

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФГБОУ ВО «Тувинский государственный университет»**  
**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**  
**КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ**  
**МАТЕМАТИКИ**

Выпускная квалификационная работа  
(бакалаврская работа)

Исследование динамики и методики расчета  
величины перспективного пассажиропотока  
транспортной инфраструктуры Республики Тыва

Работа допущена к защите  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_  
**Танзы М.В., к.п.н., доцент**  
(фамилия, и.о., уч.степень, звание)

Студента(ки) 4 курса 5 группы  
направления подготовки 01.03.01  
профили «Математика»  
очной формы обучения  
**Ондар Натальи Александровны**  
(Ф. И. О.)

Работа защищена «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

\_\_\_\_\_

(подпись)

С оценкой \_\_\_\_\_  
Председатель ГЭК \_\_\_\_\_  
(подпись)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Сенашов В.И. д.ф.-м.н., профессор**  
**ведущий научный сотрудник Института**  
**вычислительного моделирования**  
**СО РАН, Красноярск**

Члены комиссии \_\_\_\_\_

Научный руководитель: \_\_\_\_\_  
(подпись)

\_\_\_\_\_

(фамилия, и. о., должность, уч.степень, звание)

\_\_\_\_\_

(подписи)

Кызыл – 2020 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>                                                                                         | <b>3</b>  |
| <b>ГЛАВА 1. Теоретические и методологические основы регрессионного анализа.....</b>                          | <b>5</b>  |
| 1.1. Определение временного ряда, основные положения регрессии.....                                          | 5         |
| 1.2. Оценка параметров регрессионной модели .....                                                            | 8         |
| 1.3. Интервалы прогноза по уравнению регрессии .....                                                         | 13        |
| <b>ГЛАВА 2. Практическое применение регрессионного анализа к оценке перспективного пассажиропотока .....</b> | <b>16</b> |
| Задача .....                                                                                                 | 16        |
| Кубическая полиномиальная модель.....                                                                        | 19        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>                                                                                      | <b>33</b> |
| <b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>                                                                                | <b>35</b> |

## **ВВЕДЕНИЕ**

Актуальность исследования, проведенного в рамках выпускной квалификационной работы, заключается в том, что прогнозирование социально-экономического развития является важнейшим разделом экономической науки, призванным обеспечить государственные органы власти, общественность и субъекты экономической деятельности информацией о развитии экономики, а также связанных с ней социальных процессов. Для предвидения развития процессов в будущем обязательно требуется исследовать динамические ряды прошлого. В этой связи изучение методов социально-экономического прогнозирования является одной из важных задач в системе экономического образования. Основу всей совокупности названных методов традиционно составляют статистические методы, применяемые для прогнозирования развития социальных и экономических явлений и процессов, построения адекватных моделей временных рядов и выбора наиболее приемлемых вариантов из всех возможных способов прогнозирования. Важное место в системе методов прогнозирования отводится также экспертным методам.

**Цель выпускной квалификационной работы:** провести исследование и прогнозирование регрессионных моделей по методу временных рядов.

Для достижения предполагаемой цели необходимо решить следующие задачи:

1. Раскрыть основные понятия регрессионного анализа.
2. Решить задачу с практическим содержанием.

**Предмет выпускной квалификационной работы:** математико-статистические методы в исследовании.

**Объект выпускной квалификационной работы:** процесс обучения решения практической задачи по применению регрессионного анализа.

**Методы исследования выпускной квалификационной работы:**  
регрессионный анализ, прогнозирование.

**Практическая значимость выпускной квалификационной работы**  
заключается в исследовании статистической информации по перевозке пассажиров автобусами общего пользования по Республике Тыва и прогнозирование.

В первой главе совершается изучение предметной области регрессионного анализа и прогнозирование данных.

Во второй главе совершается выбор регрессионной модели временного ряда и вычисляется прогнозирование.

# ГЛАВА 1. Теоретические и методологические основы регрессионного анализа

## 1.1. Определение временного ряда, основные положения регрессии

*Экономический прогноз* — это анализ будущего состояния экономических факторов, влияющих на развитие деятельности организации.

*Временные ряды* (time – series data) — совокупность экономической информации, которая характеризует один и тот же объект, но за разные периоды времени. *Примеры временных данных* — изменение курса доллара, изменение цен на какую-нибудь продукцию, показатели смертности/рождаемости за определенный период времени и т.д.<sup>1</sup>[8]

*Регрессия* — односторонняя вероятностная зависимость между случайными величинами.

Различают следующие виды регрессии:

1. *Однофакторная (парная, простая) регрессия* — это регрессия между двумя переменными  $Y$  и  $X$ .
2. *Многофакторная (множественная) регрессия* — это регрессия между зависимой переменной  $Y$  и несколькими объясняющими переменными  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Функция  $f(x)$  называется функцией регрессии  $Y$  по  $X$ , если она описывает изменение условного среднего значения переменной  $Y$  в зависимости от значения переменной  $x$ :<sup>2</sup>[1]

$$f(x) = M(Y|x)$$

---

<sup>1</sup> Эконометрика: программа, методические указания и задания контрольной и самостоятельной работы студентов заочной формы обучения направления 080100.62 Экономика / [сост.: канд. техн. наук, доц. А. А. Алетдинова, ст. преп. О. В. Колоусова, ст. преп. Т. М. Перовошикова]; НОУ ВПО Центросоюз РФ СибУПК. – Новосибирск, 2013. – 58с.

<sup>2</sup> Воскобойников Ю.Е. ЭКОНОМЕТРИКА в EXCEL ч.1 (парный и множественный регрессионный анализ): Учебное пособие. – Новосибирск: НГАСУ, 2005. – 154с.

Таким образом, в качестве объясненной части эконометрической модели выступает регрессия, а моделью является уравнение регрессионной связи между  $Y$  и  $X$  вида

$$Y = f(x) + \varepsilon.$$

В модели случайного члена  $\varepsilon$ , который будем называть возмущение или ошибкой модели, обусловлено следующими причинами:

1. *Ошибки спецификации модели*, обусловленные не включением важных объясняющих переменных, неправильную функциональную спецификацию модели. Математическое ожидание таких ошибок отличается от нуля.

2. *Ошибки измерения*, обусловленные погрешностью сбора и измерения исходных данных. Математическое ожидание таких ошибок может равняться нулю.

3. *Ошибки, связанные со случайностью человеческих реакций*. Обусловлено тем, что поведение и непосредственное участие человека в сборе и подготовке данных может внести определенные погрешности. Математическое ожидание таких ошибок может равняться нулю.

Виды функции регрессии:<sup>3</sup>[1]

