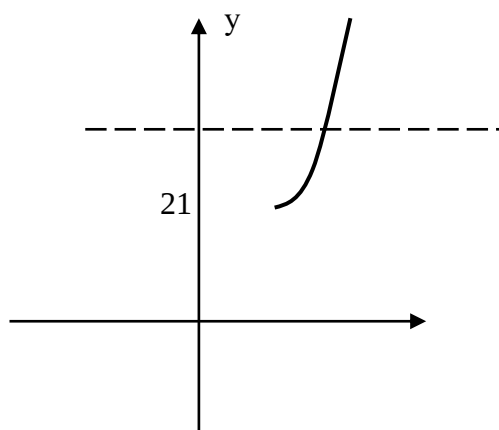
$D = 0$, если $2a + 3 \neq 0$, $a = -1, 3$

б) $(2x + 1)(\sqrt{x-3} + 3) = 21 - a$

Построим графики функций 1). $y = (2x + 1)(\sqrt{x-3} + 3)$. и 2). $y = 21 - a$

1. ОДЗ $x \geq 3$, $y' > 0$, функция возрастает, $y(3) = 21$, $y = 21 - a$

2. прямая, $21 - a \geq 21$, значит $a \leq 0$



Объединим решения а) и б)



Ответ: $a = -1,5; -$

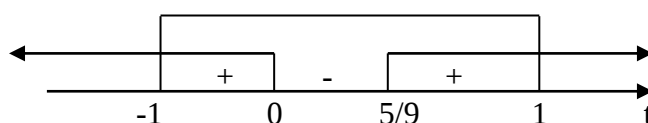
1

3. При каких значениях параметра уравнение $6\sin^3 x = a - 5\cos 2x$ не имеет корней?

Решение

Пусть $\sin x = t$, где $-1 \leq t \leq 1$, тогда уравнение примет вид $6t^3 - 10t^2 + 5 = 0$.

Рассмотрим функцию $y = 6t^3 - 10t^2 + 5$, $y' = 18t^2 - 10t = 0$. $t = 0; \frac{5}{9}$



$y(-1) = -11$, $y(1) = 1$, $y(0) = 5$

Ответ: $(-\infty; -11) \cup (5; +\infty)$

4. При каких целых значениях параметра уравнение $x^2(x - 4) + a = 0$ имеет три корня?

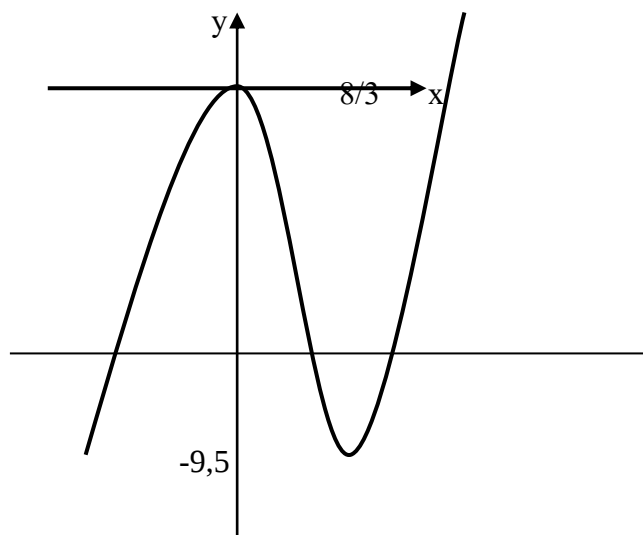
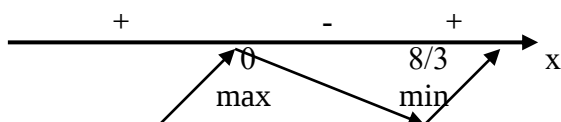
Решение

Построим графики функций $y = x^2(x - 4)$ и $y = -a$.

1). $y = 3x^3 - 4x^2$, $y' = 3x^2 - 8x = 0$, $x = 0; \frac{8}{3}$

При $x = 0$, $y = 0$. при $y = 0$, $x = 0; 4$

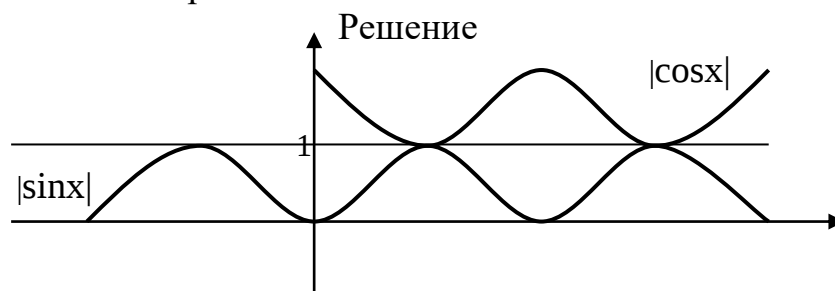
При $x = \frac{8}{3}$, $y = -9,5$



При $-9,5 < -a < 0$, $0 < a < 9,5$

Ответ: 1,2,3,4,5,6,7,8,9

5. При каких значениях параметра уравнение $|\sin x| = |\cos x| + a$ имеет целые положительные корни?



