

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Тувинский государственный университет»
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ**

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

**Разработка элективного курса
«Линии второго порядка»
в профильных классах**

Работа допущена к защите
Зав. кафедрой _____
Танзы М.В., к.п.н., доцент
(фамилия, и.о., уч.степень, звание)

Студента(ки) 4 курса 5 группы
направления подготовки 01.03.01
профиль «Математика» очной формы
обучения
Чаш-оол Надежда Юрьевна
(Ф.И.О.)

Работа защищена «__» _____ 20__ г.
С оценкой _____
Председатель ГЭК _____
(подпись)

Сенашов В.И. д.ф-м.н., профессор
ведущий научный сотрудник Института
вычислительного моделирования
СО РАН, Красноярск
Члены комиссии _____

(подписи)

(подпись)
«__» _____ 20__ г.

Научный руководитель: _____
(подпись)
Танова Оксана Монгушовна, старший
преподаватель кафедры математики и
МПИМ

Кызыл – 2020г.

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Психолого-педагогические основы обучения геометрии на элективных курсах в школе.....	7
1.1. Психологические аспекты развития интеллекта старшеклассников.....	7
1.2. Математическое мышление.....	9
1.3 Элективные курсы в обучении.....	11
1.3.1 Цель, задачи, функции элективных курсов.....	11
1.4.2 Типы элективных курсов.....	13
1.3.3 Элективные курсы на этапе предпрофильной подготовки.....	14
1.3.4 Мотивы выбора школьниками элективных курсов.....	15
1.3.5 Требования к содержанию программ элективных курсов.....	16
1.3.6 Элективные курсы в образовательной области «Математика».....	18
Глава 2. Методика обучения учащихся профильных классов элективному курсу «Линии второго порядка».....	20
2.1 Сравнительный анализ учебников по геометрии для 10-11-х классов.....	20
2.2. Разработка элективного курса по теме: «Линии второго порядка»...	22
2.2.1. История изучения плоских линий.....	23
2.2.2. Способы образования линий второго порядка.....	25
2.2.3. Эллипс.....	26
2.2.4. Гипербола.....	28
2.2.5. Парабола.....	30
2.2.6. Директрисы эллипса, гиперболы и параболы.....	32
2.2.7. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе.....	36
2.2.8. Фокальные свойства.....	38
2.2.9. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения.....	41
2.2.10. Законы Кеплера.....	44
2.2.11. Практические задания.....	45
2.2.11.1 Материал для закрепления материала по теме «Эллипс».....	45
2.2.11.2 Материал для закрепления материала по теме «Гипербола».....	53
2.2.11.3 Материал для закрепления материала по теме «Парабола».....	57
2.3. Аprobация.....	61
Заключение.....	65
Библиография	66
Приложение 1.....	69
Приложение 2.....	78

Введение

Переход на массовое профильное обучение рассматривается как осуществление радикальной дифференциации образования, включающее: с психолого-педагогических позиций – создание оптимальных условий для выявления задатков, развития интересов и способностей каждого учащегося; с социальных позиций – наиболее полное раскрытие и рациональное использование возможностей каждого члена общества; с методических позиций – построение новой дидактической системы мотивации и организации индивидуализированного обучения учащихся.

В настоящее время повышается ценность образования. При этом рост показателей обучения обеспечивается в процессе развития мыслительных способностей обучающихся, то есть на уроке по любому предмету, в процессе обучения, необходимо развивать мышление учащихся. В частности, по математике процесс ее изучения должен приводить к умению логически доказательно мыслить, умению отрываться от стереотипных действий, творчески подходить к решению задачи.

В целом во многих школах на уроке математики большинство задач решается по определенным алгоритмам, и быстрота их решения зависит от знания учениками формул и умения их применять. При этом основное усложнение задачи производится за счет увеличения числа действий, увеличения чисел и т.п. Многие этапы решения таких задач у учеников приобретают автоматический характер, и они не задумываются над каждым из них. Отсюда нерациональное, а иногда и неправильное решение задачи. При таком обучении учащиеся очень быстро перестают применять изученные определения, теоремы, сокращая обоснование решения задачи. Для предотвращения такого обучения система заданий должна составляться учителем так, чтобы задачи решались не по определенному алгоритму, решение приводилось к активизации мыслительной деятельности учащихся.

Наряду с обязательными учебными занятиями в общеобразовательных учреждениях используются занятия вне расписания уроков, в частности, элективные курсы. Элективные курсы представляют собой сверхпрограммные занятия, право выбора которых остается за учащимся, а посещение осуществляется на добровольной основе. На элективных курсах учащиеся занимаются углубленным изучением тем, которые вызывают интерес; решают олимпиадные задачи; можно проводить исследования различных, как теоретических, так и практических задач. Нет обязательной программы, которая утверждается свыше, нет и оценок, которые порой так страшны для ребят, нет и ограничений по времени в течение которого следует изучать разбирать задачи данной тематики. В базовом школьном курсе геометрии практически не изучаются линии и поверхности второго порядка – разделы аналитической геометрии. Предлагаемое в элективном курсе изучение свойств и форм линий второго порядка позволит расширить рамки математических знаний учащихся, позволит взглянуть по-новому на практическое применение математики, на её связь с другими отраслями знаний. Школьникам будет интересно узнать об оптических свойствах эллипса, гиперболы, параболы, о применении этих свойств на практике. Элективный курс включает учащихся в различные формы самостоятельной деятельности, совмещает математическую строгость изложения материала с математической красотой и математической занимательностью. В связи вышеизложенным, **актуальность** данной работы продиктована необходимостью обеспечить развитие кругозора учащихся, дополнительной мотивации к изучению предмета, содействию в дальнейшей профессиональной ориентации учащихся, соблюдая при этом преемственность общеобразовательного курса математики и элективного курса по теме «Линии второго порядка».

Целью данной работы является разработка элективного курса «Линии второго порядка» в профильных классах..

Объектом исследования является обучение геометрии в профильных классах.

Предметом исследования является процесс обучения линиям второго порядка в рамках элективного курса в профильных классах.

Гипотеза исследования состоит в том, что обучение учащихся профильных классов по теме «Линии второго порядка» в рамках элективного курса способствует:

- 1) повышению интереса к математике;
- 2) повышению качества математических знаний.

Для реализации поставленной цели было необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить психолого-педагогические особенности старшего школьного возраста для обоснования возможности обучения учеников линиям второго порядка.
2. Проанализировать учебную литературу (программа по математике, школьные учебники) с точки зрения рассматриваемого вопроса.
3. Сформулировать педагогические требования к элективному курсу.
4. Обеспечить преемственность школьного материала и материала элективного курса.
5. Разработать элективный курс «Линии второго порядка» в профильных классах.
6. Провести апробацию.

Научная новизна состоит в том, что разработан элективный курс «Линии второго порядка» для профильных классов.

Теоретическая значимость **исследования** заключается в том, что разработана методика обучения учащихся профильных классов линиям второго порядка на элективном курсе.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанный элективный курс может быть полезен учителям, методистам при обучении геометрии.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка и приложений.

В первой главе «Теоретические основы обучения геометрии на элективных курсах в школе» изучены психолого-педагогические основы обучения геометрии в школе, рассмотрена роль элективных курсов в обучении математике в школе. Основное внимание в главе уделено анализу школьных учебников геометрии авторов Погорелова А.В. и авторов Атанасяна Л.С. и других.

Во второй главе Методика обучения учащихся профильных классов элективному курсу «Линии второго порядка» разработан элективный курс «Линии второго порядка» для учащихся профильных классов

Глава 1. Психолого-педагогические основы обучения геометрии на элективных курсах в школе

1.1. Психологические аспекты развития интеллекта старшеклассников

Наше исследование связано с вопросами методики обучения геометрии в 10-11 классах, поэтому, прежде всего, думаем уместно, в первую очередь, рассмотреть вопросы современной психологии и педагогики, связанные с этим возрастом - периодом ранней юности (период жизни и развития человека от 16 до 18 лет).

В 10-11 классе развитию интеллекта характерны такие особенности как значительное развитие теоретической мысли; совершенствование практического мышления, самостоятельность и активность мыслительной деятельности. Критичность: старшеклассники чаще и настойчивее задают вопрос «почему?» и высказывают сомнения в достаточности и обоснованности предлагаемых объяснений.

Развитым можно считать такое практическое мышление, которое обладает следующими свойствами: предприимчивость, экономность, расчетливость, умение оперативно решать поставленные задачи.

Человек должен быть всегда готов отыскать решение возникшей проблемы, выход можно найти из любой ситуации.

Происходят характерные изменения в умственном развитии юношей и девушек. Растет их сознательное отношение к труду и учению.[6]

Познавательные процессы (восприятие, память, мышление, воображение) входят как составная часть в любую человеческую деятельность и обеспечивают ту или иную ее эффективность.

Развитие высших психических процессов. У старшеклассников обычно ярко выражено избирательное отношение к учебным предметам. Потребность в значимых для жизненного успеха знаниях – одна из наиболее характерных черт нынешнего старшеклассника.

Восприятие. Восприятие характеризуется целенаправленностью. Заметно развивается, совершенствуется способность к переключению и распределению внимания. Последнее, в частности, сказывается в формирующемся умении одновременно слушать объяснения учителя, и вести запись лекции-беседы, следить за содержанием и формой своего ответа.

Память. В этом возрасте происходят важные процессы, связанные с перестройкой памяти. Активно развивается логическая память и скоро достигает такого уровня, что ребенок переходит к преимущественному использованию этого вида памяти, а также произвольной и опосредованной памяти. Процесс запоминания у старших школьников сводится к мышлению, к установлению логических отношений внутри запоминаемого материала, а припоминание заключается в восстановлении материала по этим отношениям.

Мышление. Ведущей деятельностью в этом возрасте является учение. Большое значение приобретают уроки-лекции, самостоятельное выполнение практических работ, написание рефератов и докладов. В учении формируются общие интеллектуальные способности, особенно понятийное теоретическое мышление. Это происходит за счет усвоения понятий, совершенствования умения пользоваться ими, рассуждать логически и абстрактно.

Мыслительная деятельность у старшеклассников приобретает такой уровень развития процессов анализа и синтеза, теоретического обобщения и абстрагирования. Они умеют аргументировать, делать выводы, связывать изучаемое в систему. В раннем юношеском возрасте завершается формирование когнитивных процессов и, прежде всего, мышления. В эти годы мысль окончательно соединяется со словом, в результате чего образуется внутренняя речь как основное средство организации мышления и регуляции других познавательных процессов.

Наряду с этим идет активный процесс формирования научных понятий, содержащих в себе основы научного мировоззрения человека в рамках тех

наук, которые изучаются в школе. Приобретают окончательные формы умственные действия и операции с понятиями, опирающиеся на логику рассуждений и отличающие словесно-логическое, абстрактное мышление от наглядно-действенного и наглядно-образного. Юность – это период расцвета всей умственной деятельности.

Самостоятельность мышления приобретает определяющий характер и крайне необходима для самоутверждения личности. Взрослые, учителя часто безапелляционно отвергают наивные, односторонние, еще далеко незрелые заключения, создавая своей бестактностью предпосылки для конфликтов и недоразумений.

1.2 Математическое мышление

Анализируя понятие мышления в целом, возникает вопрос об особенностях мышления старшеклассников при постановке тех или иных математических задач.

Понятию «математическое мышление», «математическое творчество», уделялся и уделяется особый интерес. Примерами могут послужить работы таких ученых, как А. Пуанкаре «Математическое творчество», Г. Гельмгольц «Как приходят новые идеи», И. Р. Шафаревич «Математическое мышление и природа». Каждый из перечисленных ученых сам является математиком, поэтому привносит в изучение данного вопроса свой личный опыт, который, в свою очередь, может быть очень полезен. Б. В. Раушенбах подчеркивает, что процесс поиска решения в «логических» задачах, например, при разработке некоторой математической проблемы, привлекает внимание исследователей. Однако изучение этой стороны деятельности человеческой психики находится еще в стадии накопления результатов наблюдений.

Математическое мышление – это один из видов мышления, направленный на решение математических проблем и задач, характеризующийся использованием математических понятий и символов.

Мыслительная деятельность приобретает в юношеском возрасте особую значимость и является важным психологическим новообразованием.

Когнитивные и психофизические изменения в отрочестве, их совершенствование и расширение требует изучения этого вопроса в преломлении к определенному возрастному периоду. Рассмотрим особенности развития мышления в подростковом возрасте.

В юношеском возрасте активно идет процесс познавательного развития. К старшему школьному возрасту дети усваивают многие научные понятия, обучаются пользоваться ими в процессе решения различных задач [21]. Вследствие роста когнитивных умений, таких, как текущий самоконтроль и саморегуляция, старшеклассники могут размышлять о своих собственных мыслительных процессах и о мышлении других людей. Развитие самосознания учащегося находит свое выражение в изменении мотивации основных видов деятельности.

Изучаемый в школе материал становится для старшеклассника условием для построения и проверки своих гипотез. Они могут формулировать свои гипотезы, исследовать и сравнивать между собой различные альтернативы при решении одних и тех же задач [12].

В мышлении старшеклассника большую роль играет мотивация. Ему становится доступным осознание ошибки, допущенной в процессе мышления.

Итак, мы можем сказать, что мышление старшеклассника – это опосредованное и обобщенное познание объективной реальности, вплетенное во всю его психологическую жизнь и связанное с его возрастными и личностными особенностями.

1.3 Элективные курсы в обучении

1.3.1 Цель, задачи, функции элективных курсов

Прилагательное «элективный» (electus) в переводе с латинского языка означает «избранный, отобранный». Отсюда следует, что любой курс, нареченный в учебном плане элективным должен выбираться. В Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования (Приказ Минобрнауки РФ от 18 июля 2002 г. 3 2783) дано следующее определение: «Элективные курсы – обязательные для посещения курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы»[7, 173-179].

Элективные курсы (курсы по выбору) – новый элемент учебного плана, играющий важную роль в системе профильного обучения на старшей ступени школы. В отличие от факультативных курсов, существующих ныне в школе, элективные курсы – обязательны для старшеклассников [14].

Цель изучения элективных курсов – ориентация на индивидуализацию обучения и социализацию учащихся, на подготовку к осознанному и ответственному выбору сферы будущей профессиональной деятельности [14].

Элективные курсы должны помочь в решении следующих *задач*:

1). Создание условий для того, чтобы ученик утвердился или отказался от сделанного им выбора направления дальнейшего учения и связанного с определенным видом профессиональной деятельности.

2). Оказание помощи старшекласснику, совершившему в первом приближении выбор образовательной области для более тщательного изучения, в рассмотрении многообразия видов деятельности, с ней связанных [24].

В соответствии с целями и задачами профильного обучения элективные курсы могут выполнять *различные функции*:

· повысить качество знаний учащихся;

· повышение уровня изучения базовых учебных предметов;

- изучение смежных учебных предметов на профильном уровне; реализация межпредметных связей, интеграция разрозненных представлений, сформированных в рамках отдельных учебных предметов, в целостную картину мира;
- подготовка к сдаче экзаменов на повышенном уровне для учеников, изучающих предмет на базовом уровне;
- ориентация в особенностях будущей профессиональной деятельности, “профессиональная проба”;
- ориентация на совершенствование навыков познавательной, организационной деятельности [14].

Каждая из указанных функций может быть ведущей, но в целом они должны выполняться комплексно.

Того чтобы понять суть функции элективных курсов по повышению качеств знаний выделим особо такие параметры, как полнота, глубина, системность, прочность знаний.

Именно эти характеристики чаще всего подвергаются проверке и оценке в процессе обучения, некоторые из них мы будем учитывать далее в экспериментальной работе. Вслед за И.Я. Лернером будем трактовать выделенные параметры следующим образом.

Полноту знаний по соответствующей теме будем рассматривать как процент усвоения учащимися элементов знаний по той или иной теме. Полнота знаний тесно связана с содержанием образования, она предполагает усвоение не только обязательных фактов, но и связей между ними. Однако, связи могут носить как существенный, так и несущественный характер.

Глубину знаний характеризует число существенных связей данного знания с другими, соотносящимися с ним. Полнота представления существенных связей, их иерархичность проявляются в таком качестве знаний, как системность.

Системностью знаний учащихся будем называть такую совокупность знаний, структура которой соответствует структуре научной теории.

Заметим, что системность в психолого-педагогической литературе рассматривается не только как качество знаний, но и как дидактический принцип, на основании которого рассматриваются требования к обучению и его результатам.

Системные знания – это знания, располагаемые по схеме: основные понятия, основные положения, следствия, приложения. Как показали исследования психологов, системность знаний усиливает их прочность. Прочность знаний означает длительность сохранения их в памяти, воспроизводимость в необходимых случаях, готовность вывести необходимые знания, основываясь на других опорных знаниях. Необходимым условием обеспечения прочности знаний является их систематическое применение [23].

Важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой школьниками усваивается математическая теория, развиваются их творческие способности и самостоятельность мышления, является решение математических задач. Поэтому качество математического образования во многом зависит от отбора, конструирования, организации задач – методики задач. Часто встречающийся формализм в знаниях учащихся, недостаток умений, низкий уровень творческого мышления во многом объясняются несовершенством этой методики. Устранить эти недостатки можно, только будучи вооруженным теорией, вскрывающей закономерности функционирования задач в учебном процессе, указывающей способы их оптимального отбора и использования.