1. Линейная:  $\tilde{y} = a \times x + b + \varepsilon$

2. Экспоненциальная:  $\tilde{y} = a \times e^{b \times x} + \varepsilon$

3. Логарифмическая:  $\tilde{y} = b \times \ln(x) + a + \varepsilon$

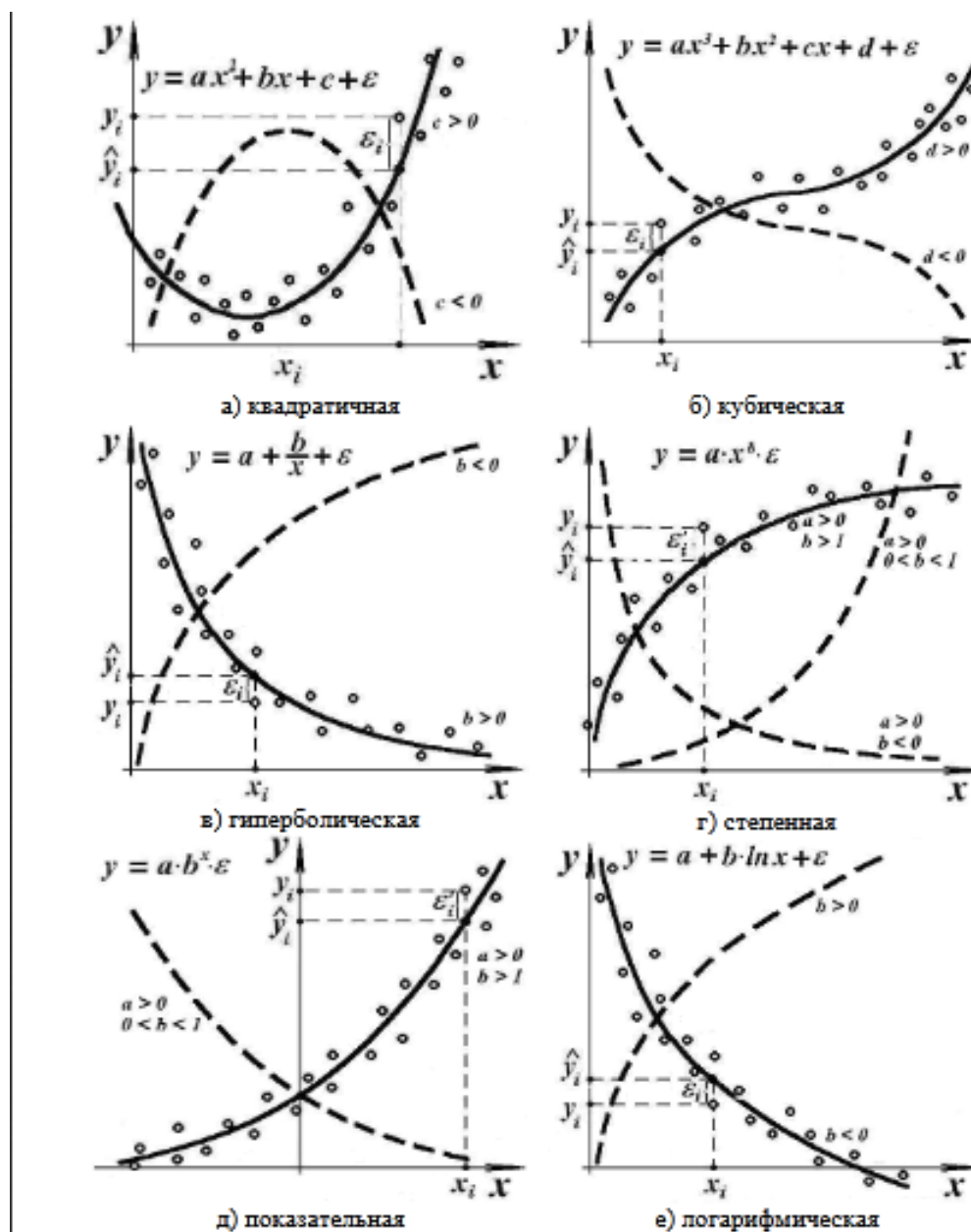
4. Полиномиальная:  $\tilde{y} = a + b_1 \times x + b_2 \times x^2 + \dots + \varepsilon$

5. Степенная:  $\tilde{y} = a \times b^x + \varepsilon$  и т.д.

---

<sup>3</sup> Воскобойников Ю.Е. ЭКОНОМЕТРИКА в EXCEL ч.1 (парный и множественный регрессионный анализ): Учебное пособие.- Новосибирск: НГАСУ, 2005.-154с.

## Примеры нелинейных регрессий.



Кроме этих функций на практике находят применение и более сложные функции.

Возникает вопрос: какой тип функции взять? Для ответа на этот вопрос используют следующие подходы.

1. Аналитический.

Анализируется априорная информация о содержательной экономической сущности исследуемой зависимости. На основе этого анализа выбирается подходящий вид функции  $f(x)$ .

Например, для шахт другого угольного района было установлено, что зависимость между производительностью шахтера и толщиной угольного пласта является линейной. Поэтому в качестве функции  $f(x)$  также можно принять линейную функцию  $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ .

## 2. Графический.

В декартовой системе координат строят  $n$  точек с координатами  $(x_i, y_i)$ , определяемыми заданной пространственной выборкой. Построенная диаграмма называется диаграммой рассеяния (или полем корреляции). Затем на основе визуального анализа расположения точек принимают решение о типе функции  $f(x)$ .

Заметим, что из-за наличия случайной составляющей  $\varepsilon_i$ , значения  $y_i$  имеют определенный разброс и не нужно подбирать  $f(x)$ , проходящую через все точки (тем самым возмущение  $\varepsilon$  было бы включено в функцию регрессии  $f(x)$ ). Необходимо, чтобы  $f(x)$  в «равной степени близости» проходила около всех точек диаграммы рассеяния.<sup>4</sup>[1]

### 1.2. Оценка параметров регрессионной модели

*Корреляция* — связь между объективно существующими явлениями.<sup>5</sup>[8]

Коэффициент корреляции принимает значения от  $-1$  до  $+1$ .

- Если  $r_{xy} = 0$ , можно говорить о неправильно выбранной форме связи или об отсутствии связи между переменными  $X$  и  $Y$ .

---

<sup>4</sup> Воскобойников Ю.Е. ЭКОНОМЕТРИКА в EXCEL ч.1 (парный и множественный регрессионный анализ): Учебное пособие.-Новосибирск: НГАСУ, 2005-154с.

<sup>5</sup> Эконометрика: программа, методические указания и задания контрольной и самостоятельной работы студентов заочной формы обучения направления 080100.62 Экономика / [сост.: канд. техн. наук, доц. А. А. Алетдинова, ст. преп. О. В. Колоусова, ст. преп. Т. М. Перовщикова]; НОУ ВПО Центросоюз РФ СибУПК. – Новосибирск, 2013. – 58с.

- Если  $r_{xy} = 1$ , все точки  $X_i$  и  $Y_i$  расположены на прямой, связь между ними самая сильная – функциональная.
- Если  $r_{xy} > 0$ , связь между переменными  $X$  и  $Y$  прямая.
- Если  $r_{xy} < 0$ , связь между переменными  $X$  и  $Y$  обратная.

Связи между признаками могут быть слабыми и сильными (тесными). Их критерии оцениваются по шкале Чеддока:

$0.1 < |r_{xy}| < 0.3$ : слабая;

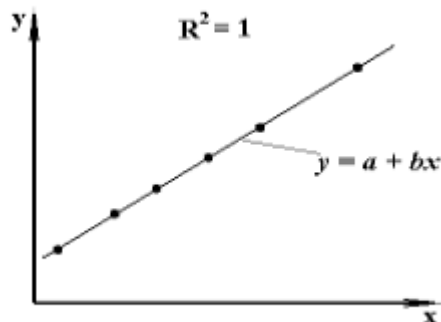
$0.3 < |r_{xy}| < 0.5$ : умеренная;

$0.5 < |r_{xy}| < 0.7$ : заметная;

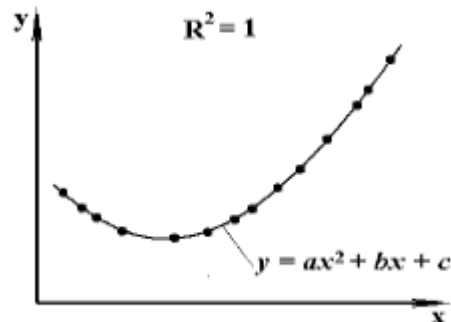
$0.7 < |r_{xy}| < 0.9$ : высокая;

$0.9 < |r_{xy}| < 1$ : весьма высокая.

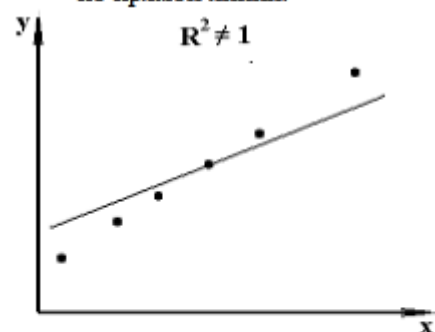
- Если уравнение парной линейной регрессии получено методом наименьших квадратов, то  $R^2 = r^2$  (1.5).