Ответ: $a =$

1

2.3. Апробация результатов исследования

Урок по элективному курсу по теме: «Решение линейных уравнений с параметрами»

Цели урока: повторить и обобщить знания учащихся методов решения уравнений с параметрами; закрепить умения применять знания при решении конкретных заданий; развивать логическое мышление; воспитывать внимание и аккуратность.

Задачи:

1. Образовательные: преодоление барьера перед необходимостью решения нестандартных задач; о формирование базы способов алгоритмизации решения линейных уравнений и неравенств с параметром; о отбор методов решения уравнений с параметрами на основе обобщения ранее изученного материала; о оценка своих достижений на данном этапе и формирование планов по дальнейшему самообразованию.

Развивающие: развитие логического мышления, памяти, наблюдательности, умения правильно обобщать данные и делать выводы; содействие развитию умений применять полученные знания в нестандартных условиях; развитие умений устанавливать причинно-следственные связи; развитие критического мышления.

Воспитательные: воспитание положительного интереса к изучаемому предмету; обеспечение условий для овладения учащимися алгоритмом решения проблемных и исследовательских задач; укрепление коллективно-творческой среды; обеспечение условий для развития высказывать свою точку зрения.

Ход урока: I. Организационный момент.

Учитель: - Здравствуйте, ребята. Приятно вас всех видеть, мы начинаем наш урок.

Актуализация опорных знаний:

1) Повторение.

Учитель: - Итак, повторим.

Что называется линейным уравнением с параметрами?

Какие случаи вы знаете при решении таких уравнений?

Приведите примеры линейных уравнений с параметрами.

Устная работа.

Задание: Приведите данное уравнение к линейному виду (уравнения записаны на доске):

а) $3ax - 1 = 2x$;

б) $2 + 5x = 5ax$;

в) $2x - 4 = ax + 1$.

Работа по карточкам.

1) Решить линейное уравнение: $ax^2 - a = 9x + 3$	2) При каком значении a уравнение $3ax + 1 = 5x$ имеет корень, равный 2?	3) При каком значении a прямая $y = 3ax + 1$ проходит через точку $A(1; -3)$?
--	--	--

Решение упражнений.

Задание 1. Решите уравнение с параметром a :

$$3(ax + 1) + 1 = 2(a - x) + 1.$$

Задание выполняется на доске и в тетрадях.

Задание 2. При каком значении a прямая $y = 7ax + 9$ проходит через точку $A(-3; 2)$?

Задание выполняется самостоятельно у доски одним учеником.

Остальные работают в тетрадях, затем сверяются с доской.

Задание 3. При каком значении a уравнение $3(ax - a) = x - 1$ имеет бесконечно решений?

Данное задание предлагается решить самостоятельно учащимся в тетрадях, затем проверить ответы.

Задание 4. Найдите натуральные значения a , при которых является натуральным числом корень уравнения:

а) $a(3x - 2) + 2(3 + a) = 18$;

б) $3x(a - 1) - 2a(x + 4) = 4(1 - 2a)$.

Задание выполняется самостоятельно у доски двумя учениками.

Остальные работают в тетрадях, затем сверяются с доской.

IV. Выполнение теста.

Учащимся выдаются индивидуальные листы с заданиями:

Является ли уравнение $6(ax + 1) + a = 3(a - x) + 7$ линейным?

а) да; б) нет; в) можно привести к линейному.

Уравнение $(2ax + 1)a = 5a - 1$ приведено к виду линейного уравнения?

а) нет; б) да.

При каком значении параметра a прямая $y = ax - 3$ проходит через точку

$A(-2; 9)$?

а) $a = \frac{1}{6}$; б) $a = \frac{1}{2}$; в) $a = -6$; г) $a = 6$.

При каком a уравнение $2ax + 1 = x$ имеет корень, равный -1 ?

а) $a = -1$; б) $a = 0$; в) $a = 1$; г) $a = \frac{1}{2}$.

Ответы к тесту: в; а; в; в.

V. Подведение итогов урока.

Учитель: - Сегодня на уроке мы повторили и закрепили знания, полученные на прошлых уроках, отработали необходимые умения при выполнении различных заданий. Урок окончен.

Проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод: в основном все задания, связанные с решением уравнений и неравенств с параметрами, носят повышенный уровень сложности; ни в одном из учебников не дается четкого определения параметра.

Урок по элективному курсу на тему: «Решение тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами»

Цели урока: формирование у обучающихся способностей к обобщению, структурированию и систематизации материала по теме урока;

систематизировать учебный материал и выявить логику развития содержательной линии предмета, укрепить связи между основным и дополнительным образованием на базе факультатива курса по выбору, подготовить учащихся к решению задач высокого уровня сложности на ЕГЭ;

пробудить интерес к самостоятельному решению задач, побудить учащихся к активному поиску рациональных путей решения задач, развить умение выразить собственную позицию в дискуссии, развить умение формулировать и аргументировать предложения по продвижению к достижению результата.

Задачи:

Образовательные: преодоление барьера перед необходимостью решения нестандартных задач; формирование базы способов алгоритмизации решения тригонометрических уравнений и неравенств с параметром; отбор методов решения задач на основе обобщения ранее изученного материала; оценка своих достижений на данном этапе и формирование планов по дальнейшему самообразованию.