1.3.2 Типы элективных курсов

Можно условно выделить следующие типы элективных курсов.

I. *Предметные курсы*, задача которых – углубление и расширение знаний по предметам, входящих в базисный учебный план школы.

Предметные элективные курсы можно разделить на несколько групп.

1. Элективные курсы повышенного уровня, направленные на углубление учебного предмета, имеющие тематическое и временное согласование с этим учебным предметом.

2. Элективные курсы, в которых углубленно изучаются отдельные разделы основного курса, входящие в обязательную программу данного предмета («Применение производной к исследованию функций»).

3. Элективные курсы, в которых углубленно изучаются отдельные разделы основного курса, не входящие в обязательную программу данного предмета («Теория вероятности», «Математическая логика»).

4. Прикладные элективные курсы, цель которых – знакомство учащихся с путями и методами применения знаний на практике, развитие интереса учащихся к современной технике и производству.

5. Элективные курсы, посвященные изучению методов познания природы.

6. Элективные курсы, посвященные истории предмета, как входящего в учебный план школы («История математики», «Великие математики»), так и не входящего в него («История религии»).

7. Элективные курсы, посвященные изучению методов решения задач (математических, физических, химических, биологических и т.д.), составлению и решению задач на основе физического, химического, биологического эксперимента.

II. *Межпредметные элективные курсы*, цель которых – интеграция знаний учащихся о природе и обществе («Математические методы в экономике»).

III. *Элективные курсы по предметам*, не входящим в базисный учебный план [8].

1.3.3 Элективные курсы на этапе предпрофильной подготовки

Реализация идеи обязательной профильности старшей ступени, ставит выпускника основной школы перед необходимостью совершения

ответственного выбора. Выбор подросток должен совершить и в отношении индивидуальной образовательной траектории (или профессиональной, если основная школа становится последним этапом школьного образования) и относительно предварительного самоопределения в отношении профилирующего направления собственной деятельности. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования предполагает создание условий в основной школе, позволяющие ученику совершить этот выбор, а именно – введение предпрофильной подготовки через организацию курсов по выбору [24].

На этапе предпрофильной подготовки элективные (обязательные курсы по выбору) курсы поддерживают у школьников интерес к той или иной учебной дисциплине. Проверяют возможности, способности ребят. Помогают им выбирать профиль обучения в старшей школе, т.е. имеют развивающую, деятельностьную, практическую направленность.

Основные цели, стоящие перед элективными курсами в основной школе: создать условия, способствующие осознанному выбору профиля обучения в старшей школе; способствовать формированию личной ответственности учащихся за сделанный выбор профиля обучения в старшей школе [24].

В 10-11 классах целью элективного курса является расширение, углубление знаний, выработка специфических умений и навыков, знакомство с новыми областями науки в рамках выбранного профиля.

Это главные отличия элективных курсов в 9-х классах и в 10-11-х классах, а требования к их разработке и оформлению сходны.

1.3.4 Мотивы выбора школьниками элективных курсов

Так как элективные курсы выбираются самими учащимися, они должны соответствовать их потребностям, целям обучения и мотивам выбора курса. Следует отметить, что к основным мотивам выбора элективных курсов

в 9-11 классе, которые следует учитывать при разработке и реализации элективных курсов относятся:

- подготовка к экзаменам по профильным предметам;
- приобретение знаний и навыков, освоение способов деятельности для решения практических, жизненных задач;
- возможности успешной карьеры, продвижения на рынке труда;
- любопытство;
- поддержка изучения базовых курсов;
- профессиональная ориентация;
- интеграция имеющихся представлений в целостную картину мира [14].

1.3.5 Требования к содержанию программ элективных курсов

Элективные курсы реализуются за счет школьного компонента учебного плана, характеризуются минимальной численностью учебной группы (1-15 человек). Каждый учащийся в течение двух лет должен выбрать и изучить 5-6 элективов, при этом количество предлагаемых курсов должно быть значительно выше. Примерное соотношение объемов базовых общеобразовательных, профильных общеобразовательных предметов и элективных курсов определяется пропорцией 50: 30: 20.

Элективные курсы выполняют следующие функции:

- изучение ключевых проблем современности;
- ознакомление с особенностями будущей профессиональной деятельности, «профессиональная проба»;
- ориентация на совершенствование навыков познавательной, организационной деятельности;
- дополнение и углубление базового предметного образования;
- компенсация недостатков обучения по профильным предметам [9, с.36-41., с. 38].

Тематика и содержание элективных курсов должны отвечать следующим требованиям:

- иметь социальную и личностную значимость, актуальность, как с точки зрения подготовки профессиональных кадров, так и личностного развития учащихся;

- способствовать социализации и адаптации, представлять возможность для выбора индивидуальной образовательной траектории, осознанного профессионального самоопределения;

- поддерживать изучение базовых и профильных общеобразовательных предметов, а также обеспечивать условия для внутрипрофильной социализации обучения;

- обладать значительным развивающим потенциалом;

- вносить вклад в формирование целостной картины мира;

- способствовать развитию общеучебных, интеллектуальных и профессиональных умений и навыков, ключевых компетенций [13, с. 38-39].

Методы и формы обучения определяются уровнем развития и саморазвития учащихся, уровнем их индивидуальных способностей и требованиями профилизации обучения. Ведущие методы – проблемно-поисковые и исследовательские, стимулирующие познавательную активность учащихся [9,с.36-41].

Базовыми требованиями к содержанию программ элективных курсов являются следующие: *ориентация на современные образовательные технологии; соответствие учебной нагрузки учащихся нормативам; соответствие принятым правилам оформления программ; наличие пособия, содержащего необходимую информацию; краткосрочность проведения курса; развитие содержания одного из базовых курсов, изучение которого осуществляется на минимальном общеобразовательном уровне, что позволяет поддерживать изучение смежных предметов на предпрофильной уровне; удовлетворение познавательных интересов школьника в различных*

областях деятельности человека; ознакомление учащихся с комплексными проблемами, выходящими за рамки традиционных учебных предметов [20].

1.3.6 Элективные курсы в образовательной области «Математика»

Среди школьных предметов математика занимает совершенно особое место. В середине прошлого века в старших классах отечественной школы много внимания и как следствие учебного времени уделялось математике.

Специфика преподавания математики в старших классах во многом определяется тем, что *экзамен по математике* (в данное время по алгебре и началам анализа) *является обязательным для всех школьников*. В настоящее время этот экзамен проводится в виде ЕГЭ. Единый государственный экзамен по математике – процедура серьезная, требующая специальной подготовки.

Математику, в отличие от других предметов, сдают в вузах разного профиля (математических, естественнонаучных, технических, экономических, военных, связанных с математической лингвистикой и т. д.). С введением ЕГЭ на учителя математики явно или неявно возлагается еще большая ответственность за сдачу его выпускниками вступительных экзаменов в вуз.

Из вышеизложенного можно сделать вывод, что в профильной школе математика займет весьма важное место, большинство учителей математики будут заинтересованы во введении элективных курсов.

С другой стороны, очень важен вопрос о том, какие это будут элективные курсы, как учителя распорядятся отведенным на этот элемент образовательной программы временем.

Можно прогнозировать, что очень многие учителя математики захотят, явно или неявно, использовать элективные курсы для закрепления содержания основной программы и/или подготовки учащихся к ЕГЭ.

Несмотря на это, в настоящее время основная цель образования связывается с развитием личности и ее способности к активной деятельности, хотя еще недавно основная цель овладения знаниями состояла

в основном в освоении готовых знаний, обобщении результатов созданного предшествующими поколениями. Внедрение элективных курсов, объединяющих две древнейшие науки: математику и философию. По О. Шпендлеру, «математика... есть тоже искусство».

Весь курс математики, как правило, строится на решении различных по степени важности и трудности задач. Совершенно ясно, что любую теорему тоже можно и нужно рассматривать как задачу, ее доказательство - как решение этой задачи, а различные следствия из доказательства (использование доказанного в различных областях) - как приложения этой задачи. Ученик должен чувствовать эстетическое удовлетворение от красиво решенной задачи, от установленной им возможности приложения математики к другим наукам. К этой цели стремятся авторы многих программ элективных курсов по математике [6]. Важной целью обучения на элективных курсах является знакомство учащихся с математикой как с общекультурной ценностью, выработка понимания ими того, что математика является инструментом познания окружающего мира и самого себя.

Глава 2. Методика обучения учащихся профильных классов элективному курсу «Линии второго порядка»

2.1 Сравнительный анализ учебников по геометрии для 10-11-х классов

В процессе написания работы была проанализированы учебники по геометрии Погорелова А.В. и Атанасяна Л.С. и др. с целью выявления способа введения материала в 10-11-х классах по данной теме [5,12].

Именно по этим учебникам обучаются геометрии все учащиеся школ Республики Тыва.

Такие линии как эллипс, парабола и гипербола как обязательные темы не рассматриваются. В обоих учебниках данные темы введены как избранные вопросы планиметрии. В условиях тувинских школ, где на геометрию дается 2 часа в неделю, охватить данную тему физически невозможно. В профильных классах добавляются еще один час и этого часа мало для того чтобы изучить данные темы в рамках обязательных часов. В связи с этим, необходимо ввести элективный курс, в рамках которого изучить темы «Эллипс», «Парабола», «Гипербола», то есть линии второго порядка.

В перечисленных учебниках данные темы рассмотрены в главе, которая не входит в обязательное изучение, как дополнительные вопросы.

В данных учебниках вводятся последовательно эллипс, гипербола и парабола. Эти линии вводятся как геометрические места точек. Отталкиваясь от определений, переходят к каноническим уравнениям. Далее вводятся такие понятия как эксцентриситет, для эллипса и гиперболы, и директриса для параболы, и дается понятие кривой второго порядка «как мы видим, конические уравнения эллипса, гиперболы и параболы, как и окружности $x^2+y^2=R^2$, представляют собой уравнения второй степени относительно координат x и y . Поэтому они называются кривыми второго порядка». Погорелов А.В. дает также определение кривых как конических сечений, отталкиваясь при этом от значений эксцентриситета. Но свойства эллипса, гиперболы и параболы не даются. После данного параграфа предусмотрены вопросы для первичного закрепления материала, в числе которых есть

несколько вопросов по кривым второго порядка, рассчитаны они на закрепление таких понятий как: определения эллипса, гиперболы и параболы как геометрического места точек, и связи между значением эксцентриситета и типами кривых. И данных материалов недостаточно, чтобы учащимся понять свойства и прикладное значение этих тем в окружающей жизни.

Нами дополнительно изучены и другие школьные учебники, и при разработке элективного курса эти учебники тоже были использованы:

– в учебнике геометрии за II класс автора И.М. Смирнова (*гуманитарный профиль*) переходит окружность при параллельном проектировании: **«Задача.** Выяснить, какая фигура является параллельной проекцией окружности».

– Понятие кривых второго порядка в учебнике по геометрии за 10-ый класс авторов А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И. Рыжика эллипс вводится значительно раньше гиперболы и параболы также, как это делает и И.М. Смирнова, через проекцию окружности на плоскость. В учебнике перечисляют основные свойства кривых второго порядка, но эти свойства не доказываются, а предлагается выполнить доказательство учащимся самостоятельно.

– В учебнике Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавич за II класс, под научной редакцией А.Р. Рязановского (для классов с углубленным и профильным изучением математики) материал о кривых второго порядка дается в разделе дополнение в главе «О поверхностях второго порядка», в которой дается дополнительный материал по уже ранее изученным понятиям в курсе планиметрии. В этой главе кривые второго порядка водятся «как плоские сечения конической поверхности».

Проанализировав содержание курса математики в различных учебниках, можно сказать, что данная тема не является обязательной для изучения в старшей школе. К сожалению, школьный курс не позволяет рассмотреть эти кривые детально. Исходя из вышеперечисленного, мы

считаем целесообразным создание элективного курса по теме «Кривые второго порядка».

2.2 Разработка элективного курса по теме: «Линии второго порядка»

1. Опираясь на ранее описанный материал, считаем возможным использовать следующую структуру элективного курса:

2. Познакомить с историей изучения линий;
2. Рассказать о способах образования линий;
3. Определение эллипса, параболы, гиперболы, как геометрического места точек плоскости;

4. На основе определений вывести канонические уравнения линий второго порядка;

5. Опираясь на каноническое представление показать основные свойства эллипса, гиперболы и параболы. Ввести понятия «эксцентриситет», «директриса». Сформулировать определение эллипса, гиперболы, параболы на языке директрис. Дать определение касательных к эллипсу гиперболе, параболе, формулы касательных, вывести формулы касательных. Познакомить с фокальными свойствам линий второго порядка;

6. Рассмотреть эллипс, параболу и гиперболу как конические сечения;

7. Познакомить учащихся с законами Кеплера, траекториями движения планет.

Примерное почасовое планирование

Таблица 1

№	Тема	Количество часов	
1.	История изучения линий	0,5	
2.	Способы образования линий	0,5	
3.	Эллипс. Свойства.	2	
4.	Гипербола. Свойства.	2	
5.	Парабола. Свойства.	2	
6.	Эллипс, парабола и гипербола как конические сечения	1	
7.	Законы Кеплера	1	
8.	Движения по орбитам	2	
9.	Итоговое занятие	1	

Всего 12. часов.

2.2.1. История изучения плоских линий

Понятие линии определилось в сознании человека в доисторические времена. Траектория брошенного камня, струя воды, лучи света, очертания цветов и листья растений, извилистая линия берега реки и моря и другие явления природы привлекали внимание наших предков и, наблюдаемые многократно, послужили основой для постепенного установления понятия линии.

Однако потребовался большой исторический период прежде чем люди стали сравнивать между собой формы линий и отличать одну линию от другой. Первые рисунки на стенах пещерного жилища, примитивные орнаменты, украшавшие домашнюю утварь, свидетельствуют о том, что люди научились уже не только отличать прямую от линии, но и различать формы отдельных линий и в их сочетаниях находить удовлетворение

зарождающихся эстетических потребностей. Но всё это было ещё далеко от того абстрактного понимания линии, которым располагает математика сейчас.

Правда, исторические памятники глубокой древности показывают, что у всех народов на известной ступени их развития имелось понятие окружности, не говоря уже о прямой линии. Употреблялись примитивные инструменты для построения этих линий и были попытки измерять площади, ограничиваемые прямыми и окружностью. Как видно, например, из древнейшего памятника математической культуры - «папируса Ринда», египтяне за 17 - 20 веков до начала нашей эры занимались квадратурой круга и получили довольно хорошее приближение для числа π , равное $\frac{251}{80}$, или 3,1604. Но лишь с возникновением математики как науки стало развиваться учение о линиях, достигшее в трудах греческих математиков высокого совершенства.

Греческие учёные создали теорию конических сечений - линий второго порядка, имеющих особенно большое значение в науке и технике. Открытие их приписывается Менехму (4 век до н.э.), ученику Евдокса Книдского и, как полагают, учителю Александра Македонского. Менехм определял эти линии как сечения конуса плоскостью, перпендикулярной к его образующей.

Что послужило поводом к этому открытию? Может быть, поиски решения знаменитой делосской задачи об удвоении куба, может быть практический вопрос о том, насколько должен быть вытянут овал, находящийся в качестве архитектурного сооружения на фронте здания, чтобы с известного места перед зданием он казался кругом.

Есть данные полагать, что Менехм знал свойства параболы и гиперболы, выражаемые в наши дни равенствами $y^2=2px$ и $xy=c$, и использовал эти свойства для делосской задачи удвоения куба. К сожалению, это первое сочинение по теории конических сечений было утеряно. Также не дошла до нас работа греческого геометра Аристия, написавшего пять книг о пространственных местах», из которых много заимствовал Евклид для своей (также утраченной) работы о конических сечениях.

Архимед решил задачу о квадратуре сегмента параболы. Сравнивая фигуры, вписанные в эллипс и в окружность, построенную на большой оси эллипса как на диаметре, он определил и площадь эллипса.

Однако все сведения о конических сечениях были ещё разрозненны. Первая методическая обработка конических сечений принадлежит Аполлонию Пергскому (3 - 2 в. до н.э.). Это был трактат «О конических сечениях». В своём трактате Аполлоний систематизировал всё, что было известно до него, и открыл ряд важных свойств, установил их названия.

К линиям второго порядка математическая наука обратилась только в 17 веке, в связи с созданием аналитической геометрии.

2.2.2. Способы образования линий второго порядка

Исследование особенностей формы линии второго порядка и её свойств средствами дифференциальной геометрии возможно, когда линия выражена в аналитической форме, т.е. уравнением. Однако, прежде чем исследовать уравнение линии, необходимо его составить на основании некоторых данных. Для этого надо рассмотреть способы образования линий.

1. Линия определяется как линия пересечения данной поверхности плоскостью, положение которой определено.

В истории развития учения о линиях этот способ является первым. Греки определяли линии второго порядка как сечения кругового конуса. Таково же происхождение линий Персея, получаемых в результате сечений плоскостью поверхности тора. Эвольвента круга может быть определена как линия пересечения поверхности касательных к винтовой линии, перпендикулярной к её оси и т.д.