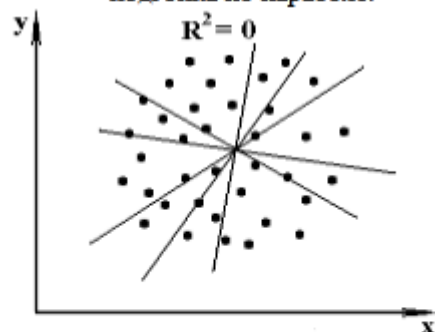
**Рис.1.7** Абсолютно точная подгонка по прямой линии.



**Рис.1.8** Абсолютно точная подгонка по параболе.



**Рис.1.9** Несмотря на полную функциональную связь между переменными, прямая, полученная не МНК, может проходить не строго по точкам.



**Рис.1.10** Любая из проведенных прямых «одинаково плоха» ( $R^2 = 0$ ).

Проверка статистической значимости коэффициентов регрессии. Для проверки значимости коэффициента  $b_j$  сформулируем статистические гипотезы:

$$H_0: \beta_j = 0 \text{ (коэффициент } b_j \text{ незначим);}$$

$$H_1: \beta_j \neq 0 \text{ (коэффициент } b_j \text{ значим).}$$

В качестве критерия проверки гипотезы примем следующую случайную величину

$$T_{b_j} = \frac{b_j}{S_{b_j}},$$

которая при справедливости гипотезы  $H_0$  имеет распределение Стьюдента с  $n - m$  степенями свободы. Следовательно, коэффициент  $b_j$  значимо отличается от нуля (т.е. принимается гипотеза  $H_1$ ) на уровне значимости  $\alpha$ , если

$$|T_{b_j}| > t(1 - \alpha, n - m),$$

где  $t(1 - \alpha, n - m)$  определяется выражением,  $m$ —число коэффициентов регрессии.<sup>6</sup>[1]

*Коэффициент детерминации.* Он рассчитывается возведением в квадрат линейного коэффициента корреляции  $r_{xy}^2$ . Он показывает, на сколько процентов вариация фактора  $x$  объясняет вариацию результативного показателя  $y$ .<sup>7</sup>[8]

$y_i$  —  $i$ -ое наблюдаемое значение  $Y$ ;

$y(x)$  —  $i$ -ое оценочное значение  $Y$ ;

---

<sup>6</sup> Воскобойников Ю.Е. ЭКОНОМЕТРИКА в EXCEL ч.1 (парный и множественный регрессионный анализ): Учебное пособие.-Новосибирск: НГАСУ, 2005.-154с.

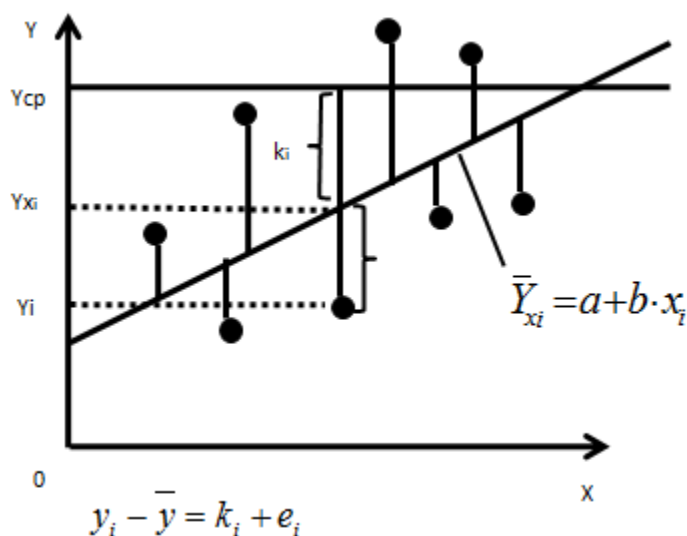
<sup>7</sup> Эконометрика: программа, методические указания и задания контрольной и самостоятельной работы студентов заочной формы обучения направления 080100.62 Экономика / [сост.: канд. техн. наук, доц. А. А. Алетдинова, ст. преп. О. В. Колоусова, ст. преп. Т. М. Перовошикова]; НОУ ВПО Центросоюз РФ СибУПК. – Новосибирск, 2013-58с.

$\bar{y}$  — среднее арифметическое значение Y.

Суммы квадратов отклонений:

- общая:  $\sum (y_i - \bar{y})^2$
- регрессионная  $\sum (y(x) - \bar{y})^2$
- остаточная  $\sum (y_i - y(x))^2$

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (y(x) - \bar{y})^2 + \sum (y_i - y(x))^2$$



*Средняя ошибка аппроксимации* — это среднее отклонение расчетных значений от фактических  $y$ . Она вычисляется по формуле:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y - \tilde{y}}{y} \right| \cdot 100\%$$

Допустимый предел значений средней ошибки аппроксимации не более 8 – 10%.

- Если  $A < 8\%$ , то ошибка аппроксимации небольшая, и регрессионная модель хорошо описывает изучаемую закономерность.
- Если  $8\% \leq A \leq 10\%$ , ошибка аппроксимации высокая, но регрессионная модель хорошо описывает изучаемую закономерность.
- Если  $A > 10\%$ , ошибка аппроксимации высокая, но регрессионная модель плохо описывает изучаемую закономерность.

*F-критерий Фишера.* F-тест состоит в проверке гипотезы  $H_0$  о статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи. Сравниваются фактическое  $F_{\text{факт}}$  и критическое (табличное)  $F_{\text{табл}}$  значения F- критерий Фишера.  $F_{\text{факт}}$  можно рассчитать по формуле:

$$F_{\text{факт}} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot (n - m - 1),$$

где  $n$  – число единиц совокупности;

$m$  – число факторов, включаемых в модель.

$F_{\text{табл}}$ — это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости  $\alpha$ .

Уровень значимости  $\alpha$ — вероятность отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна.

При нахождении  $F_{\text{табл}}$  в таблице значений F-критерия Фишера будем принимать:  $k_1 = m$  и  $k_2 = n - 2$ , где  $n$  – объем выборки,  $m$  – количество объясняющих переменных.

Гипотеза  $H_0$ — природа оцениваемых характеристик случайна.

Гипотеза  $H_1$  — природа оцениваемых характеристик не случайна.

Если  $F_{\text{табл}} < F_{\text{факт}}$ , то гипотеза  $H_0$ —о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность с вероятностью  $1 - \alpha$ .

Если  $F_{\text{табл}} > F_{\text{факт}}$ , то  $H_0$ —гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик не отклоняется и признается их статистическая незначимость и ненадежность с вероятностью  $1 - \alpha$ .

Таким образом, качество модели считается высоким, если выполняются все три условия:

1. коэффициент детерминации  $r_{xy}^2 \geq 0.5$ ;
2. средняя ошибка аппроксимации  $\bar{A} \leq 10\%$  ;
3.  $F_{\text{табл}} < F_{\text{факт}}$ .

Если хоть одно из условий не выполняется, качество модели низкое. Выбор наилучшего варианта эконометрической модели осуществляется сравнением их качественных характеристик. Соответственно лучшему варианту модели должны соответствовать лучшие характеристики.

### 1.3. Интервалы прогноза по уравнению регрессии

По уравнению регрессии определяется прогнозное значение зависимой переменной  $\tilde{y}(\overline{y}_{xp})$  путем подстановки в уравнение прогнозного значения  $x_{пр}$ . Точечный прогноз дополняется интервальной оценкой прогноза  $\overline{y}_{xp}$ .<sup>8</sup>[7]

Конечно, такой прогноз отвечает на вопрос, каково будет среднее значение результата.

Однако зачастую необходимо знать диапазон возможных значений результатов с заданной надежностью. Ниже приводятся формулы, позволяющие производить интервальное прогнозирование.