Развивающие: развитие логического мышления, памяти, наблюдательности, умения правильно обобщать данные и делать выводы; содействие развитию умений применять полученные знания в нестандартных

условиях; развитие умения устанавливать причинно-следственные связи; о развитие критического мышления.

Воспитательные: воспитание положительного интереса к изучаемому предмету; о обеспечение условий для овладения учащимися алгоритмом решения проблемных и исследовательских задач; укрепление коллективно-творческой среды; обеспечение условий для развития высказывать свою точку зрения.

Ход урока

I. Организационный момент.

Учитель: - Здравствуйте, ребята! Я рада видеть вас на сегодняшнем занятии. Как вы уже знаете, сегодня мы поговорим о тригонометрических уравнениях и неравенствах с параметром.

Актуализация знаний.

Повторение:

Что называется тригонометрическим уравнением?

Приведите частные случаи решения тригонометрических уравнений.

Проверка готовности к уроку (учащиеся рассаживаются по группам, в составе которых они готовились к представлению результатов домашней работы):

Для того чтобы оценить исходные условия, учитель раздает группам таблицы и предлагает разнести номера в соответствии с предложенной классификацией.

Предлагаемые задания	Задание для классификации
1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos^3 x - (4a + 1)\cos^2 x +$	1) По уровню сложности
$(3a^2 + 4a)\cos x - 3a^2 = 0$ имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ четное число корней.	

2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения $(a + 1)\cos 4x - 26a\cos 2x + 14a + 1 = 0$ и $4\sin^3 x + 6\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$ равносильны.	2) По используемым приемам преобразования тригонометрических выражений
3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \log_3 a$ имеет решение.	3) Используя при своем решении информацию об области определения тригонометрических выражений
4. Решите уравнение $x^2 - 2x \cos a + 1 = 0$ при всех значения параметра a . $9 \cos 4x -$	4) Используя при своем решении информацию о множестве значений тригонометрических функций
5. Решите уравнение $12a \cos 2x + 2a^2 + 9 = 0$ при всех значения параметра a .	5) Сводящиеся к исследованию множества решений квадратного уравнения или неравенства
6. Решите неравенство $\sin^4 x + \cos^4 x \geq a$ при всех значения параметра a .	6) Требующие умения выполнять разложение выражений на множители
7. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 2x - (a^2 - 3)\cos 2x + a^2 - 4 = 0$ имеет ровно 2 корня на промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$.	7) Предполагающие аналитический способ решения
8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\sqrt{a+1} - 2\cos 3x + 1}{\sin^2 3x + a + 2\sqrt{a+1} + 2}$ содержит отрезок $[2; 3]$.	8) Предполагающие использование геометрической интерпретации с использованием плоскости «переменная - значение»
9. При каких значениях параметра t уравнение $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = t$ имеет решение?	

10. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2(k+1)\cos t - k}{\sin t + \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.	
---	--

Примечание: одно и то же задание может попасть в несколько классификационных групп.

Представление заданий учащимися из групп.

Учитель предлагает учащимся:

выбрать те задачи, которые с их точки зрения учащиеся могут решить;

выбрать те задачи, которые учащимся понравилось бы решать; 3)

подобрать аргументы для обоснования выбора.

Учениками выбираются 5 заданий, решение которых они хотели бы разобрать. Далее жребием выбирается номер задания, алгоритм решения которого будет представлять каждая группа.

Комментарии и краткое решение предложенных задач.

1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos^3 x - (4a + 1)\cos^2 x + (3a^2 + 4a)\cos x - 3a^2 = 0$ имеет на отрезке

$\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ четное число корней.

Решение: Сгруппируем слагаемые левой части уравнения:

$$\cos^2 x (\cos x - 1) - 4a \cos x \cos x - 1 + 3a^2 \cos x - 1 = 0,$$

$$(\cos x - 1)(\cos^2 x - 4a \cos x + 3a^2) = 0,$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 & (1), \\ \cos x = a & (2), \\ \cos x = 3a & (3). \end{cases}$$

Первое уравнение на указанном промежутке имеет единственный корень

$x = 0$. Интересующий нас случай может реализоваться, если

а) (2) имеет четное число корней, не совпадающих с (1), а (3) – нечетное;

б) (3) имеет четное число корней, не совпадающих с (1), а (2) – нечетное;

в) одно из уравнений (2) или (3) имеет на промежутке нечетное число корней, а другое вообще корней на данном промежутке не имеет.

Функция $\cos x$ на указанном промежутке единожды принимает значения 1 или $\left[0; \frac{1}{2}\right)$. Значения из полуинтервала $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$ принимаются дважды, другие значения приниматься не могут.

Существование единственного решения уравнений (2) или (3):

$$(2): 0 \leq a < \frac{1}{2}, a = 113a$$

$$(3): 0 \leq a < \frac{1}{6}, a = \frac{1}{3} \cdot 2(a+1)$$

Совпадение множеств решений (2) и (3) при $a = 0$.

1. При $a = 0$ (2) и (3) имеет единственное решение $\bar{2}$, которое не совпадает с решением (1).