2. Линия определяется как геометрическое место точек, обладающих данным свойством.

Этот способ особенно употребителен. Он широко практиковался ещё греческими математиками; так Евклид рассматривал конические сечения как геометрические места точек, сохраняющих постоянное отношение

расстояний от данной точки и от данной прямой. Как геометрическое место точек была определена Диоклесом его циссоида. Таким же способом определяет Никомед конхоиду. Такие линии, как овалы Декарта, овалы Кассини, улитка Паскаля, строфоида, верзиера и целый ряд других линий, определяются обычно как геометрические места.

3. Линия определяется как траектория точки, характер движения которой обусловлен тем или иным образом.

4. Линия определяется как линия, получаемая в результате того или иного геометрического преобразования уже известной линии.

Этот способ образования линий является наиболее эффективным. Он не только даёт неиссякаемые средства для определения новых линий, но и позволяет определять свойства новой линии как отражение свойств преобразуемой линии.

Мы заключим обзор различных способов, дающих средства для аналитического определения линий, ещё одним, естественным по сравнению с предыдущими, в том смысле, что составлять уравнение линии в том смысле уже не приходится, так как линия задаётся сразу же в аналитической форме и представляет собой график той или иной функции и их уравнений.

2.2.3. Эллипс.

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами. Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов принято обозначать через $2a$. По определению эллипса $2a > 2c$ или $a > c$.

При этом не исключается совпадение фокусов эллипса. Очевидно, если фокусы совпадают, то эллипс представляет собой окружность.

Пусть дан эллипс. Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы данного эллипса располагаются на оси

абсцисс симметрично относительно начала координат, то в этой системе координат уравнение данного эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$; очевидно, $a > b$. Уравнение вида (1) называется каноническим уравнением эллипса. Величины a и b называются соответственно большой и малой полуосями эллипса (наименование «большая» и «малая» объясняется тем, что $a > b$). Если полуоси эллипса a и b равны, то эллипс представляет собой окружность, радиус которой равен $R = a = b$, а центр совпадает с началом координат.

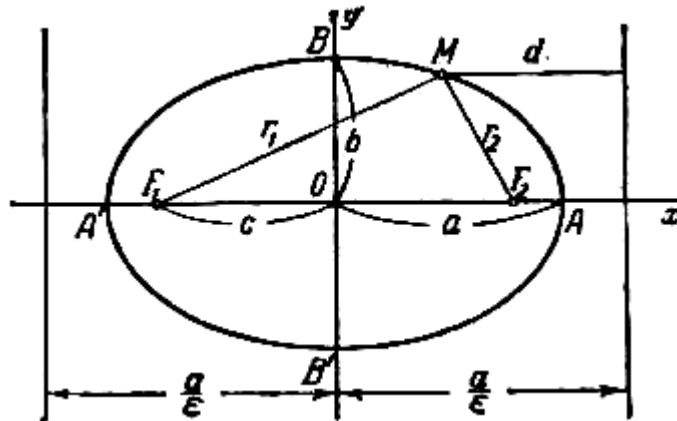


Рис. 1. Эллипс.

Свойства эллипса.

1°. Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (главные оси эллипса) и центр симметрии (центр эллипса). Действительно, в уравнении (1.) величины x и y фигурируют в четных степенях. Следовательно, если координаты x и y точки M удовлетворяют уравнению (1.) (т.е. точка M располагается на эллипсе), то этому уравнению удовлетворяют координаты $(-x, y)$ и $(x, -y)$ симметричных ей точек относительно осей координат и координаты $(-x, -y)$ точки, симметричной M относительно начала координат.

Таким образом, если эллипс задан своим каноническим уравнением (1.), то главными осями этого эллипса являются оси координат, а центром эллипса - начало координат. Точки пересечения эллипса с главными осями

называются *вершинами* эллипса. Точки A, A_1, B, B_1 на рис. 1 - вершины эллипса. Очевидно, эти вершины имеют соответственно координаты

$(-a, 0), (0, b), (a, 0), (0, -b)$.

Если эллипс представляет собой окружность, то любая прямая, проходящая через центр окружности, является осью симметрии. Отметим, что центром эллипса является точка пересечения главных осей.

Длины отрезков, образованных пересечением эллипса с главными осями, равны $2a$ и $2b$. Так как $2a > 2b$, то главная ось, образующая в пересечении с эллипсом отрезок $2a$, называется *большой осью* эллипса. Другая главная ось называется *малой осью* эллипса.

Если эллипс задан уравнением (1.4), то при $a > b$ большой осью будет ось Ox , а малой - ось Oy . При $b > a$ большой осью будет ось Oy , а малой - Ox .

Фокусы эллипса располагаются на его большой оси.

2°. Эллипс содержится внутри прямоугольника $|x| \leq a$,

$$\frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

В самом деле, из канонического уравнения (1.4) вытекает, что и , Эти неравенства очевидно, эквивалентны неравенствам $|x| \leq a$ и $|y| \leq b$.

3°. Эллипс может быть получен посредством равномерного сжатия окружности.

2.2.4. Гипербола.

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Для вывода канонического уравнения гиперболы выберем начало координат в середине отрезка F_1F_2 , а оси Ox и Oy . Пусть длина отрезка F_1F_2 равна $2c$. Тогда в выбранной системе координат точки F_1 и F_2 соответственно имеют координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ Обозначим через $2a$ постоянную, о которой говорится в определении гиперболы. Очевидно, $2a < 2c$, т. е. $a < c$.

Пусть M -точка плоскости с координатами (x, y) . Обозначим через r_1 и r_2 расстояния MF_1 и MF_2 . Согласно определению гиперболы равенство

$$|r_1 - r_2| = 2a \quad (2)$$

является необходимым и достаточным условием расположения точки M на данной гиперболе.

Используя выражения для r_1 и r_2 и соотношение (2), получим следующее необходимое и достаточное условие расположения точки M с координатами x и y на данной гиперболе:

$$\sqrt{(x + [c])^2 + y^2} - \sqrt{(x - [c])^2 + y^2} = 2a \quad (3)$$

Используя стандартный прием «уничтожения радикалов», приведем уравнение (1.8) к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4) \text{ где, } b^2 = a^2 - c^2 \quad (5)$$

Мы должны убедиться в том, что уравнение (4), полученное путем алгебраических преобразований уравнения (3), не приобрело новых корней. Для этого достаточно доказать, что для каждой точки M , координаты x и y которой удовлетворяют уравнению (4), величины r_1 и r_2 удовлетворяют соотношению (2). Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые были сделаны при выводе формул (1), найдем для интересующих нас величин r_1 и r_2 следующие выражения:

$a+$, при $x > 0$

$r_1 = -a -$, при $x < 0$ - $a+$, при $x > 0$

$r_2 = a -$, при $x < 0$ (6)

Таким образом, для рассматриваемой точки M имеем $|r_1 - r_2| = 2a$, и поэтому она располагается на гиперболе.

Уравнение (4) называется каноническим уравнением гиперболы. Величины a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы.

Свойства гиперболы

1°. Гипербола имеет две оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы). При этом одна из этих осей пересекается с гиперболой в двух точках, которые называются вершинами гиперболы. Эта ось называется действительной осью гиперболы.

Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и поэтому называется мнимой осью гиперболы.

Таким образом, мнимая ось гиперболы разделяет плоскость на правую и левую полуплоскости, в которых расположены симметричные относительно этой оси правая и левая ветви гиперболы.

Справедливость указанного свойства симметрии гиперболы вытекает из того, что в уравнении (1.9) величины x и y фигурируют в четных степенях.

Следовательно, если координаты x и y точки M удовлетворяют уравнению (4) (т.е. точка M располагается на гиперболе), то этому уравнению удовлетворяют координаты $(-x, y)$ и $(x, -y)$ симметричных ей точек относительно осей координат и координаты $(-x, -y)$ точки, симметричной M относительно начала координат.

Таким образом, если гипербола задана своим каноническим уравнением (4), то главными осями этой гиперболы являются оси координат, а центром гиперболы - начало координат.

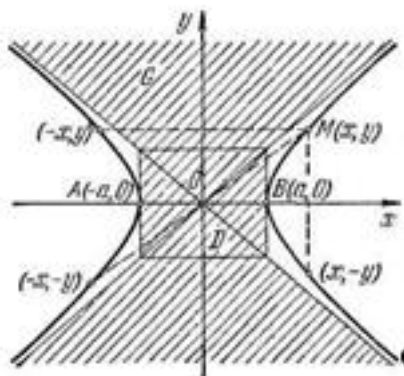


Рис 2. Гипербола

2.2.5. Парабола.

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости

равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, также расположенной в рассматриваемой плоскости.

Указанная в определении точка F называется *фокусом параболы*, а фиксированная прямая - директрисой параболы (Слово директриса означает направляющая).

Для вывода канонического уравнения параболы выберем начало O декартовой системы координат в середине отрезка FD , представляющего собой перпендикуляр, опущенный из фокуса F на директрису (при этом фокус F не лежит на директрисе, ибо в противном случае точки плоскости, для которых были бы выполнены условия определения параболы, располагались на прямой, проходящей через F перпендикулярно директрисе, т. е. парабола выродилась бы в прямую.), а оси Ox и Oy

Пусть длина отрезка FD равна p . Тогда в выбранной системе координат точка F имеет координаты $(0, p)$. Пусть M - точка плоскости с координатами (x, y) . Обозначим через r расстояние от M до F , а через d - расстояние от M до директрисы. Согласно определению параболы равенство $r=d$ (1.12) является необходимым и достаточным условием расположения точки M на данной параболе. Так как

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x \quad (7)$$

Свойства параболы

1°. Парабола имеет только одну ось симметрии (ось параболы), в отличие от эллипса и гиперболы. Точка пересечения параболы с осью называется вершиной параболы. Действительно, в уравнении (7) величина y фигурирует в четной степени. Следовательно, если координаты x и y точки M удовлетворяют уравнению (7) (т. е. точка M располагается на параболе), то этому уравнению удовлетворяют координаты $(x, -y)$ симметричной ей точки относительно оси Ox . Таким образом, если парабола задана своим каноническим уравнением (7), то осью этой параболы является ось Ox . Очевидно, вершиной параболы является начало координат.

2°. Вся парабола расположена в правой полуплоскости плоскости Oxy . В самом деле, так как $p > 0$, то уравнению (7) удовлетворяют координаты точек лишь с неотрицательными абсциссами. Такие точки располагаются в правой

полуплоскости.

3°. Из рассуждений вытекает, что директриса параболы, определяемой каноническим уравнением (7), имеет уравнение $y = -\frac{p}{2}$ (8)

4°. Любые две параболы подобны друг другу. Пусть $y^2 = 2px$ и $y^2 = 2p^*x$ - канонические уравнения этих парабол в декартовой системе Oxy , $y=kx$ - уравнение произвольной прямой, проходящей через O , а (x, y) и (x^*, y^*) - координаты точек пересечения этой прямой с параболой. Используя

канонические уравнения, получим $x = \frac{2p}{k^2}, y = \pm \frac{2p}{k}, x^* = \frac{2p^*}{k^2}, y = \pm \frac{2p^*}{k}$

Из последних формул вытекает, что $\frac{x}{x^*} = \frac{p}{p^*}, \frac{y}{y^*} = \frac{p}{p^*}$, эти равенства означают подобие рассматриваемых парабол относительно точки O .

5°. Отметим, что кривая $y^2 = 2px$ при $p < 0$ также является параболой, которая целиком располагается в левой полуплоскости плоскости Oxy . Чтобы убедиться в этом, достаточно заменить x на $-x$ и $-p$ на p

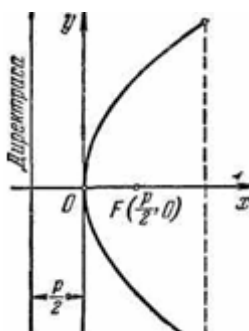


Рис.3. Парабола

2.2.6. Директрисы эллипса, гиперболы и параболы

Определение параболы, базировалось на свойстве этой кривой, которое связано с ее фокусом и директрисой. Это свойство можно сформулировать также и следующим образом: парабола есть геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы есть величина постоянная, равная единице.

Оказывается, отличный от окружности эллипс и гипербола обладают аналогичным свойством: для каждого фокуса эллипса или гиперболы можно указать такую прямую, называемую директрисой, что отношение расстояния от точек этих кривых до фокуса к расстоянию до отвечающей этому фокусу директрисы есть величина постоянная.

1. *Эксцентриситет эллипса и гиперболы.* Обратимся к эллипсу (гиперболе). Пусть c - половина расстояния между фокусами эллипса (гиперболы), a - большая полуось эллипса (действительная полуось гиперболы).

Определение. Эксцентриситетом эллипса (гиперболы) называется величина e , равная $\frac{c}{a}$

$$e = \frac{c}{a} \quad (9)$$

1°. *Директрисы эллипса.* Мы выяснили, что любой, отличный от окружности, эллипс имеет большую и малую оси и центр - точку пересечения этих осей. Обозначим через c половину расстояния между фокусами F_1 и F_2 эллипса, через a его большую полуось и через O его центр (4).

Пусть e - эксцентриситет этого эллипса (так как эллипс отличен от окружности, то $e \neq 0$) и π - плоскость, в которой расположен эллипс. Малая ось эллипса разбивает эту плоскость на две полуплоскости. Обозначим через π_i ($i=1, 2$) ту из этих полуплоскостей, в которой лежит фокус F_i ($i=1, 2$).

Определение. Директрисой D_i ($i=1, 2$) эллипса, отвечающей фокусу F_i ($i=1,2$), называется прямая, расположенная в полуплоскости π_i ($i = 1,2$) перпендикулярно большой оси эллипса на расстоянии $\frac{a}{e}$ от его центра.

Выберем начало декартовой прямоугольной системы координат в середине отрезка F_1F_2 . а оси Ox и Oy направим так, как указано на рис. 6.10.

Тогда, очевидно, уравнения директрис D_i ($i=1,2$) эллипса можно записать следующим образом:

$$\text{уравнение директрисы } D_1: x = -\frac{a}{e}$$

$$\text{уравнение директрисы } D_2: x = \frac{a}{e}$$

Директрисы эллипса расположены вне эллипса. Действительно, эллипс расположен в прямоугольнике $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ стороны которого перпендикулярны большой и малой осям эллипса.

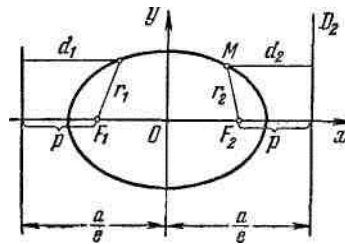


Рис. 4. Директрисы эллипса

Из определения директрис вытекает, что они параллельны двум перпендикулярным большой оси эллипса сторонам этого прямоугольника. Поскольку упомянутые стороны отстоят от центра эллипса на расстоянии a , а

директрисы - на расстоянии $\frac{a}{e} > a$ ($0 < e < 1$), то директрисы расположены вне прямоугольника, а следовательно, и вне эллипса.

Как мы только что выяснили, директрисы расположены вне эллипса. Отсюда вытекает, что точки эллипса и его центр расположены по одну сторону от каждой из его директрис.

Обозначим через p расстояние от фокуса эллипса до соответствующей этому фокусу директрисы. Поскольку расстояние от центра эллипса до

директрисы равно $\frac{a}{e}$ а расстояние от центра эллипса до фокуса равно c , то p

равно $\frac{a}{e} - c$. Так как $c = ae$, то для p получаем следующее выражение

$$p = a\left(\frac{1}{e} - e\right) = a \cdot \frac{1-e^2}{e} \quad (10)$$

Директрисы гиперболы. Обозначим через c половину расстояния между фокусами F_1 и F_2 гиперболы, через a ее действительную полуось и через O ее центр (рис.5). Пусть e - эксцентриситет этой гиперболы и π плоскость, в которой расположена гипербола. Мнимая ось гиперболы разбивает эту плоскость на две полуплоскости. Обозначим через π_i , ($i=1,2$) ту из этих полуплоскостей, в которой лежит фокус F_i ($i=1,2$).

Определение. Директрисой D_i ($i=1,2$) гиперболы, отвечающей фокусу F_i ($i=1,2$), называется прямая, расположенная в полуплоскости π_i ($i=1,2$) перпендикулярно действительной оси гиперболы на расстоянии $\frac{a}{e}$ от ее центра.

Выберем начало декартовой прямоугольной системы координат в середине отрезка F_1F_2 , а оси Ox и Oy направим так, как указано на рис. 5. Тогда, очевидно, уравнения директрис D_i ($i=1,2$) гиперболы можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{уравнение директрисы } D_1: \\ x = -\frac{a}{e} \\ x = \frac{a}{e} \end{array} \right\}$$

уравнение директрисы D_2 :

(11)

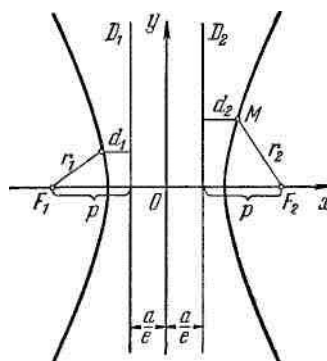


Рис. 5. Директрисы гиперболы.