Предсказание среднего и индивидуального значения зависимой переменной:

$$\overline{y}_{xp} - m_{xp} \leq \tilde{y} \leq \overline{y}_{xp} + m_{xp};$$

$$a + b \cdot x \pm t_{\alpha/2, n-2} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$a + b \cdot x \pm t_{\alpha/2, n-2} \cdot S \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

где  $m_{xp}$  — стандартная ошибка точечного прогноза;

$S^2$  — остаточная дисперсия на одну степень свободы;

$t$  — случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с заданной вероятностью.

*Коэффициент эластичности.*

<sup>8</sup> Кадочникова Е. И. Эконометрика. Конспект лекций / Е. И. Кадочникова; Каз. федер. ун-т. — Казань, 2013. — 106с.

В экономических исследованиях широкое применение находит такой показатель, как коэффициент эластичности, вычисляемый по формуле

$$\Xi = f'(x) \frac{x}{y}.$$

Коэффициент эластичности показывает на сколько процентов изменится результат  $y$  при изменении фактора  $x$  на 1 % от своего номинального значения. Для линейной регрессии коэффициент эластичности равен

$$\Xi = b \frac{x}{y}$$

и зависит от  $x$ , поэтому рассчитывают средний коэффициент эластичности

$$\bar{\Xi} = f'(\bar{x}) \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = b \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

Средний коэффициент эластичности  $\bar{\Xi}$  показывает, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат  $y$  от своей величины при изменении фактора  $x$  на 1 % от своего значения.<sup>9</sup>[9]

**В теоретической части дипломной работы можно сделать следующие выводы:**

Уравнение регрессии позволяет найти значение зависимой, если величина независимой или независимых переменных известна. С помощью уравнения регрессии можно прогнозировать.

Практически, речь идет о том, чтобы, анализируя множество точек на графике (или множество статистических данных), найти линию, по возможности точно отражающую заключенную в этом множестве закономерность (тренд, тенденцию), линию регрессии.

Задачи регрессионного анализа лежат в сфере установления формы зависимости, определения функции регрессии, использования уравнения для оценки неизвестных значений зависимой переменной.

---

<sup>9</sup> Эконометрика: лабораторный практикум/ Н. И. Шанченко – Ульяновск: УлГТУ, 2004.-79с.

Решение задач основывается на анализе соответствующих параметров (статистических данных), в которых всегда неизбежно присутствуют отклонения, вызванные случайными ошибками. Поэтому существуют специальные методы оценки как уравнения регрессии в целом, так и отдельных ее параметров.

## **ГЛАВА 2. Практическое применение регрессионного анализа к оценке перспективного пассажиропотока**

### **Задача**

В данный момент в Республике Тыва основным видом пассажирских перевозок является автобус. Рассмотрена официальная статистическая информация по перевозке пассажиров автобусами общего пользования по Республике Тыва 2005-2018 гг. Фактические значения приведены в таблице.

Требуется:

1. Построить регрессионные модели.
2. Оценить адекватность моделей.
3. Сделать прогноз до 2023 года.

### **Перевозки пассажиров автобусами общего пользования по Республике Тыва<sup>10</sup>[6]**

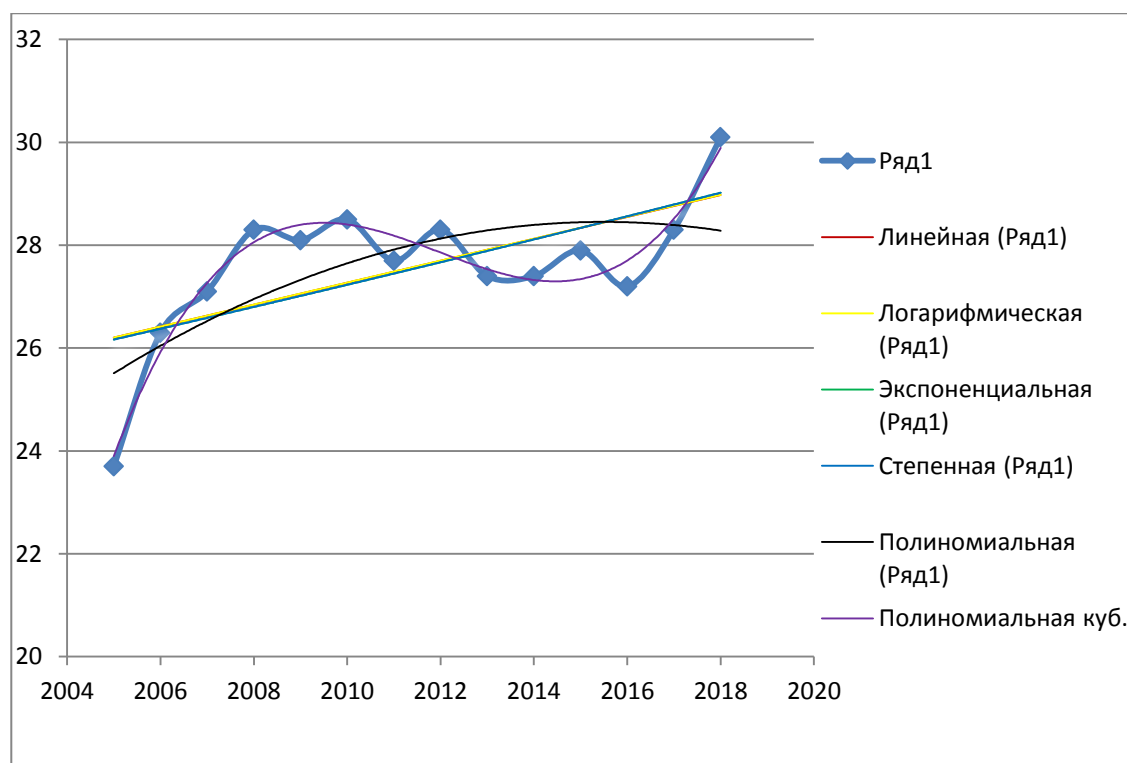
| годы | пассажиропоток, млн чел |
|------|-------------------------|
| 2005 | 23,7                    |
| 2006 | 26,3                    |
| 2007 | 27,1                    |
| 2008 | 28,3                    |
| 2009 | 28,1                    |
| 2010 | 28,5                    |
| 2011 | 27,7                    |
| 2012 | 28,3                    |
| 2013 | 27,4                    |
| 2014 | 27,4                    |
| 2015 | 27,9                    |
| 2016 | 27,2                    |
| 2017 | 28,3                    |
| 2018 | 30,1                    |

<sup>10</sup> Официальный сайт Управления Федеральной службы государственной статистики по Красноярскому краю, Республике Хакасия и Республике Тыва — Загл. с экрана. — URL: [http://www.krasstat.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_ts/krasstat/ru/publications/pubTuv/](http://www.krasstat.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_ts/krasstat/ru/publications/pubTuv/) (дата обращения: 09.11.2019)



В современных условиях транспорт имеет особое значение. Уровень экономического развития напрямую зависит от уровня развития транспортной отрасли.