Общее число решений исходного уравнения равно

2. При $0 < a < \frac{1}{6}$ уравнения (2) и (3) имеют по одному несовпадающему решению, число решений исходного уравнения равно

3. При $\frac{1}{6} \leq a < \frac{1}{3}$ второе уравнение имеет один корень, а третье имеет два корня на указанном промежутке. Общее число корней исходного уравнения равно

4. При $a = \frac{1}{3}$ общее число корней исходного уравнения равно 2, так как (3) имеет единственный корень $x = 0$. При $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ число корней (2) на указанном промежутке равно 1, общее число решения исходного уравнения равно 2.

При $\frac{1}{2} \leq a < 1$ число корней (2) на $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ равно 2, общее число корней исходного уравнения равно 3. При $a = 1$ исходное уравнение имеет

единственный корень на данном промежутке. Объединяя удовлетворяющие нас значения a , получаем ответ.

Ответ: $a \in \{0\} \cup \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$.

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения

$$(a + 1)\cos 4x - 26a\cos 2x + 14a + 1 = 0 \quad \text{и}$$

$$4\sin 3x + 6\sin 2x - 2\sin x - 3 = 0 \text{ равносильны.}$$

Решение: Решим второе уравнение.

$$(2\sin x + 3)(2\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

Преобразуем первое уравнение, используя формулы

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1:$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Пусть $\cos 2x = p$.

Тогда

$$(a + 1)(2p^2 - 1) - 13a(1 + p) + 14a + 1 = 0, p(2p(a + 1) - 13a) = 0 (*).$$

Очевидно, что $p = 0$ является решением

уравнения при любом значении a . Если (*) не имеет других корней p , кроме тех, что больше 1 или меньше -1 (это нее позволит найти x при возврате к прежней переменной) или равны 0, то исходная пара уравнений будет

равносильной парой. Уравнение $(2p(a + 1) - 13a) = 0$ имеет корень $p = 0$ при

$a = 0$. При $a = -1$ у него нет корней.

Найдем все значения параметра a , при которых имеет решение

совокупность $\begin{cases} p > 1, \\ p < -1. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{13a}{2(a+1)} > 1, \\ \frac{13a}{2(a+1)} < -1; \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \frac{2}{11}, \\ a < -1, \\ -1 < a < -\frac{2}{15} \end{array} \right].$$

Объединяя найденные значения a , получаем ответ.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{15}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{2}{11}; +\infty\right)$.

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = \log_3 a \text{ имеет решение.}$$

Решение: Преобразуем уравнение к виду $|\cos x| = \log_3 a$. Уравнение имеет решение при $0 \leq \log_3 a \leq 1$.

Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

Решите уравнение $x^2 - 2x \cos a + 1 = 0$ при всех значениях параметра a .

Решение: Уравнение квадратное относительно x .

$$D = \cos^2 a - 1$$

Уравнение имеет решение только при $\cos a = \pm 1$.

Ответ: при $a = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $x = 1$; при $a = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $x = -1$.

Решите уравнение $9\cos 4x - 12a\cos 2x + 2a^2 + 9 = 0$ при всех значениях параметра a .

Решение: Используя формулу приведения степени, преобразуем уравнение к виду: $(3\cos 2x - a)^2 = 0$, откуда с очевидностью следует ответ.

Ответ: $-3 \leq a \leq 3$.

Решите неравенство $\sin^4 x + \cos^4 x \geq a$ при всех значениях параметра a

Решение:

Первый способ: Применяем формулы понижения степени:

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 > a$$

$$\cos^2 2x > 2a - 1$$

Еще раз применяя формулы понижения степени, получаем:

$$\cos 4x > 4a - 3$$

При $4a - 3 < -1$ неравенство верно при всех $x \in R$, при $4a - 3 \geq 1$ решений у неравенства нет.

При $-1 \leq 4a - 3 < 1$ решением неравенства является объединение

$$\text{промежутков } \left(\frac{-\arccos(4a-3)+2\pi n}{4}; \frac{\arccos(4a-3)}{4} \right), n \in Z.$$

Ответ: при $a < \frac{1}{2}$ решением неравенства является любое действительное x ; при $\frac{1}{2} \leq a < 1$ решением неравенства является объединение промежутков

$$\left(\frac{-\arccos(4a-3)+2\pi n}{4}; \frac{\arccos(4a-3)}{4} \right), n \in Z; \text{ при } a \geq 1 \text{ решений у неравенства}$$

нет.

Второй способ: Можно преобразовать левую часть неравенства, используя основное тригонометрическое тождество:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$$

Получаем из исходного неравенства следующее:

$$\sin^2 2x < 1 - 2a$$

Ответ: при $\frac{1}{2} \leq a < 1$ решением неравенства является объединение

$$\text{промежутков } -\frac{\arcsin\sqrt{2-2a}+\pi n}{2} < x < \frac{\arcsin\sqrt{2-2a}+\pi n}{2}, n \in Z.$$

При каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 2x(a^2 - 3)\cos 2x +$

$$a^2 - 4 = 0 \text{ имеет ровно два корня на промежутке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Решение: Используя теорему Виета, получаем:

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 2x = a^2 - 4 \end{cases}$$

Первое уравнение на указанном промежутке имеет единственный корень

$x = 0$. Учтем, что $0 \leq 2x \leq \pi$ для указанного промежутка. Второе уравнение совокупности имеет на данном промежутке один корень при $-1 \leq a^2 - 4 \leq 1$, при этом отличающийся от корня первого уравнения при $a^2 \neq 5$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют все $a \in (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \sqrt{5})$.