Директрисы гиперболы целиком расположены в области G , не содержащей точек. В самом деле, ранее мы убедились, что полоса G_1 определяемая в выбранной системе координат Oxy неравенством $|x| < a$, содержится в области G . Но эта полоса содержит директрисы гиперболы, так как, согласно (11), для точек директрис $|x| = \frac{a}{e} < a$, либо для гиперболы $e > 1$. Расположение директрис гиперболы указано на рис.5. Следовательно, мы можем обосновать расположение директрис гиперболы, указанное на рис. 5. Очевидно, что точки левой (правой) ветви гиперболы и ее центр O расположены по разные стороны от директрисы D_1 (D_2), а точки правой (левой) ветви гиперболы и ее центр O расположены по одну сторону от директрисы D_1 (D_2).

Обозначим через p расстояние от фокуса гиперболы до соответствующей этому фокусу директрисы. Поскольку расстояние от центра гиперболы до директрисы равно $\frac{a}{e}$ а расстояние от центра гиперболы до фокуса равно c , то $p = c - \frac{a}{e}$. Так как $c = ae$, то для p получаем формулу

$$p = a(e - \frac{1}{e}) = a \frac{e^2 - 1}{e} \quad (12)$$

2.2.7. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе

1. Уравнения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе. Убедимся, что каждая из кривых L , являющаяся эллипсом, гиперболой или параболой, представляет собой объединение графиков двух функций. Рассмотрим, например, каноническое уравнение эллипса. Из этого уравнения следует, что часть эллипса, точки которой имеют неотрицательные ординаты y , есть график функции.

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \text{ при } -a \leq x \leq a \quad (13)$$

а часть эллипса, точки которой имеют неположительные ординаты, есть график функции

$$y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \text{ при } -a \leq x \leq a. \quad (14)$$

Обращаясь к каноническому уравнению гиперболы (1.9), найдем, что гипербола представляет собой объединение графиков функций

$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \quad \text{и} \quad y = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \text{ при } x \geq a \text{ и } x \leq -a \quad (15)$$

а из канонического уравнения параболы (1.15) вытекает, что эта кривая есть объединение графиков функций

$$y = \sqrt{2px} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{2px} \quad \text{при } x \geq 0 \quad (16)$$

Рассмотрим теперь вопрос о касательных к эллипсу, гиперболе и параболе. Естественно, что касательные к этим кривым, будут также касательными к графикам функций. Найдем, уравнение касательной к эллипсу в его точке $M(x, y)$, считая при этом $y \neq 0$ (пусть, $y > 0$). Пусть X, Y - текущие координаты точки касательной. Так как ее угловой коэффициент $k = y'$

$$\text{где } y' = -\frac{xb}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

производная функции (1,51), вычисленная в точке x , то уравнение касательной имеет вид

$$Y - y = -\frac{xb}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}(X - x) \quad (17)$$

Учитывая, что точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе (т. е ее координаты x и y удовлетворяют уравнениям (1.51) и (1.4)), получим, после несложных преобразований, уравнение касательной к эллипсу в следующей форме-

$$\text{для эллипса } \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1 \quad (18)$$

Рассуждая аналогично для случая гиперболы и параболы, получим следующие уравнения касательных к этим кривым:

$$\text{для гиперболы } \frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$$

для параболы $Yy = p(X + x)$ В предыдущих рассуждениях был исключен случай $y=0$. В соответствующих точках эллипса, гиперболы и параболы касательные вертикальны. Легко убедиться, что уравнения (17) справедливы и в этом случае. Отметим, что касательная к эллипсу имеет с ним только одну общую точку - точку касания. Аналогичным свойством обладают касательные к гиперболе и параболе.

2.2.8. Фокальные свойства

Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы. Установим следующее оптическое свойство эллипса: лучи света, исходящие из одного фокуса F_1 эллипса после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус F_2 (рис. 6). Геометрически указанное свойство означает, что отрезки MF_1 и MF_2 образуют с касательной в точке M эллипса равные углы.

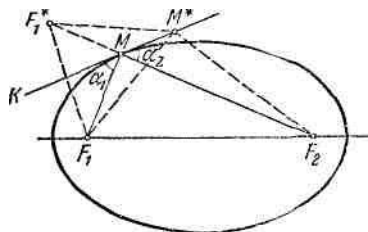


Рис. 6

Допустим, что эллипс не обладает указанным свойством, т. е $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (рис.6). Пусть F_1^* - зеркальное отражение фокуса F_1 относительно касательной

K в точке M . Соединим F_1^* с M и F_2 . Так как $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то точка M^* пересечения прямой $F_1^* F_2$ с касательной K не совпадает с точкой M . Поэтому $|F_1 M^*| + |F_2 M^*| = |F_1^* F_2| < |F_1 M| + |F_2 M| = 2a$. (1.59)

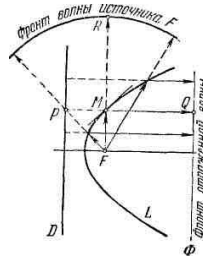


Рис. 7

Будем теперь перемещать точку M^* по касательной K от точки M . При таком перемещении сумма $|F_1 M^*| + |F_2 M^*|$ неограниченно увеличивается. В начальный момент перемещения эта сумма, согласно (1.59), была меньше $2a$. Поэтому в некоторый момент эта сумма будет равна $2a$, а это означает, что на касательной K , кроме точки M , будет еще одна точка M^* эллипса, отличная от M , но этого не может быть. Таким образом, указанное выше свойство эллипса действительно справедливо.

Совершенно аналогично устанавливаются следующие оптические свойства гиперболы и параболы: лучи света, исходящие из одного фокуса F_1 гиперболы, после зеркального отражения от гиперболы кажутся исходящими из другого ее фокуса F_2 (рис.8)



Рис.8

1. лучи света, исходящие из фокуса параболы, после зеркального отражения от параболы образуют пучок, параллельный оси параболы (рис.8)

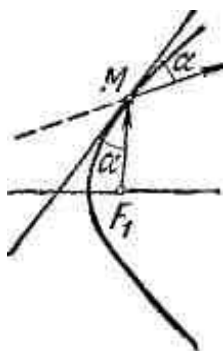


Рис. 9

Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы широко используются в инженерном деле. В частности, оптическое свойство параболы используется при конструировании прожекторов, антенн и телескопов.

Назовем *фронтом волны точечного источника* света F линию, для всех точек Q которой путь, проделанный световым лучом, пришедшим из источника F в точку Q , одинаков. Если волна, вышедшая из точечного источника F , не претерпевает отражений, то фронт ее, очевидно, будет представлять собой окружность. Если же указанная волна отражается от некоторой кривой L , то форма ее фронта меняется в зависимости от вида кривой L . Парабола обладает следующим замечательным свойством- *фронт* Φ отраженной от параболы волны, при условии расположения источника света в фокусе F параболы, представляет собой прямую, параллельную директрисе D этой параболы (рис.7).

В самом деле, рассмотрим прямую Φ , параллельную директрисе D . Пусть Q - произвольная точка этой прямой. Из оптического свойства параболы вытекает, что, если FM падающий луч, приходящий после отражения в точку Q , то отраженный луч MQ перпендикулярен директрисе D . Обозначим через P точку пересечения луча MQ с директрисой D . Очевидно, сумма $|QM| + |MF|$ равна $|QM| + |MP|$ (по определению параболы). Так как $|QM| + |MP| = d$, где d - не зависящее от точки Q расстояние между прямыми Φ и D , то для любой точки Q линии Φ сумма $|QM| + |MF|$ одна и та же (равна d) т. е. Φ -фронт отраженной волны.

2.2.9. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения

Эллипс, гипербола и парабола были известны греческим геометрам более 2000 лет назад. Первое, наиболее полное сочинение, посвященное этим кривым, принадлежит Аполлонию и относится к III веку до начала нашего летоисчисления. Аполлоний дал и названия этим кривым в связи с геометрической задачей о превращении данного прямоугольника в равновеликий прямоугольник с заданным основанием.

Древнегреческие математики изучали эти кривые, конечно, не при помощи аналитической геометрии, еще не существовавшей в ту эпоху, а методами той, уже широко в то время разработанной геометрии, которую теперь называют элементарной. Сами эти кривые первоначально греки получили как сечения прямого круглого конуса плоскостями, наклоненными под разными углами к его оси.

Проведем через центр окружности перпендикуляр к ее плоскости и возьмем на нем точку S . Прямые, соединяющие S с точками окружности, образуют конус. Рассмотрим сначала сечение конуса плоскостью π , пересекающей все его образующие и не перпендикулярной оси симметрии.

Впишем в конус два шара, касающиеся плоскости π в точках F_1 и F_2 (рис. 10)

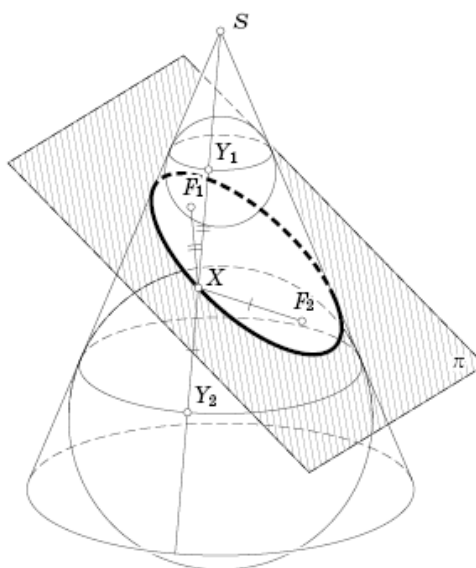


Рис. 1

Рис. 10

Пусть X – произвольная точка на линии пересечения конуса с плоскостью π . Проведем через X образующую SX и найдем точки Y_1, Y_2 ее пересечения с вписанными шарами. Тогда $XF_1=XY_1$, $XF_2=XY_2$ как отрезки касательных к шарам, проведенных из одной точки.

Следовательно, $XF_1 + XF_2 = Y_1Y_2$. Но Y_1Y_2 – это отрезок образующей, заключенный между двумя плоскостями, перпендикулярными оси конуса, и его длина не зависит от выбора точки X . Значит, линия пересечения конуса с плоскостью π является эллипсом. Отношение его полуосей зависит от наклона секущей плоскости и, очевидно, может принимать любые значения. Следовательно, любой эллипс может быть получен как центральная проекция окружности.

Аналогично доказывается, что если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса, то в сечении получается гипербола (рис. 11).

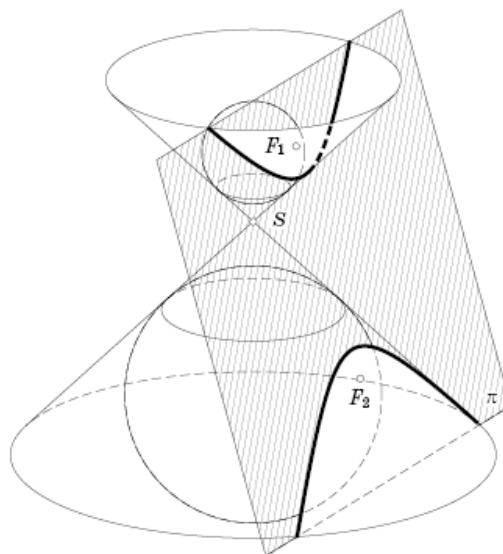


Рис. 2

Рис. 11

Наконец, рассмотрим случай, когда секущая плоскость параллельна одной образующей. Впишем в конус сферу, касающуюся этой плоскости π в точке F . Эта сфера касается конуса по окружности, лежащей в плоскости σ (рис.12).

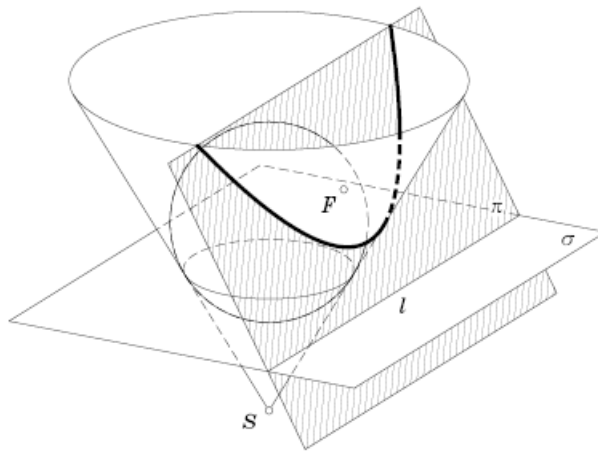


Рис. 3

Рис. 12

Обозначим через l линию пересечения плоскостей π и σ . Возьмем произвольную точку X сечения конуса плоскостью π и найдем точку Y пересечения образующей SX с плоскостью σ и проекцию Z точки X на прямую l . Тогда $XF = XY$ как касательные к сфере. С другой стороны, точки Y и Z лежат в плоскости σ , угол между XY и σ равен углу между образующей конуса и плоскостью, перпендикулярной его оси, а угол между XZ и σ – углу между плоскостями π и σ . В силу выбора плоскости π эти углы равны. Значит, $XY = XZ$ как наклонные, образующие равные углы с плоскостью σ . Следовательно, $XF = XZ$, и точка X лежит на параболе с фокусом F и директрисой l .

Таким образом, всякая невырожденная кривая второго порядка может быть получена как сечение конуса. Поэтому такие кривые называют также коническими сечениями.

Надо сказать, что если вместо конуса будет цилиндр, то абсолютно такими же рассуждениями можно показать, что его сечением будет эллипс. Соответственно, эллипс может быть получен как параллельная проекция окружности.

Сферы, вписанные в конус и касающиеся секущей плоскости, называются сферами Данделена.

2.2.10. Законы Кеплера

В этом пункте рассмотрим приложение линий второго порядка в физике.

Эти три закона движения планет относительно Солнца были выведены эмпирически немецким астрономом И.Кеплером в начале 17 века и поэтому названы законами Кеплера. Они сыграли большую роль в установлении И.Ньютоном закона всемирного тяготения и вошли в небесную механику в обобщенном и уточненном виде. В такой форме они описывают орбиты двух гравитационно - связанных небесных тел при отсутствии возмущений со стороны других тел (т.н. задача двух тел). Формулировка законов Кеплера в общем случае приведена далее:

1-й закон. В невозмущенном движении орбита движущегося тела есть кривая второго порядка (эллипс, парабола или гипербола), в одном из фокусов которой находится центр силы притяжения (или центр масс системы).

2-й закон (закон равных площадей). В невозмущенном движении площадь, описываемая радиус-вектором движущегося тела, измеряется пропорционально времени (в равные промежутки времени описывает равные площади).

3-й закон. В отличие от двух первых, применим только к эллиптическим орбитам. В обобщенном виде обычно формулируется так: квадраты периодов T_1 и T_2 обращения двух тел вокруг Солнца, помноженные на сумму масс каждого тела (соответственно M_1 и M_2), и Солнца (M_S), относятся как кубы больших полуосей a_1 и a_2 их орбит:

$$\frac{T_1^2 * (M_1 + M_S)}{T_2^2 * (M_2 + M_S)} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (19)$$

Однако необходимо сделать одно замечание. Для простоты часто говорится, что одно тело обращается вокруг другого, но это справедливо только для случая, когда масса первого тела пренебрежимо мала по сравнению с массой второго (притягивающего центра). Если же массы сравнимы, то следует учитывать и влияние менее массивного тела на более массивное. В системе координат с началом в центре масс орбиты обеих тел будут коническими сечениями, лежащими в одной плоскости и с фокусами в центре масс, с одинаковым эксцентриситетом. Различие будет только в линейных размерах орбит (если тела разной массы). Причем в любой момент времени центр масс будет лежать на прямой, соединяющей центры тел, а их расстояния до центра масс r_1 и r_2 тел массой соответственно M_1 и M_2 связаны

следующим соотношением: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{M_2}{M_1}$ Перицентры и апоцентры (если орбиты замкнутые) своих орбит тела будут также проходить одновременно.

2.2.11. Практические задания

2.2.11.1 Материал для закрепления материала по теме «Эллипс»

Упражнение 1. Докажите, что сумма расстояний от любой точки лежащей во внутренней области, ограниченной эллипсом до фокусов эллипса меньше, а от точки лежащей во внешней области эллипса больше длины большой оси.

Решение. Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2 , а точку через X . Точку пересечения луча F_1X с эллипсом обозначим через Y . Пусть сначала точка X лежит во внутренней области эллипса. По неравенству треугольника $F_2X < XY + YF_2$, а значит, $F_1X + XF_2 < F_1X + XY + YF_2 = F_1Y + F_2Y$. (рис. 13)

Но $F_1Y + F_2Y$ равно длине веревки, т. е. большой оси эллипса. Рассуждая аналогично в случае, если точка X лежит вне эллипса, получаем

$F_2Y < XY + XF_2$. Следовательно, $F_1X + XF_2 = F_1Y + YX + XF_2 > F_1Y + F_2Y$.