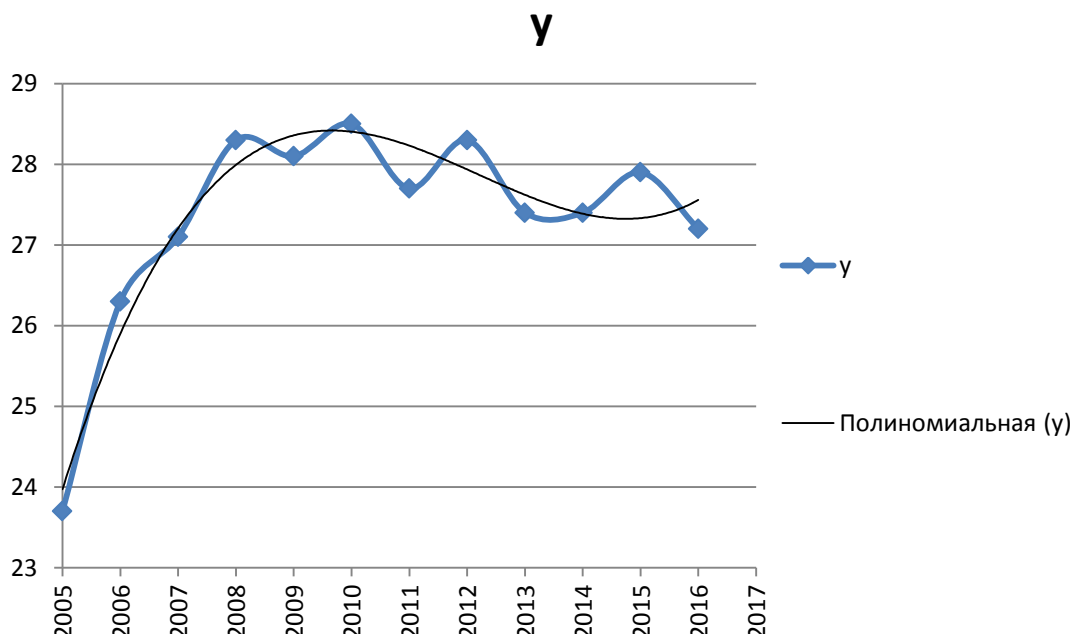
Для трендового анализа временного ряда пассажиропотока в Республике Тыва необходимо построить регрессионные модели и оценить значения коэффициентов детерминации. Чем ближе коэффициент детерминации  $r^2$  к 1, тем выше качество модели.



| Модель                                                                              | Коэффициент детерминации | Средняя ошибка аппроксимации (%) |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| <i>Линейная</i><br>$y = 0,2134x - 401,67$                                           | 0,3944                   | 3,23                             |
| <i>Экспоненциальная</i><br>$y = 3E - 06e0,008x$                                     | 0,3898                   | 3,26                             |
| <i>Степенная</i><br>$y = 3E - 52x16,031$                                            | 0,3901                   | 3,24                             |
| <i>Логарифмическая</i><br>$y = 429,44\ln(x) - 3239$                                 | 0,3947                   | 3,23                             |
| <i>Полиномиальная в степени 2</i><br>$y = -0,0268x^2 + 107,97x - 108780$            | 0,4739                   | 2,00                             |
| <i>Полиномиальная в степени 3</i><br>$y = 0,0167x^3 - 100,61x^2 + 202447x - 1 + 08$ | 0,92                     | 1,05                             |

Как видно на графике и по коэффициенту детерминации, идеально подходит кубическая полиномиальная модель.

### Кубическая полиномиальная модель



Для данных система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a \sum x_i^3 + b \sum x_i^2 + c \sum x_i + nd = \sum y_i, \\ a \sum x_i^4 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^2 + d \sum x_i = \sum x_i y_i, \\ a \sum x_i^5 + b \sum x_i^4 + c \sum x_i^3 + d \sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i, \\ a \sum x_i^6 + b \sum x_i^5 + c \sum x_i^4 + d \sum x_i^3 = \sum x_i^3 y_i. \end{cases}$$

$$a \cdot 105726553309 + b \cdot 52573755 + c \cdot 26143 + 13 \cdot d = 356,2;$$

$$a \cdot 212618306799015 + b \cdot 105726553309 + c \cdot 52573755 + d \cdot 26143 = 716349,2;$$

$$a \cdot 427581335634916000 + b \cdot 212618306799015 + c \cdot 105726553309 + d \cdot 52573755 = 14406454551,80;$$

$$a \cdot 859880949118167000000 + b \cdot 427581335634916000 + c \cdot 212618306799015 + d \cdot 105726553309 = 14406454551,80.$$

Из данной системы получается:

$y = 0,016666667 \cdot x^3 - 100,61004 \cdot x^2 + 202447,2799 \cdot x - 135787731,7$ — уравнение кубической модели.

|          | x     | y     | y(x)    | x^2      | y^2     | x*y        | (y-ycp)^2 | (y-y(x))^2 | y-y(t)  : y |
|----------|-------|-------|---------|----------|---------|------------|-----------|------------|-------------|
|          | 2005  | 23,7  | 24,0519 | 4020025  | 561,69  | 47518,5    | 13,69     | 0,12382188 | 0,0148474   |
|          | 2006  | 26,3  | 25,982  | 4024036  | 691,69  | 52757,8    | 1,21      | 0,10110361 | 0,01209     |
|          | 2007  | 27,1  | 27,2921 | 4028049  | 734,41  | 54389,7    | 0,09      | 0,03690425 | 0,0070887   |
|          | 2008  | 28,3  | 28,0821 | 4032064  | 800,89  | 56826,4    | 0,81      | 0,04747977 | 0,0076996   |
|          | 2009  | 28,1  | 28,452  | 4036081  | 789,61  | 56452,9    | 0,49      | 0,12391963 | 0,0125275   |
|          | 2010  | 28,5  | 28,5019 | 4040100  | 812,25  | 57285      | 1,21      | 3,4857E-06 | 6,551E-05   |
|          | 2011  | 27,7  | 28,3316 | 4044121  | 767,29  | 55704,7    | 0,09      | 0,39896375 | 0,0228027   |
|          | 2012  | 28,3  | 28,0413 | 4048144  | 800,89  | 56939,6    | 0,81      | 0,06691089 | 0,0091403   |
|          | 2013  | 27,4  | 27,7309 | 4052169  | 750,76  | 55156,2    | 0         | 0,10952482 | 0,0120783   |
|          | 2014  | 27,4  | 27,5005 | 4056196  | 750,76  | 55183,6    | 0         | 0,01009749 | 0,0036674   |
|          | 2015  | 27,9  | 27,45   | 4060225  | 778,41  | 56218,5    | 0,25      | 0,202544   | 0,0161308   |
|          | 2016  | 27,2  | 27,6793 | 4064256  | 739,84  | 54835,2    | 0,04      | 0,2297669  | 0,0176228   |
|          | 2017  | 28,3  | 28,2887 | 4068289  | 800,89  | 57081,1    | 0,81      | 0,00012876 | 0,000401    |
| сумма    | 26143 | 356,2 | 357,384 | 52573755 | 9779,38 | 716349,2   | 19,5      | 1,45116923 | 0,136162    |
| ср.знач. | 2011  | 27,4  | 27,4911 | 4044135  | 752,26  | 55103,7846 | 1,5       | 0,1116284  | 0,010474    |

Выборочные дисперсии:

$$S^2(x) = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 4044135 - 4044121 = 14$$

$$S^2(y) = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = 752,26 - 750,76 = 1,5$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$S(x) = \sqrt{S^2(x)} = 3,741657387$$

$$S(y) = \sqrt{S^2(y)} = 1,224744871$$

Коэффициент корреляции b можно находить по формуле:

$$b = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S^2(x)} = \frac{55103,78462 - 2011 \cdot 27,4}{14} = 0.17033$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 27,4 - 0.17033 \cdot 2011 = -315.133$$

Коэффициент детерминации:

$$r^2 = 1 - \frac{(y_i - y(x))^2}{(y_i - \bar{y})^2} = \frac{1,451169231}{19,5} = 0,925581065$$

Коэффициент детерминации показывает точность подбора уравнение модели.

Величину  $r^2$ , равную отношению объясненной уравнением регрессии дисперсии результата  $y$  к общей дисперсии  $y$ , для нелинейных связей называют **индексом детерминации**.

Обычно, давая интерпретацию индекса детерминации, его выражают в процентах, то есть в 92.56% случаев изменения  $x$  приводят к изменению  $y$ . Следовательно, точность подбора уравнения регрессии — высокая. Остальные 7,44% изменения  $Y$  объясняются факторами, не учтенными в модели, а также ошибками спецификации.