Ответ: $a \in (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \sqrt{5})$.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{b - 2\cos 3x}{1 - \cos^2 3x + b^2}$ содержит отрезок $[2; 3]$.

Решение: Пусть $\sqrt{a+1} + 1 = b$, используя основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$y = \frac{b - 2\cos 3x}{1 - \cos^2 3x + b^2}$$

Выполним замену переменных $t = \cos 3x$, где $-1 \leq t \leq 1$.

$$y'(t) = \frac{-4t^2 + 2bt - 2 - 2b^2}{(1 - t^2 + b^2)^2} = \frac{-(t - b)^2 - 3t^2 - b^2 - 2}{(1 - t^2 + b^2)^2} < 0$$

$y(t)$ - непрерывная убывающая функция. Для выполнения условия задачи необходимо, чтобы $y(-1) \geq 3$, а $y(1) \leq 2$. $y(-1) = \frac{b+2}{b^2}$. Получаем для b условие: $-\frac{2}{3} \leq b \leq 1$. Поскольку $b \geq 1$, нам может удовлетворять только $b = 1$.

$y(1) = \frac{b-2}{b^2}$. При $b = 1$ $y(1) < 2$. При $b = 1$ $a = -1$.

Ответ: $a = -1$.

При каких значениях параметра t уравнение $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = t$ имеет решение?

Решение: Пусть $\sin x + \cos x = p$, $\sin x \cos x = f$.

Используя метод вспомогательного угла, получаем $-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$.

Из основного тригонометрического тождества тогда имеем $f = \frac{p^2 - 1}{2}$.

Для $t(p) = \frac{-p^2 + 2p + 1}{2} = \frac{-(p-1)^2 + 2}{2}$ находим множество значений функции для $-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$.

Непрерывная функция $t(p)$ принимает наибольшее значение при $p = 1$, оно равно 1. Наименьшее значение функция $t(p)$ принимает при $p = -\sqrt{2}$, оно равно $-\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

Ответ: $t \in \left[-\sqrt{2} - \frac{1}{2}; 1\right]$.

Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2(k+1)\cos t - k}{\sin t + \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение: Учитывая ОДЗ, получаем $t \neq \frac{3\pi}{4}$. На ОДЗ исходное уравнение принимает вид: $2k\cos t - 2\sin t = k$ (*). При $k = 0$ уравнение имеет решение $t = \pi$. При $t \neq \pi$ можно сделать замену переменных: $\cos t = \frac{1-p^2}{1+p^2}$, $\sin t = \frac{2p}{1+p^2}$, где $t = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, причем для отрезка $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ $p \geq 1$. В новых переменных уравнение принимает вид $3kp^2 + 4p - k = 0$. При $k \neq 0$ $p = \frac{-2 \pm \sqrt{4+3k^2}}{3k}$. $p \geq 1$ при $-2 \leq k < 0$.

Из уравнения (*) и условия $\cos t \neq -\sin t$ получаем $k \neq \frac{-2\sin t}{1+2\sin t}$.

Так как запрещенным значением на указанном промежутке для синуса является $\frac{\sqrt{2}}{2}$, получаем, что $k \neq -2 + \sqrt{2}$.

Ответ: $-2 \leq k < \sqrt{2} - 2$ или $\sqrt{2} - 2 < k \leq 0$.

IV. Рефлексия («Пять шляп»).

Метод пять шляп известен также под названием метода де Боно. Автор методики Эдвард де Боно и содержит в основе идею параллельного мышления. Иными словами, этот метод предлагает посмотреть на проблему (в конкретном случае это решение задач) с разных, но четко определенных позиций.

В группе этот метод работает эффективнее. Более того, при использовании этого метода в группе исключаются конфронтации, которые могут возникнуть между людьми с различным типом мышления при решении одной проблемы.

Каждая из 5 групп выбирает цвет шляпы и выражает свое отношение к прошедшему занятию.

«Белая шляпа»: из предложенных десяти заданий успели рассмотреть только 6. Во многих задачах были недочеты в решениях. Использование компьютера в качестве помощника на стадии подготовки переросло в неверное доказательство. Тригонометрические неравенства мы решать не умеем.

«Черная шляпа»: уровень задач явно превышает наши возможности. На ЕГЭ тригонометрия только в простейшей задаче с полным решением, нам не нужны подобные модели к задаче ЕГЭ с параметром. У нас есть ошибки в отборах корней тригонометрических уравнений на промежутках, этому надо уделять время учебных занятий. Состав групп неравноценен. Жребий позволял первым группам выбирать более простые задания.

«Желтая шляпа»: У рассмотренных задач есть алгоритмы решения, просто к ним нужно приучить свои мозги.

«Зеленая шляпа»: мне представляется, что решение подобных задач более всего подходит программистам. Им необходимо делать условные переходы, обходить критические значения, чтобы программы не повисли, наверняка, существует банк программ, рассматривающих вопросы тригонометрии. Нужно только принять позицию программиста, и дело тронется.