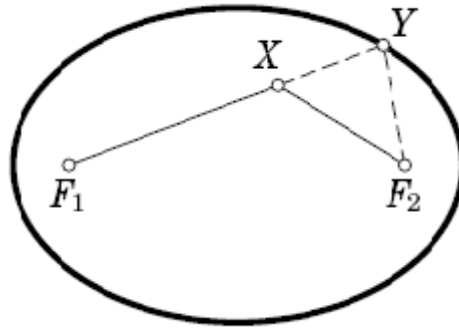


Рис. 13

Упражнение 2. Найдите геометрическое место середин хорд эллипса, параллельных данному направлению.

Решение. Рассмотрим эллипс как параллельную проекцию окружности. Тогда параллельным хордам эллипса и их серединам соответствуют параллельные хорды окружности и их середины, лежащие на диаметре окружности. Следовательно, геометрическим местом середин параллельных хорд эллипса также будет некоторый его диаметр (хорда, проходящая через центр).

Упражнение 3. С помощью циркуля и линейки найдите фокусы данного эллипса.

Решение. Построим две параллельные хорды эллипса. По предыдущему упражнению прямая, соединяющая их середины, является диаметром эллипса. Построив таким образом два диаметра, мы найдем центр эллипса O . В силу симметрии эллипса окружность с центром O пересекает эллипс в четырех точках, образующих прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса. Теперь фокусы эллипса можно найти как точки пересечения большой оси и окружности с центром в конце малой оси и радиусом, равным большой полуоси.

Задачи:

1. Дано уравнение а) $3x^2 + y^2 = 7$. Изобразить эллипс двумя способами.

I способ:

Запишем его в виде $(\sqrt{3})^2 x^2 + y^2 = (\sqrt{7})^2$. Устанавливаем, что $R = \sqrt{7}, k = \sqrt{3} > 1$, строим осевой прямоугольник со сторонами $2R$, $2k$ и изображаем сам эллипс (рис. 5). Отметим, что в правой части уравнения должно быть положительное число, а в левой – сумма квадрата абсциссы, взятого с положительным коэффициентом, и квадрата ординаты.

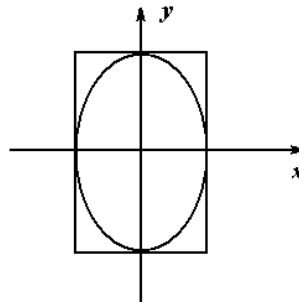


Рис. 14

II способ

Приведём уравнение к каноническому виду.

Разделим обе его части на 7.

$$\frac{(\sqrt{3})^2 x^2}{7} + \frac{y^2}{7} = 1, \quad \frac{x^2}{\frac{7}{3}} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

Получим, что $a = \sqrt{\frac{7}{3}}, b = \sqrt{7}$.

Строим осевой прямоугольник со сторонами a и $2b$, а затем изображаем эллипс.

Отметим, что, например, уравнение $3x^2 + 5y^2 = 7$ следует сначала

преобразовать к виду $x^2 + y^2 = \frac{7}{5}$ или $\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = 1$, а затем находить R , k и a , b соответственно.

Если центр эллипса находится не в начале координат, но его оси параллельны координатным осям, то он задаётся уравнением $k^2(x-a)^2 + k^2(y-b)^2 = R^2$ (4), где $C(a; b)$ – центр эллипса. Это легко следует из формул параллельного переноса, или каноническим уравнением

$$\frac{(x-x')^2}{a^2} + \frac{(y-y')^2}{b^2} = 1 \quad (5) - C(x; y) - \text{центр эллипса.}$$

Данного материала достаточно для построения эллипса в том случае, если он задан уравнением, содержащем как квадраты, так и первые степени переменных.

б) Построить график $4x^2 - 40x + 9y^2 + 72y + 208 = 0$.

1 способ

Преобразуем к виду (4): $\frac{4}{9}(x-5)^2 + (x+4)^2 = 4$.

Это уравнение эллипса с центром в точке $C(5; -4)$, где $k = \frac{2}{3}$, $R = 2$, $\frac{R}{k} = 3$ (рис. 15)

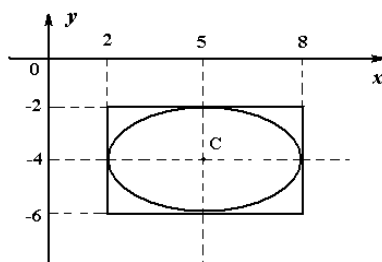


Рис. 15

II способ

Преобразуем к виду (5): $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1$. Получили уравнение эллипса с центром в точке $C(5; -4)$, где $a = 3$, $b = 2$.

Строим сам эллипс.

2. Найти длины полуосей и координаты фокусов следующих эллипсов:

а) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

Приводим уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $a = 3$, $b = 2$.

Фокусы F_1 и F_2 имеют координаты $F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$.

$$c^2 = a^2 - b^2, c = \sqrt{a^2 - b^2}, c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Итак, $F_1(\sqrt{5}; 0)$ и $F_2(-\sqrt{5}; 0)$ $a = 3$, $b = 2$.

б) $x^2 + 9y^2 = 9$.

Решаем аналогично а). $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$, $a = 3$, $b = 1$.

$$F_1(c; 0), F_2(-c; 0). c^2 = a^2 - b^2, c = \sqrt{a^2 - b^2}, c = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}.$$

Итак, $F_1(2\sqrt{2}; 0)$ и $F_2(-2\sqrt{2}; 0)$ $a = 3$, $b = 1$.

в) $9x^2 + 25y^2 = 1$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1, a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{5}.$$

$$F_1(c; 0), F_2(-c; 0): c = \sqrt{a^2 - b^2}, c = \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{16}{225}} = \sqrt{\frac{4}{15}}.$$

Итак, $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{5}$, $F_1(\sqrt{\frac{4}{15}}; 0)$, $F_2(-\sqrt{\frac{4}{15}}; 0)$.

3. Найти координаты точек M , принадлежащих эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и равноудалённых от фокусов.}$$

Пусть $M(x; y)$, тогда $MF_1 = MF_2$ (по условию). Т. к. $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ то } (x - c)^2 + (y - 0)^2 = (x + c)^2 + (y + 0)^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 = x^2 + 2xc + c^2, x = 0.$$

Если $x = 0$, то, подставляя его в исходное уравнение, получим: $\frac{y^2}{b^2} = 1$,

$$y = \pm b. \text{ Следовательно, } M_1(0; b) \text{ и } M_2(0; -b).$$

4. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить области, определяемые следующими системами неравенств.

$$\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 - 225 < 0, \\ 3x + 5y - 15 < 0, \\ y + 2 > 0 \end{cases}$$

а)

Построим множество точек, определяемых 1-м, 2-м, 3-м неравенством.

Найдём пересечение этих множеств.

I. Построим эллипс $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$, но т. к. неравенство строгое, то точки эллипса не принадлежат искомой области, т.е. неравенство (2) задаёт внутренние точки эллипса.

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0,$$

$$\frac{9}{25}x^2 + y^2 = 9,$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 x^2 + y^2 = 3^2$$

Устанавливаем, что $R = 3$, $k = \frac{3}{5}$ ($0 < k < 1$), $\frac{R}{k} = 5$. Строим осевой

прямоугольник со сторонами $2R, 2\frac{R}{k}$ и изображаем эллипс.

II. Строим множество точек, заданных вторым неравенством. Для

этого строим прямую $y = \frac{15 - 3x}{5}$ и штрихуем определяемую область.

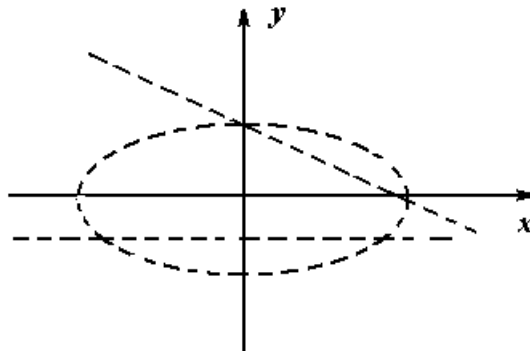


Рис. 16

III. Аналогичные рассуждения для построения области, заданной неравенством $y + 2 > 0$.

Построение.

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 > 0, \\ y + 3 > 0, \\ x + y - 2 < 0 \end{cases}$$

Построим множество точек, определяемых 1-м, 2-м, и 3-м неравенствами.

Найдём пересечение этих множеств.

I. $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ – эллипс, точки которого не принадлежат искомой области (неравенство строгое), т.е. неравенство задаёт внешние точки эллипса. Приведём уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = 4, b = 2.$$

Строим осевой прямоугольник со сторонами a и b , изображаем эллипс.

II. Строим множество точек, заданных неравенством (2). Для этого изображаем прямую $y = 3$ и штрихуем определяемую область.

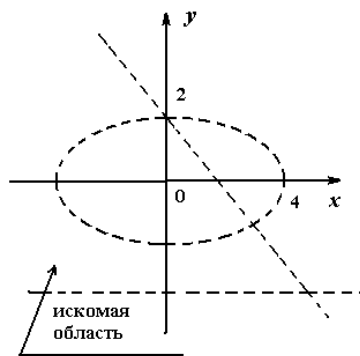


Рис. 17

5. Определить вид и расположение кривой $x^2 + 2y^2 - 2x + 3y = 0$.

Решение. Дополним члены, содержащие x и y соответственно, до полных квадратов:

$$(x-1)^2 + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{8}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{17}{8}} + \frac{\left(y + \frac{3}{4}\right)^2}{\frac{17}{16}} = 1.$$

Следовательно, кривая, заданная исходным уравнением, представляет

собой эллипс с полуосями $a = \sqrt{\frac{17}{8}} \approx 1.46$ и $b = \sqrt{\frac{17}{16}} \approx 1.03$.

Центр эллипса находится в точке $O'(1, -\frac{3}{4})$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти уравнения множества точек, для каждой из которых сумма расстояний от двух точек $F_1(4,0)$ и $F_2(-4,0)$ равна 10.
2. Длина большой полуоси эллипса равна 6, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$, а расстояние точки M эллипса до фокуса F_1 равно 7. Вычислить расстояние точки M до фокуса F_2 и координаты точки M . Написать каноническое уравнение эллипса.
3. В каждом из следующих случаев составить каноническое уравнение эллипса: а) $a=10$, $b=6$; б) $a+b=9$, $c=3$; в) $a=6$, $c=4$. Здесь a -большая полуось эллипса, b -малая, а $c=\sqrt{a^2 - b^2}$.

4. Найдите длины полуосей и координаты фокусов следующих эллипсов:

a. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

b. $4x^2 + 144y^2 - 576 = 0$

5. Найти точки, принадлежащему эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, абсциссы которых равны: а)2; б)3; в)1.

6. Написать уравнение директрис эллипса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$ и найти расстояние между ними.

7. Составить уравнение эллипса, если расстояние между директрисами равно 12, а большая ось равна $2\sqrt{3}$;

8. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить области, определяемые следующими системами неравенств:

a)
$$\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 - 225 < 0 \\ 3x + 5y - 15 < 0 \\ y + 2 > 0 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 > 0 \\ y + 3 > 0 \\ x + y - 2 < 0 \end{cases}$$

2.2.11.2 Материал для закрепления материала по теме «Гипербола»

Упражнение 1: Сформулируйте и докажите для гиперболы утверждения, аналогичные утверждению из упражнения 1 из темы эллипс.

Решение.

В случае с гиперболой это утверждение формулируется следующим образом: пусть модуль разности расстояний от любой точки на гиперболе до фокусов F_1 и F_2 равен d . Обозначим дугу гиперболы, внутри которой лежит F_1 , через Γ . Тогда для точек X вне Γ величина $XF_2 - XF_1$ меньше d , а во внутренней области – больше. Пусть точка X лежит во внутренней области, отсекаемой дугой Γ . Обозначим точку пересечения луча F_2X и Γ через Y . Получаем, что $F_2X = F_2Y + YX$. По неравенству треугольника $F_1X < F_1Y + YX$, значит, $F_2X - F_1X > (F_2Y + YX) - (F_1Y + YX) = F_2Y - F_1Y = d$. Если же точка X лежит вне Γ , то, взяв за точку Y пересечение F_1X и Γ , получим $F_1X = F_1Y + YX$. По

неравенству треугольника $F_2X < F_2Y + YX$. Следовательно,
 $F_2X - F_1X < (F_2Y + YX) - (F_1Y + YX) = F_2Y - F_1Y = d$. (рис. 18)

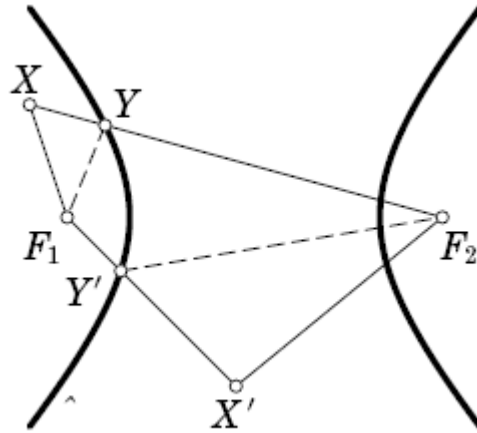


Рис. 18

Упражнение 2. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных.

Решение. Рассмотрим для определенности случай, когда окружности с центрами O_1 , O_2 и радиусами r_1 , r_2 лежат одна вне другой. Если окружность с центром O и радиусом r касается обеих окружностей внешним образом, то $OO_1 = r + r_1$, $OO_2 = r + r_2$ и, значит, $OO_1 - OO_2 = r_1 - r_2$, т. е. O лежит на одной из ветвей гиперболы с фокусами O_1 , O_2 . Аналогично если окружность касается обеих данных внутренним образом, то ее центр лежит на другой ветви этой гиперболы. Если же одно из касаний внешнее, а другое внутреннее, то модуль разности расстояний OO_1 и OO_2 равен $r_1 + r_2$, т. е. O описывает другую гиперболу с теми же фокусами. Аналогично если одна окружность лежит внутри другой, то искомое ГМТ состоит из двух эллипсов с фокусами O_1 , O_2 и большими осями, равными $r_1 + r_2$ и $r_1 - r_2$. Случай пересекающихся окружностей разберите самостоятельно.

Упражнение 3. Сформулируйте и докажите оптическое свойство гиперболы.

Решение:

Сформулируем оптическое свойство для гиперболы.

Если прямая l касается гиперболы в точке P , то l является биссектрисой угла $F_1 P F_2$, где F_1 и F_2 – фокусы гиперболы .

Предположим, что биссектриса l' угла $F_1 P F_2$ пересекает гиперболу еще в какой-нибудь точке Q (лежащей на той же дуге, что и P). Для удобства будем считать, что точка P лежит на дуге, которая ближе к фокусу F_1 . Обозначим через F_1' точку, симметричную F_1 относительно l' . Тогда $F_1 Q = Q F_1'$, $F_1 P = P F_1'$; кроме того, точки F_2 , F_1' и P лежат на одной прямой. Итак, $F_2 P - P F_1 = F_2 Q - Q F_1$. В силу вышеуказанных равенств получаем $F_2 F_1 = F_2 P - P F_1 = F_2 Q - Q F_1$. Но по неравенству треугольника $F_2 F_1 > F_2 Q - Q F_1$.

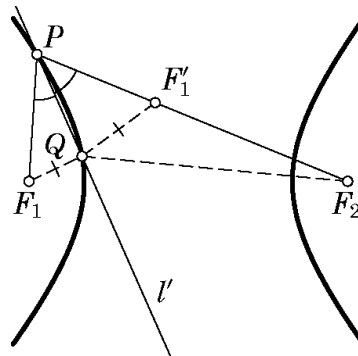


Рис. 19

Задачи:

1. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Решение. Приведем данное уравнение к каноническому виду (разделив его на 144):

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отсюда следует, что $a^2=16$, $b^2=9$. Следовательно, $a=4$ -действительная полуось, $b=3$ - мнимая полуось. Тогда $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = \pm 5$. Значит,

фокусы имеют координаты $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$. Находим

эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$. Уравнения асимптот имеют вид $y = \pm \frac{3}{4}x$, а уравнения директрис. Построить графики.

$$a) 3x^2 - 5y^2 + 4 = 0$$

I способ.

Это уравнение равносильно уравнению $\frac{3}{5}x^2 - y^2 = -\frac{4}{5}$. Поскольку $l < 0$, то вершины гиперболы расположены на оси Oy . Гипербола неравнобокая,

т. к. $k = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Строим осевой прямоугольник со сторонами $2\sqrt{l}$ и $2\frac{a}{c}$, где

$$l = -\frac{4}{5}, \quad \frac{\sqrt{|l|}}{k} = \frac{\sqrt{4/5}}{\sqrt{3/5}} = \sqrt{\frac{4}{3}}. \text{ Чертим график гиперболы.}$$

II. способ

Приведём уравнение к каноническому виду

$3x^2 - 5y^2 + 4 = 0$, $\frac{x^2}{\frac{4}{3}} - \frac{y^2}{\frac{4}{5}} = -1$, следовательно, $a = \sqrt{\frac{4}{3}}, b = \sqrt{\frac{4}{5}}$. Строим осевой прямоугольник, а затем изображаем гиперболу.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Написать уравнение множества точек, для каждой из которых модуль разности расстояний от точек $F_1(4,0)$ и $F_2(-4,0)$ равен 6.
2. Найдите длины полуосей и координаты фокусов следующих гипербол:
 - а. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$
 - б. $25x^2 - 16y^2 - 1 = 0$
3. Найти площадь S прямоугольника, вершины которого лежат на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, а две стороны проходят через фокусы параллельно оси Oy . Вычислить S для случая, когда $a^2 = 20$ и $b^2 = 10$.
4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:
 - а. расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10;

- b. вещественная полуось равна 3 и гипербола проходит через точку $(6, 2\sqrt{3})$;
- c. расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.
5. Определить полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис следующих гипербол:
- a. $4x^2 - 9y^2 = 36$
- b. $16x^2 - 9y^2 = 144$.
6. Составить уравнение гиперболы, имеющих общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$ и проходящей через точку $M(4, \sqrt{2})$.
7. Для равнобочной гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ написать уравнение софокусной с ней гиперболы, проходящей через точку $M(4, \sqrt{2})$.
8. Дана гипербола $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 1$. Написать уравнение сопряженной с ней гиперболы; найти эксцентриситеты, директрисы и асимптоты данной и сопряженной гипербол.