### **Коэффициент корреляции**

$$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{0,922081328} = 0,962071237$$

Связи между признаками могут быть слабыми и сильными (тесными). Их критерии оцениваются по шкале Чеддока:

$0.1 < |r_{xy}| < 0.3$ : слабая;

$0.3 < |r_{xy}| < 0.5$ : умеренная;

$0.5 < |r_{xy}| < 0.7$ : заметная;

$0.7 < |r_{xy}| < 0.9$ : высокая;

$0.9 < |r_{xy}| < 1$ : весьма высокая.

Исходя из полученного результата, можно заключить, что связь между признаками весьма высокая.

Данный коэффициент является универсальным, потому что отражает тесноту связи и точность модели, а также может использоваться при любой форме связи переменных. При построении однофакторной корреляционной

модели коэффициент множественной корреляции равен коэффициенту парной корреляции  $r$ . Измеряется в отрезке  $[0;1]$ . В отличие от линейного коэффициента корреляции он характеризует тесноту нелинейной связи и не характеризует ее направление.

### Значимость коэффициента корреляции

Выдвигаем гипотезы:

$H_0: r_{xy} = 0$ , нет линейной взаимосвязи между переменными;

$H_1: r_{xy} \neq 0$ , есть линейная взаимосвязь между переменными;

Итак, для того чтобы при уровне значимости  $\alpha$  проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины при конкурирующей гипотезе  $H_1 \neq 0$ , надо определить наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл}} = r_{xy} \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы  $k = n - 2$  найти критическую точку  $t_{\text{крит}}$  двусторонней критической области.

Если  $t_{\text{набл}} < t_{\text{крит}}$  оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если  $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{крит}}$  — нулевую гипотезу отвергают.

$$t_{\text{набл}} = 0,925581065 \frac{\sqrt{13-2}}{\sqrt{1-0,925581065^2}} = 8.11$$

По таблице Стьюдента с уровнем значимости  $\alpha = 0.05$  и степенями свободы  $k=11$  находим  $t_{\text{крит}}$ :

$$t_{\text{крит}}(n - m - 1; \alpha/2) = 2.201, \text{ где } m = 1 - \text{ количество переменных.}$$

В этом случае  $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{критич}}$ , так что полученное значение коэффициента

корреляции признается значимым (нулевая гипотеза, утверждающая равенство нулю коэффициента корреляции, отвергается).

### **Ошибка аппроксимации**

Качество уравнения регрессии оценивается с помощью ошибки абсолютной аппроксимации. Средняя ошибка аппроксимации — среднее отклонение расчетных значений от фактических: Ошибка аппроксимации в пределах 5% – 7% свидетельствует о хорошем подборе уравнения регрессии к исходным данным.

$$\bar{A} = \frac{\sum |y_i - y(x)| : y_i}{n} \cdot 100\% = \frac{0,13616204}{13} \cdot 100\% = 1,05\%$$

Исходя из полученного результата, можно заключить, что расчетные значения отклоняются от фактических на 1,05%. Ошибка является меньше 7%, то данное уравнение можно использовать в качестве регрессии.

### **Средний квадрат ошибок**

$S^2 = \frac{\sum (y_i - y(x))^2}{n - m - 1} = \frac{19,5}{13 - 2 - 1} = 0,145116923$  — необъясненная дисперсия или дисперсия ошибки регрессии (мера разброса зависимой переменной вокруг линии регрессии).

$$S = 0,380942152$$

Стандартная ошибка регрессии является в качестве меры разброса данных наблюдений от смоделированных значений. Чем меньше значение стандартной ошибки регрессии, тем качество модели выше.

$S_a$  — стандартное отклонение случайной величины  $a$ .

$$S_a = S \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{n}$$

$$S_a = 0,38 \cdot \frac{52573755}{13 \cdot 3,741657387} = 411737,722$$

$S_b$  — стандартное отклонение случайной величины  $b$ .

$$S_b = \frac{S}{\sqrt{n} \cdot S(x)}$$

$$S_b = \frac{0.38}{\sqrt{13} \cdot 3.741657387} = 0,028237311$$

### Коэффициент эластичности

$$E = (3 \cdot 0,016666667 \cdot \bar{x}^2 - 100,61004 \cdot \bar{x} + 202447,2799) \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{xy}} =$$

$$(3 \cdot 0,016666667 \cdot 2011^2 - 100,61004 \cdot 2011 + 202447,2799) \cdot \frac{2011}{55103,78462} =$$

$$-0,009011868$$

Средний коэффициент эластичности  $E$  определяет, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат  $y$  от своей средней величины при изменении фактора  $x$  на 1% от своего среднего значения.

### Бета – коэффициент

**Бета – коэффициент** показывает, на какую часть величины своего среднего квадратичного отклонения (СКО) изменится в среднем значение результативного признака при изменении факторного признака на величину его среднеквадратического отклонения (СКО) при фиксированном на постоянном уровне значении остальных независимых переменных:

$$\beta_j = b \frac{S(x)}{S(y)} = 0.17033 \cdot \frac{3,741657387}{1,224744871} = 0,520365738$$

исходя из полученного результата, можно заключить, что увеличение  $x$  на величину среднего квадратичного отклонения (СКО)  $Sx$  приведет к уменьшению среднего значения  $y$  на 52.03% среднего квадратичного отклонения (СКО)  $Sy$ .

### Проверка гипотез относительно коэффициентов уравнения регрессии

## **t-статистика. Критерий Стьюдента**

С помощью метода наименьших квадратов получились лишь оценки параметров уравнения регрессии, которые характерны для конкретного статистического наблюдения (конкретного набора значений  $x$  и  $y$ ).

Для оценки статистической значимости коэффициентов регрессии и корреляции рассчитываются  $t$  – критерий Стьюдента и доверительные интервалы каждого из показателей. Выдвигается гипотеза  $H_0$  о случайной природе показателей, то есть о незначимом их отличии от нуля. Чтобы проверить параметры надо понять значимо ли они отличаются от нуля для генеральной совокупности; используют статистические методы проверки гипотез.

В качестве основной (нулевой) гипотезы выдвигают гипотезу о незначимом отличии от нуля параметра или статистической характеристики в генеральной совокупности.

Рассмотрим гипотезу  $H_0$  о равенстве отдельных коэффициентов регрессии нулю (при альтернативе  $H_1$  не равно) на степень значимости  $\alpha = 0.05$ .

$H_0: b = 0$ , то есть между переменными  $x$  и  $y$  отсутствует линейная взаимосвязь;

$H_1: b \neq 0$ , то есть между переменными  $x$  и  $y$  есть линейная взаимосвязь.

Если основная гипотеза окажется неверной, то принимается альтернативную гипотезу. Для проверки этой гипотезы используется  $t$  – критерий Стьюдента.

Найденное по данным наблюдений значение  $t$  – критерия (его еще называют наблюдаемым или фактическим) сравнивается с табличным (критическим) значением, определяемым по таблицам распределения Стьюдента.

Табличное значение определяется в зависимости от уровня значимости ( $\alpha$ ) и числа степеней свободы, которое в случае линейной парной регрессии равно  $(n - 2)$ ,  $n$  – число наблюдений.

Если фактическое значение  $t$  – критерия больше табличного (по модулю), то основную гипотезу отвергают и считают, что с вероятностью  $(1 - \alpha)$  параметр или статистическая характеристика в генеральной совокупности значимо отличается от нуля.

Если фактическое значение  $t$  – критерия меньше табличного (по модулю), то нет оснований отвергать основную гипотезу, т.е. параметр или статистическая характеристика в генеральной совокупности незначимо отличается от нуля при уровне значимости  $\alpha$ .

$$t_{\text{крит}}(n - m - 1; \alpha/2) = t_{\text{крит}}(11; 0.025) = 2.201$$

$$t_b = \frac{b}{S_b}$$

$$t_b = \frac{0.17033}{0,028237311} = 6,03$$

Поскольку  $2.201 < 6.03$ , то статистическая значимость коэффициента регрессии  $b$  подтверждается; отвергаем гипотезу о равенстве нулю этого коэффициента.

$$t_a = \frac{a}{S_a}$$

$$t_a = \frac{-315.133}{411737.722} = -0,000765373$$

Поскольку  $0,0008 < 2.201$ , то статистическая значимость коэффициента регрессии  $a$  не подтверждается; принимаем гипотезу о равенстве нулю этого коэффициента.