«Синяя шляпа» (учитель): хочется согласиться со всеми замечаниями и высказываниями, кроме совсем прагматических. Да и прагматикам, стоит иметь ввиду, что никогда не можешь знать, что от тебя потребует жизнь в той или иной ситуации.

На уроке «Решение тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами» 70% школьников справились на среднем уровне, и основная часть учащихся 70% выбрали черные, желтые шляпы дает основание сделать вывод.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения и неравенства с параметрами – прекрасный материал для исследовательской работы, но в школьной программе для задач с параметрами не выделена отдельная тема потому, что материал достаточно сложный для всех учеников класса. Освоение данного материала требует большого количества времени. Но изучение данной темы не избежать в процессе обучения, так как задания, связанные с параметрами, включены и в задания ЕГЭ, и в задания ОГЭ.

При выполнении данной работы были выполнены следующие задачи:

Проведен анализ действующих школьных учебников по алгебре с целью выявления использования параметра и методов решения уравнений и неравенств с параметрами.

Проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод: в основном все задания, связанные с решением уравнений и неравенств с параметрами, носят повышенный уровень сложности; ни в одном из учебников не дается четкого определения параметра.

Разработана методика решения уравнений и неравенств с параметрами за курс 7 – 11 классов.

Выделены основные виды уравнений и неравенств и методы их решения.

Рассмотрены все типы заданий, которые встречаются в школьных учебниках.

Разработан курс по выбору в 11 классе по теме «Уравнения и неравенства с параметрами».

По нашему мнению «Гипотеза исследования заключается в том, что разработка данного элективного курса поможет обеспечить более углубленное изучение школьниками методов решения уравнений и неравенств с параметром, расширить возможности развития мыслительной деятельности учащихся», - нашла свое подтверждение в процессе проведения занятий. Об этом свидетельствуют итоги уроков (стр. 51 и 61). Тот факт, что

70% школьников справились на среднем уровне, на уроке «Решение тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами» и основная часть учащихся 70% выбрали черные, желтые шляпы дает основание сделать вывод о подтверждении гипотезы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. 14-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2014. 400 с.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы. В 2 ч. Ч. 2: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. 14-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2014. 271 с
3. Алгебра, 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов [и др.], 2-е изд. М.: Просвещение, 2013. 191 с. - URL: https://vpr-klass.com/uchebniki/matematika/7_klass_alimov/7_klass_alimov_uchebnik_chitat'_o_nlajn.html (дата обращения: 10.11.2020). — Текст : электронный
4. Алгебра: 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович [и др.], 13-е издание, исправленное и дополненное М.: Мнемозина, 2015. 160 с
5. Алгебра: 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / С. М. Никольский [и др.]. М.: Просвещение, 2014. 287 с
6. Алгебра: 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 18-е изд. М.: Мнемозина, 2015. 240 с. — URL: https://vpr-klass.com/uchebniki/matematika/makarychev_7kl.html (дата обращения: 10.11.2020). — Текст: электронный
7. Амелькин В. В. Задачи с параметрами: справочное пособие. 3-е изд, доработанное. Минск: Асар, 2004. 464 с. — URL: <https://may.alleng.org/d/math/math530.htm> (дата обращения: 10.11.2020). — Текст : электронный
8. Артюхова И. С. Проблема выбора профиля обучения в старшей школе // Педагогика. 2004. № 2. С. 28 – 33
9. Богатырев С. В. Тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ по математике: учебное пособие / С. В. Богатырев [и др.], Самара: ГОУ СИПКРО,

2016. 137 с. — URL: <https://may.alleng.org/d/math/math796.htm> (дата обращения: 10.11.2020). — Текст: электронный
- 10.Болотов В. А. Перспективы перехода школы на профильное обучение // Воспитание школьников. 2004. № 1. С. 2 – 8
- 11.Вавилов В. В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства: справочное пособие / В. В. Вавилов [и др.], М., 2011. 240 с. — URL: <https://may.alleng.org/d/math/math315.htm> (дата обращения: 20.02.2020). — Текст : электронный
- 12.Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре: учебное пособие. 7-е изд. М.: Просвещение, 2014. 271 с
- 13.Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э. Функции и графики (основные приёмы): методическое пособие. 7-е изд., стер. М.: МЦНМО, 2006. 120 с
- 14.Горнштейн П.И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами: учебное пособие. Москва – Харьков Гиназия, 2010. 290 с. — URL: https://lyudmilanik.com.ua/spravka/wp-content/uploads/2015/02/Gornshtejn_Zadachi-s-parametrami_2005.pdf (дата обращения: 20.02.2020). — Текст : электронный
- 15.Гузеев И. С. Содержание образования и профильное обучение в старшей школе // Нар. образование. 2002. № 9. С. 113 – 123. — URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 20.02.2020). — Текст : электронный
- 16.Дорофеев Г. В., В. В. Затахавай. Решение задач, содержащих параметры. М.: Научное педагогическое образование «Перспектива», 2010 8 с
- 17.Звавич Л. И, Шляпочник Л. Я., Чинкина М. В. Алгебра и начала анализа. 8 – 11 классы: пособие для школ и классов с углубленным изучением математики. 2-е изд. М.: Дрофа, 2013. 352 с
- 18.Ивлев Б. М. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: учебное пособие / Б. М. Ивлев [и др.]. М.: Просвещение, 1990. 48 с
- 19.Качалова Г. А. Методический анализ школьных учебников по алгебре (7 – 9 классов) в контексте содержательно-методической линии «Задачи с параметрами» // Молодой ученый. 2013. № 2. С. 376 – 378
- 20.Колесникова С. И. Подготовка к ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач ЕГЭ. 3-е изд. М.: Айрис_Пресс, 2015. 272 с
- 21.Концепция профильного обучения старшей ступени общего образования: Приложение к приказу Минобразования РФ от 18.07.2002, 2002. 40 с