2.2.11.3 Материал для закрепления по теме «Парабола»

Упражнение 1: Сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное утверждению 1 из раздела эллипс для параболы.

Решение:

Для точек лежащей во внутренней области ограниченной параболой расстояние до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, а для точек вне параболы наоборот (рис.20).

Проекцию точки X на директрису обозначим через Y , а точку пересечения XY с параболой через Z . Через F обозначим фокус параболы. По определению параболы $FZ = ZY$. Если точка X лежит во внутренней области параболы, то $XY = XZ + ZY$. По неравенству треугольника $FX < FZ + ZX = ZY + ZX = XY$. Если точка X и парабола лежат по разные стороны от директрисы, то утверждение очевидно. Пусть точка X лежит во внешней области параболы, но по ту же сторону от директрисы, тогда $ZY = ZX + XY$, и по

неравенству треугольника $FZ + ZX > FZ + ZY = ZY + YX$. А значит, $FZ > YX$, что и требовалось доказать.

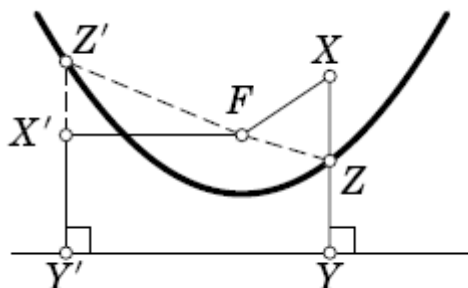


Рис. 20

Упражнение 2. Определить координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y=x^2$.

Решение. Если поменять ролями оси Ox и Oy , то каноническое уравнение параболы примет вид: $x^2=2py$. Сравнивая это уравнение с заданным, получим $2p=1$, отсюда $p=1/2$. Следовательно, фокус параболы имеет координаты $(0,1/4)$, а уравнение директрисы есть $y=-1/4$.

Упражнение 3. а) Когда достигается максимум модуля разности расстояний от точки P до точек F_1 и F_2 , лежащих по разные стороны от прямой l ?

б) Пусть даны две прямые l и l' и точка F , не лежащая на них. Найдите такую точку P на прямой l , что разность расстояний от нее до прямой l' и до точки F (взятая со знаком) максимальна.

Решение. а) Обозначим через F_2' точку, симметричную F_2 относительно прямой l . Очевидно, что $F_2X = F_2'X$ для любой точки X на прямой l . Нам достаточно найти такую точку P , что разность расстояний от P до F_1 и F_2'

будет как можно больше. Из неравенства треугольника следует что $|F_1P - F_2'P| < F_1F_2'$. И достигается этот максимум тогда и только тогда, когда точки F_1, F_2', P лежат на одной прямой. Поскольку точки F_2 и F_2' симметричны, углы, которые образуют прямые F_1P и F_2P с прямой l , равны (рис. 21).

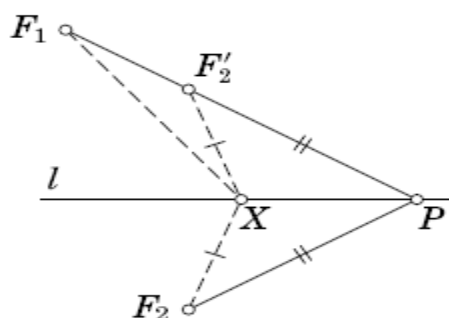


Рис. 21

б) Обозначим через F' точку, симметричную F относительно l . Выберем ту из точек F и F' , расстояние от которой до прямой l' минимально (расстояние берется со знаком).

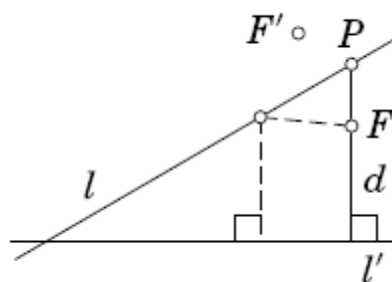


Рис. 22

Пусть это точка F . Расстояние от F до l' обозначим через d . Тогда для любой точки P на прямой l расстояние до l' не больше чем $PF+d$. А значит, требуемая в задаче разность всегда не превосходит d . С другой стороны, она равна в точности d , когда точка P лежит на перпендикуляре к l' , проведенном из точки F (рис. 22). Стоит также отметить, что если в п. а) прямая F_1F_2' параллельна l , а в п. б) прямая l' перпендикулярна l , то рассматриваемого максимума не существует (он достигается на бесконечности).

Задачи для самостоятельного решения.

1. Определить координаты фокуса F и составить уравнение директрисы для каждой из следующих парабол:

а) $y^2 = 6x$;

б) $x^2 = -4y$;

в) $y^2 = -2x$;

г) $x^2 = 3y$;

д) $2x^2 - 3y = 0$;

е) $3y^2 + 16x = 0$

2. Составить каноническое уравнение параболы в каждом из следующих случаев:

а. фокус имеет координаты $(3, 0)$;

б. фокус имеет координаты $(0, 5)$;

с. директриса имеет уравнение $x + 15 = 0$;

д. директриса имеет уравнение $y + 12 = 0$.

3. Под острым углом к горизонту брошен камень, который, двигаясь по параболы, упал на расстоянии 24 м от начального положения. Определить параметр траектории, зная, что небольшая высота, достигнутая камнем, равна 6 м.

4. Определить площадь неориентированного треугольника, у которого одна вершина принадлежит директрисе параболы $y^2 = 2px$, а две другие служат концами хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к оси Ox .

5. Вычислить длину стороны правильного треугольника ABC , вписанного в параболу с параметром p , в предположении, что точка A совпадает с вершиной параболы.

6. Найти длины сторон треугольника, вписанного в параболу с параметром p , если одна вершина совпадает с вершиной параболы, а ортоцентр – с фокусом.

7. Написать уравнения парабол: а) $y^2 = 2x$; б) $y^2 = 10x$; в полярной системе координат, если полюс совпадает с фокусом параболы, а полярная ось – с осью Ox .

Найти множество середин всех хорд параболы $y^2 = 2px$, имеющих угловой коэффициент $k \neq 0$.

2.3. Апробация

Апробация проводилась в мае 2020 года (дистанционно) в МБОУ СОШ №1 пгт. Каа-Хем Кызылского кожууна. Взяты 10 человек 11 классов: 5 человек как экспериментальные (выбрали элективный курс), а 5 – контрольные., это учащиеся выбрали ЕГЭ по профильной математике, но не посещают элективный курс.

В качестве проверки знаний мы использовали задания из КИМ второй части ЕГЭ по профильной математики. Оценка работы проводилась следующим образом. Согласно критериям второй части ЕГЭ: 13 задание - 2 балла, 14 - 2 балла, 15 - 2 балла, 16 – 3 балла, 17 – 3 балла, 18 – 3 балла, 19 - 4 балла.. Если ученик получает 0-2 оценка – «2» от 3 до 4 баллов – 3 оценка «3», 5-7 баллов – оценка «4», от 8 и более – оценка «5»

Были представлены качество знаний учащихся в группах до эксперимента, после эксперимента тоже была проведена проверка.

После проверки знаний получилась следующая картина.

Таблица 2

	2	3	4	5	средний балл
эксперим.	1 чел.– 1 балл	3 чел. – по 3 балла	1 чел – 5 баллов		3 балла – оценка 3
контрольн.	1 чел – 1 балл	2 чел – 3 балла, 2 чел – 4 балла			3 балла – оценка 3

Как видно из результатов первой проверки у учащихся средний балл, полученный учащимися: 3.

Обучение в экспериментальных классах велось с использованием разработанным элективным курсом.

Результаты проведенных исследований подвергались статистической обработке для подтверждения или опровержения следующей гипотезы: обучение учащихся профильных классов по теме «Линии второго порядка» в рамках элективного курса способствует:

1. повышению интереса к математике;
2. повышению качества математических знаний.

Для выяснения истинности сформулированной гипотезы использованы следующие методы исследования: экспериментальное обучение, наблюдение, анкетирование, изучение результатов учебной деятельности.

Для проверки истинности утверждения 1) было проведено анкетирование учащихся до и после эксперимента. Нас интересовал ответ на вопрос: «Нравится ли тебе математика?» Результаты опроса представляют измерения по шкале порядка (не нравится, не очень нравится, нравится, очень нравится). Для выявления тенденций в случае зависимых выборок может быть применен односторонний критерий знаков. Для применения критерия выполнены необходимые условия:

- 1) выборки случайные;
- 2) выборки зависимые;
- 3) пары (x_i , y_i) взаимно независимы;

изучаемое свойство объектов распределено непрерывно в обеих совокупностях, из которых сделаны выборки;

- 5) шкала измерений должна быть не ниже порядковой.

Для экспериментальных классов проверялась гипотеза H_0 : интерес к математике у учащихся после экспериментального обучения не повысился.

Альтернативная гипотеза H_1 : интерес к математике учащихся после экспериментального обучения повысился. По данным для экспериментальных классов была составлена таблица 6.

Таблица 3

Знак разности баллов	0	+	–
Число учащихся	5	4	1

Согласно данным таблицы 6, значение статистики критерия равно $T = 29$.

Критическое значение статистики критерия t_α определяется по формуле:

$$t_\alpha = 0,5(n + W_\alpha \sqrt{n}),$$

где n – число «+» и «-».

Если учащийся в первой анкете давал ответ «не очень нравится», а во второй – «нравится», его знак разности баллов считался «+». Если давал в первой анкете ответ «не очень нравится», а во второй – «не нравится», знак разности – «-» и т.д.

При $\alpha = 0,05$ $W_\alpha = -1,64$, поэтому $t_\alpha = 12,2$; $n - t_\alpha = 21,8$.

Так как $T > n - t_\alpha$, то нулевая гипотеза отклоняется на уровне значимости $\alpha = 0,05$, и принимается альтернативная гипотеза.

Для проверки истинности утверждения 2) гипотезы нами был использован критерий качества знаний по математике, о котором судили по результатам выполнения проверочной работы с использованием КИМ ЕГЭ профильной математики.

Сравним качество усвоения данной темы в экспериментальных и контрольных классах. Результаты проведенной контрольной работы показаны в

таблице 4.

	2	3	4	5	средний балл
эксперим.	1 чел. – 2 балл	3 чел. – по 3 балла	1 чел – 7 баллов		3,6 балла
контрольн.	1 чел – 1 балл	4 чел — 4 балла			3,4 балла

Сравнивая результаты, видим, что в экспериментальных классах они превосходят результаты контрольных классов первого выполнения работы (несмотря на фактор «забывания»).

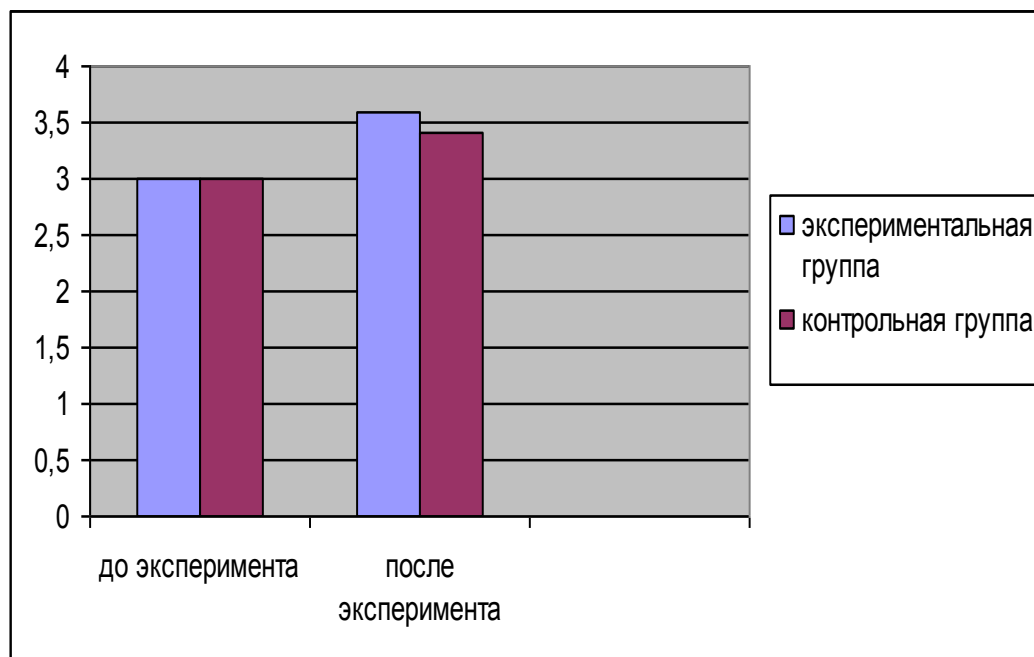


Рис. 23

Итак, результаты проведенного экспериментального исследования позволяют подтвердить нашу гипотезу о том, что использование системы прикладных задач с региональным содержанием способствует повышению интереса к математике и качества математического образования учащихся.

Как видно из результатов – средний балл стал 3,6, т.е. повысилось качество знаний учащихся. Вывод. Гипотеза подтверждена.

Заключение

В работе был разработан элективный курс по теме: « Линии второго порядка», который предназначен для учащихся 10-11 классов.

Изучив научную и методическую литературу, нами были отобран материал с учётом психологических особенностей учащихся старших классов и систематизирован для целостного изложения.

Занятия элективного курса позволяют дать учащимся углубленное представление об эллипсе, гиперболе и параболе и ознакомить их с некоторыми, наиболее яркими свойствами замечательных линий, приблизить их к пониманию некоторых важных идей современной математики.

В ходе написания работы цель достигнута, поставленные задачи были решены, а именно:

1. изучены психолого-педагогические особенности старшего школьного возраста для обоснования возможности обучения учеников линиям второго порядка.
2. проанализирована учебная литература (программа по математике, школьные учебники) с точки зрения рассматриваемого вопроса.
3. сформулированы педагогические требования к элективному курсу.
4. разработан элективный курс «Линии второго порядка» в профильных классах.
5. проведена апробация.

Разработанный элективный курс направлен на расширение кругозора учащихся, развитие математического мышления, формирования активного познавательного интереса к предмету, формирования умения последовательно рассуждать, анализировать факты, обобщать их, формирования представления о прикладных возможностях математики, содействовать профессиональной ориентации учащихся.

Гипотеза доказана.