### Интервальный прогноз

Рассмотрим среднеквадратическую ошибку прогнозируемого показателя.

$$Uy = y_{n+L} \pm K, \text{ где}$$

$$K = t_a \cdot S_y \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3 \cdot (n + 2L - 1)^2}{n(n^2 - 1)}}$$

$L$  — период упреждения;

$y_{n+L}$  — точечный прогноз по модели на  $(n + L)$  момент времени;

$n$  — количество наблюдений во временном ряду;

$S_y$  — стандартная ошибка прогнозируемого показателя;

$T_{\text{табл}}$  — табличное значение критерия Стьюдента для уровня значимости  $\alpha$  и для числа степеней свободы, равного  $n - 2$ .

По таблице Стьюдента находим  $T_{\text{табл}}$

$$T_{\text{табл}}(n - m - 1; \alpha/2) = (11; 0.05/2) = 2.228$$

Точечный прогноз для 2019

$$y(2019) = 0,016666667 \cdot 2019^3 - 100,61004 \cdot 2019^2 + 202447,2799 \cdot 2019 - 135787731,7 = 31.04705$$

$$K = 2.228 \cdot 1.5 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{13} + \frac{3 \cdot (13 + 2 \cdot 1 - 1)^2}{13 \cdot (13^2 - 1)}} = 4.499$$

Интервальный прогноз:

$$t = 2019: (26,54805095; 35,54605095)$$

Точечный прогноз для 2020

$$y(2020) = 0,016666667 \cdot 2020^3 - 100,61004 \cdot 2020^2 + 202447,2799 \cdot 2020 - 135787731,7 = 33,39613599$$

Интервальный прогноз:

$$t = 2020: (28,89713599; 37,89513599)$$

Точечный прогноз для 2021

$$y(2021) = 0,016666667 \cdot 2021^3 - 100,61004 \cdot 2021^2 + 202447,2799 \cdot 2021 - 135787731,7 = 36,52515$$

Интервальный прогноз:

$$t = 2021: (32,02614511; 41,02414511)$$

Точечный прогноз для 2022

$$y(2022) = 0,016666667 \cdot 2022^3 - 100,61004 \cdot 2022^2 + 202447,2799 \cdot 2022 - 135787731,7 = 40,53407824$$

Интервальный прогноз:

$$t = 2022: (36,03507824; 45,03307824)$$

Точечный прогноз для 2023

$$y(2023) = 0,016666667 \cdot 2023^3 - 100,61004 \cdot 2023^2 + 202447,2799 \cdot 2023 - 135787731,7 = 45,52293533$$

Интервальный прогноз:

$$t = 2023: (41,02393533; 50,02193533)$$

### **Доверительный интервал для коэффициентов уравнения регрессии**

Определим доверительные интервалы коэффициентов регрессии, которые с надежностью 95% будут следующими:

$$(b - t_{\text{крит}} \cdot S_b; b + t_{\text{крит}} \cdot S_b)$$

$$(0.17033 - 2.201 \cdot 0,028237311; 0.17033 + 2.201 \cdot 0,028237311)$$

$$(0,108179678; 0,232480322)$$

С вероятностью 95% можно утверждать, что значение данного параметра будут лежать в найденном интервале.

$$(a - t_{\text{крит}} \cdot S_a; a + t_{\text{крит}} \cdot S_a)$$

$$(-315.133 - 2.201 \cdot 411737.722; -315.133 + 2.201 \cdot 411737.722)$$

$$(-906549,8591; 905919,5931)$$

С вероятностью 95% можно утверждать, что значение данного параметра будут лежать в найденном интервале.

### ***F* – статистика. Критерий Фишера**

Индекс детерминации  $r^2$  используется для оценки существенности уравнения нелинейной регрессии в целом. Проверка оценки значимости модели регрессии проводится с использованием  $F$  – критерия Фишера, расчетное значение которого находится как отношение дисперсии исходного ряда наблюдений изучаемого показателя и несмещенной оценки дисперсии остаточной последовательности для данной модели.

Если расчетное значение с  $k1 = (m)$  и  $k2 = (n - m - 1)$  степенями свободы больше табличного при заданном уровне значимости, то модель считается значимой, где  $m$  — число факторов в модели.

Оценка статистической значимости парной линейной регрессии производится по следующему алгоритму:

1. Выдвигается нулевая гипотеза о том, что уравнение в целом статистически незначимо:  $H_0: R^2 = 0$  на уровне значимости  $\alpha$ .

2. Определяется фактическое значение  $F$  – критерия:

$$F = \frac{r^2}{1 - r^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,925581065}{1 - 0,925581065} \cdot \frac{13 - 1 - 1}{1} = 136,81,$$

где  $m = 1$  – количество влияющих факторов в модели тренда..

3. Табличное значение определяется по таблицам распределения Фишера для заданного уровня значимости; число степеней свободы для общей суммы квадратов большей дисперсии равно единице и число степеней свободы остаточной суммы квадратов меньшей дисперсии при линейной регрессии равно  $n - 2$ .

$F_{\text{табл}}$  – это максимальное возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости  $\alpha$ . Уровень значимости  $\alpha$  — вероятность отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна. Обычно  $\alpha$  принимается равной 0,05 или 0,01.

Табличное значение при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ ,  $k = 1$  и  $k = 13 - 1 - 1 = 11$ ,  $F_{\text{табл}}(1; 11) = 4,84$ .

$$F = 136,81 > 4,84 = F_{\text{табл}}$$

Исходя из полученного результата, можно заключить, что оценка значимости уравнения регрессии осуществляется путем проверки гипотезы:  $F > F_{\text{табл}}$  следовательно, статистически значима и надежное уравнение регрессии.

### Дисперсионный анализ

При разбирательстве качества модели регрессии используется теорема о разложении дисперсии, согласно которой общая дисперсия результативного характера может быть разложена на две составляющие — объясненную и необъясненную уравнением регрессии дисперсии.

$$\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (y(x) - \bar{y})^2 + \sum (y - y(x))^2, \text{ где}$$

$$\sum (y - \bar{y})^2 = 18,6225 = 18,6225 \text{ — общая сумма квадратов отклонений;}$$

$\Sigma(y(x) - \bar{y})^2 = 17,17145953$  — сумма квадратов отклонений, обусловленная регрессией («объясненная» или «факторная»);  
 $\Sigma(y - y(x))^2 = 1,451040474$  — остаточная сумма квадратов отклонений.

Таким образом, качество модели считается высоким, так как выполняются все три условия:

1. коэффициент детерминации  $r_{xy}^2 = 0,93 > 0.5$ ;
2. средняя ошибка аппроксимации  $\bar{A} = 1,05 \leq 10\%$ ;
3.  $F < F_{\text{факт.}}$ .