22. Крутихина М. В., Шилова З. В. Элективные курсы по математике: учебно методические рекомендации. Киров, 2006. 40 с. — URL: <https://mirznanii.com/a/177483-10/elektivnye-kursy-po-matematike-v-profilnoy-shkole-10/> (дата обращения: 20.02.2020). — Текст : электронный
23. Кузнецов А. А. Базовые и профильные курсы: цели, функции, содержание // Педагогика. 2004. № 2. С. 28 – 33
24. Локоть В. В. Задачи с параметрами. Иррациональные уравнения, неравенства, системы, задачи с модулем: учебное пособие. М.: АРКТИ, 2010. 64 с. — URL: https://portalus.ru/modules/shkola/rus_readme.php?subaction=showfull&id=1193320761&archive=1196814959&start_from=&ucat=& (дата обращения: 20.02.2020). — Текст : электронный
25. Математика. Подготовка к ЕГЭ – 2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год: учебно методическое пособие / Ф. Ф. Лысенко [и др.] ; под ред. Ф. Ф. Лысенко. Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 352 с
26. Немов Р. С. Психология: в 3 кн., кн. 2: Психология образования. 2-е изд. М.: ВЛАДОС, 2002. 496 с
27. Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В. Математика. Методы решения задач: справочник. М.: Дрофа, 1995. 84 с. — URL: <https://may.alleng.org/d/math/math38.htm> (дата обращения: 20.02.2020). — Текст : электронный
28. Саакян С. М., Гольдман Л. М., Денисов Д. В. Задачи по алгебре и началам анализа. 6-е изд. М., 2009. 336 с
29. Цыганов Ш. Квадратный трехчлен и параметры // Математика. 1999. № 5. С. 31 – 33
30. Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. 7-е изд. М.: Айрис_Пресс, 2015. 432 с. — URL: <https://may.alleng.org/d/math/math507.htm> (дата обращения: 20.02.2020). — Текст : электронный

31. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Факультативный курс по математике. Решение задач: учебное пособие для 10 – 11 кл. средней школы. М.: Просвещение, 2014. 352 с
32. Шевкин А. В. Задачи с параметром. Линейные уравнения и их системы: 8 – 9 классы. М.: ТНД «Русское слово – РС», 2011. 287 с
33. Ястребинецкий, Г. А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры: пособие для учителей. М.: Просвещение, 2000. 128 с

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задачи ЕГЭ

Высокий уровень С1, С2

Пример 1. Найдите все значения p , при которых уравнение

$$p \cdot \operatorname{ctg}^2 x + 2 \sin x + p = 3 \text{ имеет хотя бы один корень}$$

Решение. Преобразуем уравнение

$$p \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) + 2 \sin x + p = 3, \quad \sin x = t, \quad t \in [-1; 1], \quad t \neq 0$$

$$\frac{\delta}{t^2} - p + 2t + p = 3, \quad \frac{\delta}{t^2} + 2t = 3, \quad 3 - 2t = \frac{\delta}{t^2}, \quad 3t^2 - 2t^3 = p$$

Пусть $f(t) = 3t^2 - 2t^3$. Найдём множество значений функции $f(t)$ на $[-1; 0) \cup$

$$(0; 1]. \quad y' = 6t - 6t^2, \quad 6t - 6t^2 = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 1. \quad f(-1) = 5, \quad f(1) =$$

$$1. \text{ При } t \in [-1; 0), \quad E(f) = (0; 5],$$

$$\text{При } t \in (0; 1], \quad E(f) = (0; 1], \text{ то есть при } t \in [-1; 0) \cup (0; 1], \quad E(f) = (0; 5]$$

Чтобы уравнение $3t^2 - 2t^3 = p$ (следовательно, и данное) имело хотя бы один корень необходимо и достаточно $p \in E(f)$, то есть $p \in (0; 5]$

Ответ. $(0; 5]$

Пример 2.

При каких значениях параметра a уравнение $\log_{a^2+2}(4x^2 - 4a + a^2 + 7) = 2$ имеет ровно один корень?

Решение. Преобразуем уравнение в равносильное данному:

$$4x^2 - 4a + a^2 + 7 = (x^2 + 2)^2$$

Отметим, что если некоторое число x является корнем полученного уравнения, то число $-x$ также является корнем этого уравнения. По условию это не выполнимо, поэтому единственным корнем является число 0

Найдём a .

$$4 \cdot 0^2 - 4a + a^2 + 7 = (0^2 + 2)^2,$$

$$a^2 - 4a + 7 = 4, \quad a^2 - 4a + 3 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3$$

Проверка.