Библиография

1. Акопян А.В. Геометрические свойства линий второго порядка [Текст] / А.В. Акопян, А.А. Заславский.- М.: МЦНМО, 2007. - 136 с.
2. Александров А.Д. Геометрия [Текст]: учеб. для учащихся 10 кл. с углубл. изуч. математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик.- М.: Просвещение: Моск. учебники, 2001. - 270 с.
3. Александров А.Д. Геометрия [Текст]: учеб. для учащихся 11 кл. с углубл. изуч. математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик.- М.: Просвещение: Моск. учебники, 2001. - 319 с.
4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] / П.С. Александров.- М.: Наука, 1979. - 256 с.
5. Атанасян Л.С. [Текст]: учеб. для учащихся 10 кл. с углубл. изуч. математики / Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Киселева Л.С., Позняк Э.Г., Просвещение 2019. – 225 с.
6. Груденов Я.И. Психолого-дидактические основы методике обучения математике [Текст] / Я.И. Груденов. - М.: Педагогика, 1987. - 160 с.
7. Егорова А.М. Профильное обучение и элективные курсы в средней школе [Текст] // Теория и практика образования в современном мире : материалы I Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, февраль 2012 г.). — Т. 1. — Санкт-Петербург : Реноме, 2012. — С. 173-179.
8. \Ермаков Д.С. Создание элективных учебных курсов для профильного обучения [Текст] / Д.С. Ермаков, Г.Д. Петрова // Школьные технологии.- 2003.- № 6.- С. 22-29.
9. Ермаков Д.С. Элективные курсы для профильного обучения //Педагогика, 2005. - №2. – с.36-41.
10. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа [Текст]: учеб. пособие для 10-11 кл. средней шк. / А.М. Абрамов,

- Б.М. Ивлев Дудницын Ю.П.- М., 1993. - 48 с.
11. Ильин В.А. Аналитическая геометрия [Текст] / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.- М., 1971. - 232 с.
 12. Кон И.С. Психология ранней юности [Текст] / И.С. Кон.- М.: Просвещение, 1989. - 255 с.
 13. Маркушевич А.И. Замечательные кривые [Текст] / А.И. Маркушевич.- М.: Наука, 1978. - 32 с.
 14. Об элективных курсах в системе профильного обучения на старшей ступени общего образования [Электронный документ]: Информационное письмо Департамента общего и дошкольного образования Минобразования России № 14-51-277/13 от 13.11.2003.- (www.profile-edu.ru). 24.04.2010
 15. Погорелов А.В. Геометрия [Текст]: 10-11 кл. для общеобразоват. Учреждений: базовый и профильный уровни / А.В. Погорелов. - 9-е изд. - М.: Просвещение, 2010. - 175с.
 16. Потоскуев Е.В. Геометрия [Текст]: 11 кл. для общеобразоват. с углубл. и профильным изуч. математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич.- 2-е изд., испр. - М.: Дрофа, 2004. - 224 с.
 17. Смирнова И.М. Геометрия [Текст]: 10-11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений (гуманитарный профиль) / И.М. Смирнова.- М.: Мнемозина, 2004. - 288 с.
 18. Смирнова И.М. Геометрия [Текст]: 10-11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений (базовый и профильные уровни) / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов.- 5-е изд., испр. и доп.- М.: Мнемозина, 2008. - 288 с.
 19. Смирнова И.М. Кривые. Курс по выбору. 9 класс [Текст]: учебное пособие для общеобразоват. учреждений / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов.- М.: Мнемозина, 2007. - 63 с.
 20. Федяева Л.В. Элективные курсы по математике в системе

профильного обучения [Электронный документ] / Л.В. Федяева // Вестник Омского государственного педагогического университета: Электронный научный журнал.- 2007.- (<http://www.omsk.edu>). 24.04.2010

21. Филип Райс. Психология подросткового и юношеского возраста [Текст] / Р. Филип.- 8-е изд.- СПб.: Питер, 2000. - 200 с.
22. Черникова Т.В. Методические рекомендации по разработке и оформлению программ элективных курсов [Текст] / Т.В. Черникова // Профильная школа.- 2005.- № 5.- С. 11-16.
23. Шиянова Е.Б. Формирование у школьников мыслительных операций преобразования [Текст] / Е.Б. Шиянова // Вопросы психологии.- 1986.- № 1. - С. 23-28.
24. Элективные курсы в профильном обучении [Текст] / М-во образования РФ. Национальный фонд подготовки кадров. - М.: Вита-Пресс, 2004.- 144 с.
25. Эльконин Б.Д. Психологическое строение понятия величины [Текст] / Б.Д. Эльконин // Вопросы психологии.- 1986.- № 1. - С. 60-64.

Движение по орбитам

1. Движение по круговой орбите

Хотя окружность является частным случаем эллипса ($e = 0$), описать движение тела по круговой орбите проще всего. В этом случае, согласно закону всемирного тяготения, на тело массой m , находящегося на расстоянии r от центрального тела массой M , действует сила притяжения

$$F = \frac{G * M * m}{r^2}$$

(G - гравитационная постоянная), которая уравновешивается центробежной силой $F' = m * \omega^2 * r$, где ω - угловая скорость тела m . Для кругового движения r не меняется, поэтому сила F остается постоянной по величине, а это означает, что и угловая скорость не меняется. Поскольку линейная скорость $V = \omega * r$ (также постоянна), то из равенства $F = F'$ получится

формула: $V_I = \sqrt{\frac{G * M}{r}}$ (5) Скорость V_I получила название круговой, или **первой космической скорости**. Период T , в течении которого тело m совершит полный оборот вокруг тела M , можно получить как частное от деления длины окружности радиуса r ($2 * \pi * r$) на скорость V_I , то есть $T =$

$$\frac{2 * \pi * r}{V_I} = \frac{2 * \pi * \sqrt{r^3}}{\sqrt{G * M}} \quad (6)$$

Если подставить в (5) и (6) массу и радиус Земли, то получим $V_I = 7.905$ км/с и $T = 84.49$ минуты. Однако, например, для орбиты станции "Мир" нужно взять r примерно на 400 км больше, чем радиус Земли, и тогда уже $V_I = 7.688$ км/с и $T = 92.57$ минуты. Для геостационарного спутника ($T = 24$ часа) получится $r = 42240.6$ км и $V_I = 3.07$ км/с. Для Луны ($r = 380000$ км) $V = 1.024$

км/с и $T \sim 27$ суток, что близко к реальным средним значениям (орбита Луны не круговая).

2. Движение по эллиптической орбите

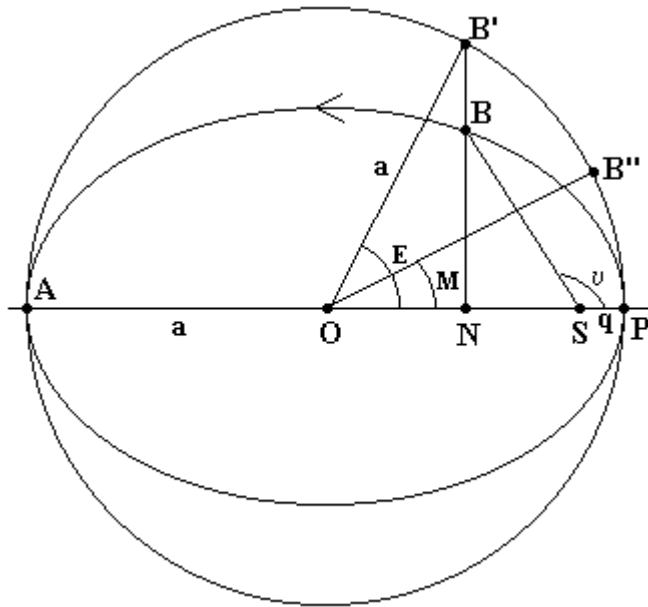


Рис. 24 - Параметры эллиптической орбиты

Для описания движения по эллиптической орбите необходим ряд специальных параметров. На рис. 24 введены следующие обозначения: S - фокус эллипса, O - его центр, P - перицентр, A - апоцентр, $q = |SP|$ - расстояние в перицентре, $a = |OA|$ - большая полуось. Для произвольной точки B в момент времени t угол между ее радиус-вектором SB и направлением на перицентр SP - это истинная аномалия $\square$

Теперь построим окружность радиуса a с центром в центре эллипса O и опустим перпендикуляр BN из точки B на линию апсид AP. Продолжение этого перпендикуляра пересечет окружность в точке B'. Угол при центре эллипса O между прямой OB' и линией апсид OP называется **эксцентрической аномалией** E. Как и истинная аномалия, E измеряется от 0° до 360° в сторону движения.

Если обозначить через T время полного оборота (период обращения) точки B по эллиптической орбите, то можно написать: $360^\circ = n \cdot T$, или

$\frac{360^\circ}{T}$, где n - это средняя угловая скорость движущейся точки, которая называется **средним движением**. Теперь представим себе некую фиктивную точку B'' , движущуюся по окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью n и проходящую через точку P (перицентр) одновременно с обращающейся по эллиптической орбите точкой B . Угол M , образуемый радиус-вектором OB'' этой фиктивной точки и направлением на перицентр OP , называется **средней аномалией** и отсчитывается от 0° до 360° в направлении движения точки B . Очевидно, что для произвольного момента времени t среднюю аномалию можно выразить через среднее движение n и время прохождения перицентра: $M = n \cdot t$. $E = M = 0^\circ$, а при $t = \frac{T}{2}$ (момент прохождения апоцентра) $E = M = 180^\circ$.

Как уже упоминалось выше, эллиптическое движение осуществляется

при условии $V_0^2 < 2 \cdot \frac{GM}{r_0}$. Связь между различными параметрами эллиптической орбиты может быть выражена следующими соотношениями:

1. Между эксцентрической аномалией E и средней аномалией M (уравнение Кеплера) $E - e \cdot \sin(E) = M$ (7) 2. Между радиус-вектором r движущегося тела и эксцентрической аномалией $r = a \cdot (1 - e \cdot \cos(E))$ (8) 3.

Между скоростью V и радиус-вектором r $V^2 = \frac{GM}{r} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$ (9) 4. Между

истинной аномалией и эксцентрической аномалией $\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \frac{(1+e)}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right)$

(10) 5. Между радиус-вектором и истинной аномалией $r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\nu)}$ (11)

Как видно из (9), когда движущееся тело приходит в перицентр, его радиус-вектор достигает минимального значения $q = a \cdot (1 - e)$, а скорость -

максимального, определяемого формулой $V_{max}^2 = \frac{GM}{a \cdot (1 - e)}$. В апоцентре, наоборот, радиус-вектор максимален $Q = a \cdot (1 + e)$, а скорость движения

минимальна $V_{min}^2 = \frac{\frac{G * M}{a * (1 - e)}}{1 + e}$. Отсюда можно получить, что $\frac{V_{min}}{V_{max}} = \frac{1 - e}{1 + e} = \frac{q}{Q}$.

Формула для периода обращения по эллиптической орбите аналогична формуле (6) для круговой орбиты, только вместо радиуса орбиты берется ее большая полуось:

$$T = 2 * \pi * \sqrt{a^3 * G * M} \quad (12)$$

Определенный интерес также представляет зависимость параметров орбиты от начальных условий в некоторый момент времени: радиус-вектора r_0 , скорости V_0 и угла $\square_0$, образуемого радиус-вектором и направлением скорости. Зависимости величины фокального параметра и эксцентриситета от начальных условий выглядят так:

$$p = \frac{\frac{r_0^2 * V_0^2 * \sin^2(\delta_0)}{G}}{M} \quad (13) \quad e = \frac{1 + \frac{(r_0^2 * V_0^2 - 2G * M) * r_0 * V_0^2 * \sin^2(\delta_0)}{(G * M)^2}}{1} \quad (14)$$

Из (13) следует, что при возрастании угла $\square_0$ от 0° до 90° параметр p

также растет от 0 до $p_{max} = \frac{r_0^2 * V_0^2}{M}$, а когда $\square_0$ изменяется от 90° до 180° , p убывает от p_{max} до 0. При $\square_0 = 0^\circ$ и $\square_0 = 180^\circ$ параметр $p = 0$ и орбита вырождается в отрезок прямой.

Выражение e через начальные параметры из (14) зависит от знака разности $r_0^2 * V_0^2 - 2G * M$, который определяет тип орбиты. При $r_0^2 * V_0^2 - 2G * M < 0$ орбита всегда остается эллипсом, и при изменении угла $\square_0$ от 0° до 90° e

уменьшается от 1 до $e_{min} = \frac{(r_0^2 * V_0^2 - G * M)}{M}$, а при увеличении $\square_0$ от 90° до

180° e снова увеличивается от $e_{\min}$ до 1. Поскольку $q = \frac{p}{1+e}$, то при увеличении от 0° до 180° расстояние в перигентре q растёт от 0 до r_0 .

Величину большой полуоси a и малой полуоси b также можно выразить

через начальные параметры: $a = \frac{G * M * r_0}{2G * M - r_0 * V_0^2}$ (15) $b =$

$$a\sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{r^3} * V_0 * \sin(\delta_0)}{\sqrt{2G * M - r_0 * V_0^2}} \quad (16)$$

В предельном случае (при $\sin(\delta_0)=0$) эллипс вырождается в конечный отрезок прямой, длина которого равна $2*a$ и концы которого одновременно являются и фокусами, и вершинами вырожденного эллипса, причем один из его концов - перигентр - совпадает с началом координат, т.е. с притягивающим центром.

3. Движение по параболической орбите

Параболу можно рассматривать и как предельный случай эллипса, и как предельный случай гиперболы. Для параболической орбиты выполняется

условие $V_0^2 = \frac{2G * M}{r_0}$ (17). Скорость V_0 называется параболической, или **второй космической скоростью** V_{II} . Сравнивая эту формулу с выражением (5) для первой космической скорости, можно заметить, что $V_{II} = V_I * \sqrt{2}$. При данном расстоянии r_0 до притягивающего центра вторая космическая скорость - это минимальная скорость, необходимая для преодоления притяжения центрального тела. Для Земли ($r_0=6378.1$ км) $V_{II}=11.179$ км/с. Для того, чтобы тело навсегда покинуло Солнечную систему, на расстоянии Земли ($r_0=149.6$ млн. км) ему нужно придать скорость $V_{III}=42.1$ км/с. Скорость V_{III} иногда называют третьей космической скоростью.

Уравнение параболической орбиты можно представить как зависимость радиус-вектора от фокального параметра p (или расстояния в перигентре

$$q = \frac{p}{2}) \text{ и истинной аномалии: } r = \frac{p}{1 + \cos(\nu)} = q * \sec^2\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad (18)$$

Уравнение движения по параболе - зависимость истинной аномалии от времени t (и времени прохождения перигентра) выглядит так:

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3\left(\frac{\nu}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{G * M} * \sqrt{\frac{1}{q^3}} * (t - \tau) \quad (19)$$

В параболическом движении истинная аномалия меняется от -90° до $+90^\circ$. При (прохождение перигентра) и радиус-вектор достигает минимального значения $r_{\min} = q = \frac{1}{2}p$, а скорость - максимального

$$V_{\max}^2 = \frac{G * M}{q}.$$

При возрастании r до бесконечности скорость падает до нуля.

Зависимость фокального параметра p от начальных радиус-вектора r_0 и угла между направлением радиус-вектора и направлением начальной скорости выражается следующим образом:

$$p = 2r_0 * \sin^2 \quad (20)$$

В предельном случае, при парабола вырождается в полупрямую, выходящую из начала координат, которое является одновременно и вершиной, и фокусом вырожденной параболы.

Теперь в качестве примера применения теории эллиптического и параболического движения можно привести следующую задачу: сколько времени понадобится ракете, стартующей с земной орбиты с минимально

необходимой начальной скоростью, чтобы удалиться от Солнца на 2 пк? Если представить орбиту параболической, то минимальная начальная скорость будет примерно равна $V_{III} = 42.1$ км/с, и, казалось бы, для решения задачи нужно просто разделить 2 пк на V_{III} , что составит примерно 46.5 тыс. лет. Однако нетрудно заметить, что это значение справедливо только при условии постоянного (в течении 46 тыс. лет!) поддержания скорости ракеты на уровне 42.1 км/с, т.е. работа двигателей должна постоянно компенсировать потерю кинетической энергии, связанную с преодолением притяжения Солнца. Если же ракета разгоняется вблизи орбиты Земли и дальше движется по инерции, то ее скорость будет постоянно уменьшаться, и поэтому время, затраченное на преодоление 2 пк, будет существенно больше. В этом случае проще будет взять эллиптическую орбиту с $a=1$ пк (если пренебречь перигелийным расстоянием, то в афелии удаление от Солнца составит как раз 2 пк), тогда из (12) получим полный период обращения по такой орбите. Он составит 93.7 млн. лет, то есть искомое время (половина периода) будет около 46.8 млн. лет! Отсюда ясно, с какими трудностями сопряжена при современном развитии космической техники посылка аппарата даже к ближайшей звезде.

Разумеется, время полета будет радикально сокращено, если удастся достичь скорости, сравнимой со скоростью света. Например, на разгон до половины скорости света с постоянным ускорением $g \sim 10$ м/с² (пригодной для нахождения на этом аппарате людей) будет затрачено примерно $150 \cdot 10^6 / 10 = 1.5 \cdot 10^7$ с, что составит примерно полгода. Замечание о технической возможности такого режима работы двигателей остается в силе, однако если о нем пока забыть, то до ближайшей звезды (4 световых года) можно долететь примерно за 9 лет (полгода на разгон, 8 лет на свободный полет на скорости 150 тыс. км/с и еще полгода на торможение). Траекторию такого движения (кеплеровским оно уже не является) можно считать прямолинейной, поскольку ее существенное искривление возможно только на начальном этапе разгона (и конечном этапе торможения), когда аппарат будет иметь небольшую скорость и находиться сравнительно недалеко от Солнца

(звезды). За все время разгона будет пройдено расстояние $\sim g^* \frac{t^2}{2} = 7500 \text{ а.е.} = 0.036 \text{ пк}$ - именно на таком расстоянии от Солнца закончится фаза разгона.

4. Движение по гиперболической орбите

Для гиперболической орбиты выполняется условие $V_0^2 > \frac{2G^*M}{r_0}$.

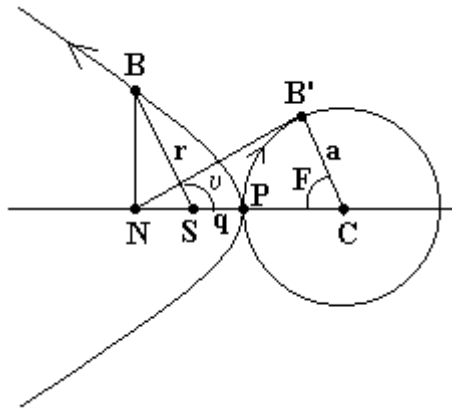


Рис. 25 - Параметры гиперболической орбиты

При рассмотрении гиперболического движения вводится особый параметр F , подобный эксцентрической аномалии у эллипса. На рис. 6 применены следующие обозначения: S - фокус гиперболы, P - ее вершина (перицентр), C - ее центр. Положение на гиперболе произвольной точки B определяется углом между радиус-вектором SB и направлением оси апсид SP - истинной аномалией. Если из точки B опустить перпендикуляр BN на линию апсид и из точки их пересечения N провести касательную к окружности радиуса a (длина действительной полуоси гиперболы) с центром в центре гиперболы C , получим точку касания B' . Угол между радиусом этой точки и направлением на перицентр и обозначается как угол F .