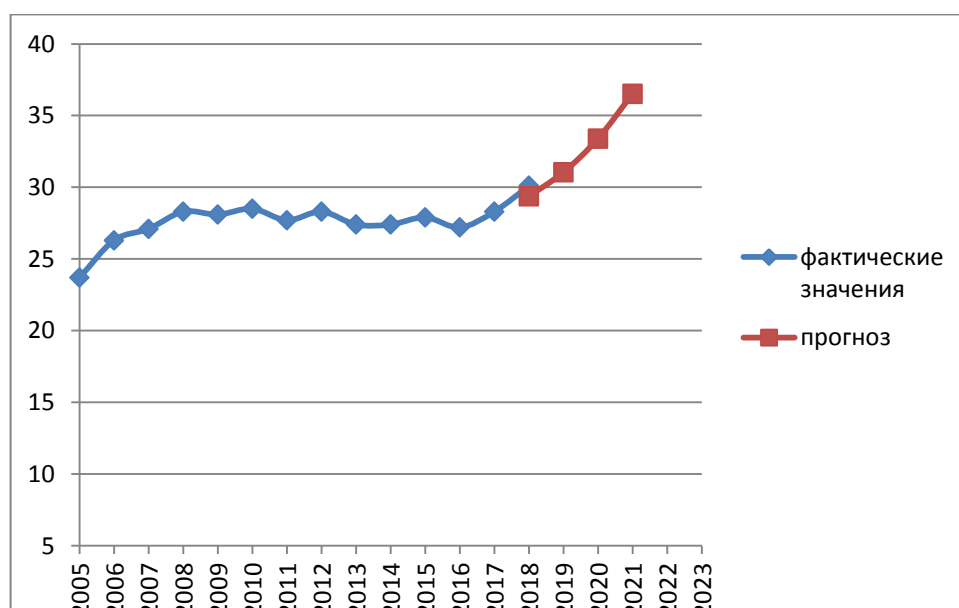
Для анализа обеспеченности перспективного пассажиропотока транспортной инфраструктурой необходимо произвести прогноз изменения величины перевозимых пассажиров на кубической регрессии.

#### Прогнозирование до 2023 года

| годы | фактические значения | прогноз  |
|------|----------------------|----------|
| 2005 | 23,7                 |          |
| 2006 | 26,3                 |          |
| 2007 | 27,1                 |          |
| 2008 | 28,3                 |          |
| 2009 | 28,1                 |          |
| 2010 | 28,5                 |          |
| 2011 | 27,7                 |          |
| 2012 | 28,3                 |          |
| 2013 | 27,4                 |          |
| 2014 | 27,4                 |          |
| 2015 | 27,9                 |          |
| 2016 | 27,2                 |          |
| 2017 | 28,3                 |          |
| 2018 | 30,1                 | 30,1     |
| 2019 |                      | 31,04705 |

|      |  |          |
|------|--|----------|
| 2020 |  | 33,39614 |
| 2021 |  | 36,52515 |
| 2022 |  | 40,53408 |
| 2023 |  | 45,52294 |

*График прогноза*



Можно сделать вывод о том, что пассажиропоток в последующие годы будет увеличиваться и к 2023 году достигнет 45,5 млн человек.

Таким образом, изучена зависимость  $y$  от  $x$ . На этапе исследования была выбрана **кубическая полиномиальная** регрессия. Оценены её параметры МНК, то есть методом наименьших квадратов. Статистический метод уравнения проверен с помощью коэффициента детерминации и критерия Фишера. Отмечено, что в исследуемой ситуации 92,56% общей вариабельности  $Y$  объясняется изменением  $X$ . Отмечено также, что статистически значима модель регрессии. Полученные отметки уравнения регрессии позволяют использовать его для прогноза.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная выпускная квалификационная работа состоит из 2 частей: теоретической, в которой были сформированы основные понятия регрессионного анализа, и практической, в которой выполнено прогнозирование методом временных рядов по величинам перевозки пассажиров автобусами общего пользования по Республике Тыва за 2005-2018 гг.

В ходе исследования было построено уравнение кубической регрессии  $y = 0,016666667 \cdot x^3 - 100,61004 \cdot x^2 + 202447,2799 \cdot x - 135787731,7$ . Качество регрессии отличное: коэффициент корреляции  $r = 0,96$  показывает, что связь между фактическими значениями и факторами (годы) весьма высокая, так как коэффициент корреляции близок к единице; коэффициент детерминации  $r^2 = 0,93$  показывает высокую точность подбора уравнения регрессии, так как близок к единице. Средняя ошибка аппроксимации  $\bar{A} = 1,05\%$  — среднее отклонение расчетных значений от фактических. Оценка значимости уравнения регрессии проверки гипотезы:  $F > F_{\text{табл}}$  следовательно, статистически значима и надежное уравнение регрессии. Таким образом, кубическая полиномиальная регрессионная модель показывает, что пассажиропоток в последующие годы будет увеличиваться. Сделан прогноз до 2023 года и построен график.

Цель данной выпускной квалификационной работы достигнута. Проведено исследование и прогнозирование регрессионных моделей по методу временных рядов.

Для достижения предполагаемой цели были решены следующие задачи:

1. Раскрыты основные понятия регрессионного анализа.
2. Решена задача с практическим содержанием.

Результаты данного исследования были доложены на ежегодной научно-практической конференции студентов ТувГУ в апреле 2020 года и доклад получил третье место.

Ранее в этом же издании, но по другой теме в секции “алгебра и геометрия” ежегодной научно-практической конференции студентов, посвященной Году добровольца (волонтера) в России и Году развития малых сел в Туве была опубликована моя научная статья “Оценка количества 3-апериодических слов в алфавите  $\{A, B\}$ ” под научным руководством д.ф.-м.н., профессора СФУ Сенашов В.И в «Сборнике научных работ студентов Тувинского государственного университета. Выпуск XVI», а также в сборнике «Материалы лучших докладов студентов, рекомендованных соответствующими секциями на ежегодной научно-практической конференции студентов ТувГУ», состоявшейся 21 апреля 2018 года<sup>11</sup>[10]. Доклад получил первое место.

---

<sup>11</sup> Официальный сайт Тувинский государственный университет— Загл. с экрана. — URL: <http://tuvsu.ru/student/1377/> (дата обращения: 01.06.2020)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воскобойников Ю.Е. ЭКОНОМЕТРИКА в EXCEL ч.1 (парный и множественный регрессионный анализ): Учебное пособие.-Новосибирск: НГАСУ, 2005.-154 с. — Текст : непосредственный.
2. Елисеева И.И. Практикум по эконометрике: Учебное пособие /Елисеева И.И., Курышева С.В., Гордеенко и др.; Под ред. И.И. Елисеевой.— М.: Финансы и статистика, 2003. - 192 с. — Текст : непосредственный.
3. Домбровский В.В., Эконометрика: учебник.- М.: Новый учебник, 2004.-342 с. — Текст : непосредственный.
4. Елисеева И.И., Эконометрика: учебник для вузов.- М.: Финансы и статистика, 2002.-344 с. — Текст : непосредственный.
5. Елисеева И.И., Эконометрика: учебник, 2е изд.- М.: Финансы и статистика, 2005.-576 с. — Текст : непосредственный.
6. Официальный сайт Управления Федеральной службы государственной статистики по Красноярскому краю, Республике Хакасия и Республике Тыва — Загл. с экрана. — URL: [http://www.krasstat.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_ts/krasstat/ru/publications/pubTuv/](http://www.krasstat.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_ts/krasstat/ru/publications/pubTuv/) (дата обращения: 09.11.2019). — Текст : электронный.
7. Кадочникова Е. И. Эконометрика. Конспект лекций / Е. И. Кадочникова; Каз. федер. ун-т. – Казань, 2013. – 106 с. — Текст : непосредственный.
8. Эконометрика: программа, методические указания и задания контрольной и самостоятельной работы студентов заочной формы обучения направления 080100.62 Экономика / [сост.: канд. техн. наук, доц. А. А. Алетдинова, ст. преп. О. В. Колоусова, ст. преп. Т. М. Перевощикова]; НОУ ВПО Центросоюз РФ СибУПК. –Новосибирск,2013. – 58 с. — Текст : непосредственный.
9. Эконометрика: лабораторный практикум/ Н. И. Шанченко – Ульяновск: УлГТУ,2004 – 79 с. — Текст : непосредственный.
10. Официальный сайт Тувинский государственный университет— Загл. с экрана. — URL: <http://tuvsu.ru/student/1377/> (дата обращения: 01.06.2020). — Текст : электронный.