1) $a_1 = 1$. Тогда уравнение имеет вид: $\log_{x^2+2}(4x^2+4)=2$. Решаем его

$$4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2, 4x^2 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4, x^4 = 0, x = 0 - \text{единственный корень}$$

2) $a_2 = 3$. Уравнение имеет вид: $\log_{x^2+2}(4x^2+4)=2 \Rightarrow x = 0 - \text{единственный корень}$

Ответ. 1; 3

Высокий уровень С4, С5

Пример 3. Найдите все значения p , при которых уравнение

$x^2 - (p + 3)x + 1 = 0$ имеет целые корни и эти корни являются решениями неравенства: $x^3 - 7px^2 + 2x^2 - 14px - 3x + 21p \leq 0$

Решение. Пусть x_1, x_2 – целые корни уравнения $x^2 - (p + 3)x + 1 = 0$. Тогда по формуле Виета справедливы равенства $x_1 + x_2 = p + 3, x_1 \cdot x_2 = 1$. Произведение двух целых чисел x_1, x_2 может равняться единице только в двух случаях: $x_1 = x_2 = 1$ или $x_1 = x_2 = -1$. Если $x_1 = x_2 = 1$, то $p + 3 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow p = -1$; если $x_1 = x_2 = -1$, то $p + 3 = -1 - 1 = -2 \Rightarrow p = -5$. Проверим являются ли корни уравнения $x^2 - (p + 3)x + 1 = 0$ в описанных случаях решениями данного неравенства. Для случая $p = -1, x_1 = x_2 = 1$ имеем $1^3 - 7 \cdot (-1) \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 - 14 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 21 \cdot (-1) = 0 \leq 0$ – верно; для случая $p = -5, x_1 = x_2 = -1$ имеем $(-1)^3 - 7 \cdot (-5) \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)^2 - 14 \cdot (-5) \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) + 21 \cdot (-5) = -136 \leq 0$ – верно. Итак, условию задачи удовлетворяют только $p = -1$ и $p = -5$

Ответ. $p_1 = -1$ и $p_2 = -5$

Пример 4. Найдите все положительные значения параметра a , при которых число 1 принадлежит области определения функции

$$y = (a^{2+5ax} - a^{a^2x+6x})^{\frac{1}{2}}$$

Решение. $y = (a^{2+5ax} - a^{a^2x+6x})^{\frac{1}{2}}$. Область определения данной функции составляют все значения x , для которых $a^{2+5ax} - a^{a^2x+6x} \geq 0$

Если значения $x = 1$ принадлежит области определения, то должно выполняться неравенство $a^{2+5a} - a^{a^2+6} \geq 0, a^{2+5a} \geq a^{a^2+6}$ (1)

Таким образом, необходимо найти все $a > 0$, удовлетворяющие неравенству (1)

1) $a = 1$ удовлетворяет неравенству (1)

2) При $a > 1$ неравенство (1) равносильно неравенству $2 + 5a \geq a^2 + 6$,
 $a^2 - 5a + 4 \leq 0$. Решение этого неравенства: $1 \leq a \leq 4$. Учитывая условие $a > 1$, получим $1 < a \leq 4$

3) При $0 < a < 1$ неравенство (1) равносильно неравенству $2 + 5a \leq a^2 + 6$,
 $a^2 - 5a + 4 \geq 0$. Его решение $a \leq 1$; $a \geq 4$ с учетом условия $0 < a < 1$ можно записать так: $0 < a < 1$. Объединяя результаты, получаем $0 < a \leq 4$

Ответ. (0; 4]

Задачи ЕГЭ

Высокий уровень C1, C2;

1) При каких значениях параметра t уравнение $tx^{-2} + 2 = 3t - 2x^{-2}$ не имеет корней?

2) Найдите наибольшее целое отрицательное t , при котором уравнение $\cos^2 x - 5t = 4 - 2t \cdot \cos^2 x$ не имеет корней

3) При каких значениях параметра a прямая $y = 3a - 2a^2$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \sin^2 x + a \cos x$?

C4, C5

4) Найдите все значения параметра b , при которых множество решений неравенства $b \log_3 x + \log_{3x} + b \geq 0$ содержит все степени двойки с целым отрицательным показателем

5) Найдите все значения параметра p , такие, что уравнение $x^2 - (p - 5)x - 2 = 0$ имеет целые корни и эти корни являются решениями неравенства $x^3 - 0,5px^2 - 4x^2 + 2px - 5x + 2,5p \geq 0$

6) Определите, при каких значениях параметра a уравнение $x^4 + (x+1)((3a-1)x^2 + (2a^2 - 2)(x+1)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, каждый из которых принадлежит отрезку $[-3; 0]$

7) Найдите все значения параметра a , при которых оба числа $\frac{4a+1}{a}$ и $3\sqrt{a-1}$

являются решениями неравенства $\frac{3-4\cos^2 x}{2\sin x - 1} \leq 0$

Ответы: 1) $\left[-2; \frac{2}{3}\right]$; 2)- 2; 3) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; 4) нет решений; 5) 6;

6) $(3; 3,25]$; 7) $\left[1 + \left(\frac{7\pi}{30}\right)^2; \frac{6}{7\pi - 18}\right]$