Уравнение движения по гиперболе - зависимость параметра F от времени t (аналог уравнения Кеплера (7) для эллиптического движения) выглядит так:

$$e * \operatorname{tg}(F) - \ln\left(\operatorname{tg}\frac{F}{2} + 45^\circ\right) = \sqrt{G^*M} * \sqrt{\frac{1}{a^3}} - (t - \tau) \quad (21)$$

Связь между различными параметрами эллиптической орбиты может быть выражена следующими соотношениями:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} * \operatorname{tg}\left(\frac{F}{2}\right) \quad (22)$$

$$V^2 = GM\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right) \quad (23) \quad r = a * (e * \sec(F) - 1) \quad (24)$$

При t (прохождение перицентра) $\square = 0$ и радиус-вектор достигает минимального значения $r_{\min} = q = a * (e - 1)$, а скорость – максимального

$$V_{\max}^2 = \frac{\frac{GM}{a * (e + 1)}}{e - 1}.$$

При возрастании r до бесконечности истинная аномалия увеличивается до предельного значения $\square_{\max} = \arccos(-\frac{1}{e})$, параметр F достигает максимального значения $F_{\max} = 90^\circ$, а скорость – минимального значения $V_{\min}^2 = G * \frac{M}{a}$.

Зависимость эксцентриситета e гиперболы от начальных радиус-вектора, скорости и угла между ними видна из формулы (14). При изменении

угла от 0° до 90° e растет от 1 до $e_{\max} = \frac{(r_0 * V_0^2 - GM) * G}{M}$, а при увеличении $\square_0$ от 90° до 180° e снова уменьшается от $e_{\max}$ до 1. Если через a обозначить действительную ось гиперболы, то $a = \frac{GM r_0}{(r_0 * V_0^2 - 2GM)}$ (25)

В предельном случае, аналогично параболе, при $\sin(\square_0) = 0$ гипербола вырождается в полупрямую, выходящую из начала координат, которое является одновременно и вершиной, и фокусом вырожденной гиперболы.

Тема: Эллипс

В декартовой системе координат, как хорошо известно, окружность радиуса R с центром $C(a; b)$ задаётся уравнением $(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) = R^2$. Если сжать окружность с центром в начале координат к вертикальному диаметру с коэффициентом $k > 0$, то получится линия с уравнением $k^2x^2 + y^2 = R^2$ (1), которая называется *эллипсом*. При этом ясно, что если $k > 1$, то это действительно сжатие в привычном смысле этого слова (рис. 16, а), а если $0 < k < 1$, то это растяжение (рис. 16, б). Но договоримся использовать один общий термин – *сжатие*.

Преобразуем уравнение (1). Разделим его обе части на R^2 :

$$\frac{k^2x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1; \quad \left(\frac{R^2}{k^2} \right) + \frac{y^2}{R^2} = 1; \quad \frac{R^2}{k^2} > 0 \quad \text{всегда.}$$

Сделаем замену $\frac{R^2}{k^2} = a^2$ и $R^2 = b^2$, тогда получим уравнение эллипса в общем виде; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2).

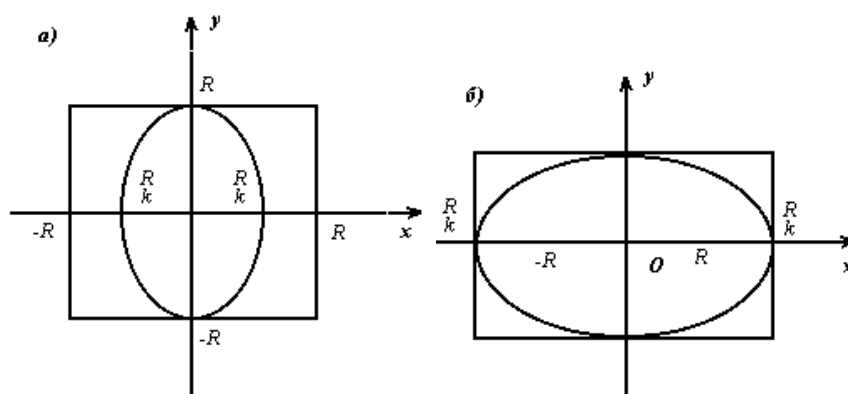


Рис. А1

Уравнение (2) называется *каноническим уравнением эллипса*. В школьном курсе изучается уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$ (3).

Посмотрим, как связаны окружность и эллипс.

$$x = kx'$$

В уравнении (3) сделаем замену $y = ky'$

$$k^2(x')^2 + k^2(y')^2 = R^2 \quad \text{Разделим на } R^2:$$

$$\frac{\left(\frac{x'}{R^2}\right)^2 + \left(\frac{y'}{R^2}\right)^2}{\left(\frac{k^2}{k^2}\right)} = 1 \quad \text{Пусть } \frac{R^2}{k^2} = a^2, \quad \text{тогда } \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Итак, мы видим, что окружность – частный случай эллипса, когда $a = b$.

Отметим ещё, возвращаясь к уравнению (1), что окружность – это эллипс, где $k = 1$.

Из уравнений видно, что эллипс – линия, симметричная относительно обеих осей координат, а значит, и центрально-симметричная. Геометрически, он полностью характеризуется одним из поперечных размеров (они называются осями эллипса) и их отношением.

Вокруг эллипса естественным образом описывается прямоугольник со сторонами, равными осям эллипса и параллельными координатным прямым, который является результатом сжатия квадрата, описанного вокруг исходной окружности. Называется он *осевым прямоугольником эллипса*. Если научиться его строить по уравнению эллипса, то довольно легко после этого изобразить и сам эллипс.

1) Например, дано уравнение а) $3x^2 + y^2 = 7$. Изобразить эллипс двумя способами.

I способ

Запишем его в виде $(\sqrt{3})^2 x^2 + y^2 = (\sqrt{7})^2$. Устанавливаем, что $R = \sqrt{7}, k = \sqrt{3} > 1$, строим осевой прямоугольник со сторонами $2R$, 2λ и изображаем сам эллипс (рис. 17). Отметим, что в правой части уравнения

должно быть положительное число, а в левой – сумма квадрата абсциссы, взятого с положительным коэффициентом, и квадрата ординаты.

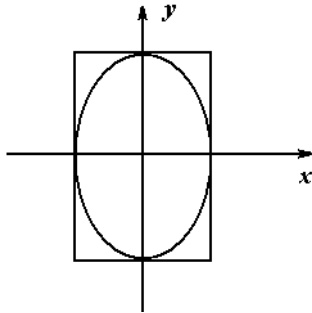


Рис. А2

II способ

Приведём уравнение к каноническому виду.

Разделим обе его части на 7.

$$\frac{(\sqrt{3})^2 x^2}{7} + \frac{y^2}{7} = 1, \quad \frac{x^2}{\frac{7}{3}} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

Получим, что $a = \sqrt{\frac{7}{3}}, b = \sqrt{7}$.

Строим осевой прямоугольник со сторонами a и $2b$, а затем изображаем эллипс.

Отметим, что, например, уравнение $3x^2 + 5y^2 = 7$ следует сначала преобразовать к виду $x^2 + y^2 = \frac{7}{5}$ или $\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = 1$, а затем находить R , k и a , b соответственно.

Если центр эллипса находится не в начале координат, но его оси параллельны координатным осям, то он задаётся уравнением $k^2(x-a)^2 + k^2(y-b)^2 = R^2$ (4),

где $C(a; b)$ – центр эллипса. Это легко следует из формул параллельного переноса, или каноническим уравнением

$$\frac{(x-x')^2}{a^2} + \frac{(y-y')^2}{b^2} = 1 \quad (5) - C(x; y) - \text{центр эллипса.}$$

Данного материала достаточно для построения эллипса в том случае, если он задан уравнением, содержащем как квадраты, так и первые степени переменных.

$$\text{б) } 4x^2 - 40x + 9y^2 + 72y + 208 = 0.$$

I способ

$$\text{Преобразуем к виду (4): } \frac{4}{9}(x-5)^2 + (y+4)^2 = 4.$$

Это уравнение эллипса с центром в точке $C(5; -4)$, где $k = \frac{2}{3}, R = 2, \frac{R}{k} = 3$ (рис. А3)

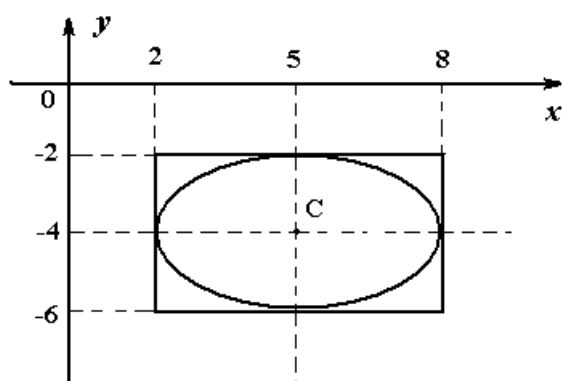


Рис. А3

II способ

Преобразуем к виду (5): $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1$. Получили уравнение эллипса с центром в точке $C(5; -4)$, где $a = 3, b = 2$.

Строим сам эллипс.

1. Найти длины полуосей и координаты фокусов следующих эллипсов:

$$\text{а) } 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$$

Приводим уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $a = 3$, $b = 2$.

Фокусы F_1 и F_2 имеют координаты $F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$.

$$c^2 = a^2 - b^2, c = \sqrt{a^2 - b^2}, c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Итак, $F_1(\sqrt{5}; 0)$ и $F_2(-\sqrt{5}; 0)$ $a = 3$, $b = 2$.

б) $x^2 + 9y^2 = 9$. Решаем аналогично а). $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$, $a = 3$, $b = 1$.

$$F_1(c; 0), F_2(-c; 0). c^2 = a^2 - b^2, c = \sqrt{a^2 - b^2}, c = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}.$$

Итак, $F_1(2\sqrt{2}; 0)$ и $F_2(-2\sqrt{2}; 0)$ $a = 3$, $b = 1$.

$$в) 9x^2 + 25y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1, a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{5}.$$

$$F_1(c; 0), F_2(-c; 0): c = \sqrt{a^2 - b^2}, c = \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{16}{225}} = \sqrt{\frac{4}{15}}.$$

$$\text{Итак, } a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{5}, F_1(\sqrt{\frac{4}{15}}; 0), F_2(-\sqrt{\frac{4}{15}}; 0).$$

2. Найти координаты точек M , принадлежащих эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и равноудалённых от фокусов.}$$

Пусть $M(x; y)$, тогда $MF_1 = MF_2$ (по условию). Т. к. $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ то } (x - c)^2 + (y - 0)^2 = (x + c)^2 + (y + 0)^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 = x^2 + 2xc + c^2, x = 0.$$

Если $x = 0$, то, подставляя его в исходное уравнение, получим: $\frac{y^2}{b^2} = 1$,

$y = \pm b$. Следовательно, $M_1(0; b)$ и $M_2(0; -b)$.

3. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить области, определяемые следующими системами неравенств.

$$\text{а) } \begin{cases} 9x^2 + 25y^2 - 225 < 0, \\ 3x + 5y - 15 < 0, \\ y + 2 > 0 \end{cases}$$

Построим множество точек, определяемых 1-м, 2-м, 3-м неравенством.

Найдём пересечение этих множеств.

I. Построим эллипс $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$, но т. к. неравенство строгое, то точки эллипса не принадлежат искомой области, т.е. неравенство (2) задаёт внутренние точки эллипса.

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0,$$

$$\frac{9}{25}x^2 + y^2 = 9,$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 x^2 + y^2 = 3^2$$

Устанавливаем, что $R = 3$, $k = \frac{3}{5}$ ($0 < k < 1$), $\frac{R}{k} = 5$. Строим осевой

прямоугольник со сторонами $2R, 2\frac{R}{k}$ и изображаем эллипс.

II. Строим множество точек, заданных вторым неравенством. Для

этого строим прямую $y = \frac{15 - 3x}{5}$ и штрихуем определяемую область.

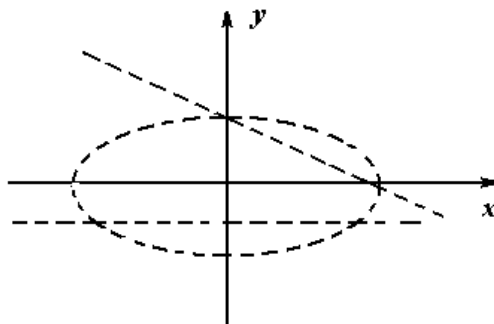


Рис. А4

III Аналогичные рассуждения для построения области, заданной неравенством $y + 2 > 0$.

Построение.

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 > 0, \\ y + 3 > 0, \\ x + y - 2 < 0 \end{cases}$$

Построим множество точек, определяемых 1-м, 2-м, и 3-м неравенствами.

Найдём пересечение этих множеств.

I. $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ – эллипс, точки которого не принадлежат искомой области (неравенство строгое), т.е. неравенство задаёт внешние точки эллипса. Приведём уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = 4, b = 2.$$

Строим осевой прямоугольник со сторонами a и b , изображаем эллипс.

III. Строим множество точек, заданных неравенством (2). Для этого изображаем прямую $y = 3$ и штрихуем определяемую область.

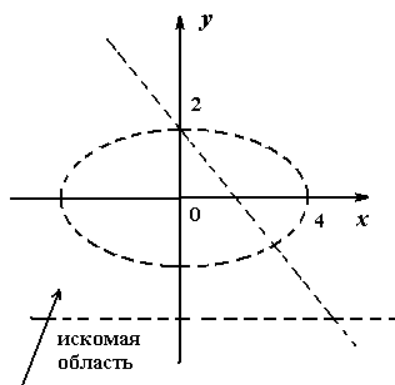


Рис. А5

IV. Рассуждаем аналогично.

Тема: Гипербола

Учащиеся хорошо знакомы с гиперболой как с графиком функции $y = \frac{k}{x}$ и с такими понятиями, как её ветви и асимптоты. Гипербола не только является центрально-симметричной линией (как график нечётной функции), но и имеет две оси симметрии – это биссектрисы пар вертикальных координатных углов (рис. 19).

Рассмотрим уравнение $x^2 - y^2 = l$ и покажем, что линия, задаваемая им – это тоже гипербола. Перепишем уравнение в виде $(x - y)(x + y) = l$. Введём

$$u = x - y,$$

новые переменные: $v = x + y$; тогда в системе (u, v) исходное уравнение примет вид $uv = l$, и это будет гипербола, расположение ветвей которой полностью определяется знаком числа l .

Для изображения гиперболы выясним, как расположены оси системы координат (u, v) в координатной плоскости (x, y) , считая, что u – абсцисса и v – ордината в новой системе координат. Ось абсцисс – это множество точек, для которых $v = 0$, т.е. $x + y = 0$ в исходной системе координат, или в исходной системе координат, или $y = -x$. Это биссектриса чётных координат углов. Аналогично, $v = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$. Это биссектриса нечётных координатных углов. Для выяснения направлений на осях рассмотрим на оси Ou точку A (рис. 20), которая в системе координат (x, y) имеет координаты $(1, -1)$. Тогда для этой точки $u = 1 - (-1) = 2 > 0$, т.е. она лежит на положительной полуоси Ou . Аналогично, рассматривая на оси Ov точку $B(1; -1)$, получим, что для неё $u = 1 + 1 = 2 > 0$, и, значит, она расположена на положительной полуоси Ov .

$$u = x - y,$$

Это позволяет сделать вывод о том, что преобразование $v = x + y$; переводит систему координат (x, y) в систему (u, v) , оси которой повёрнуты

пол отношению к исходной на угол $-\frac{\pi}{4}$.

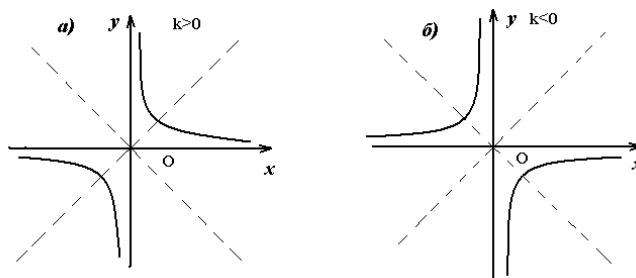


Рис. Б1

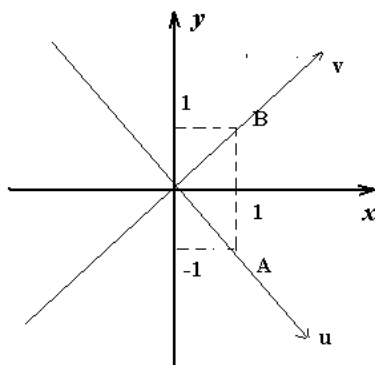


Рис. Б2

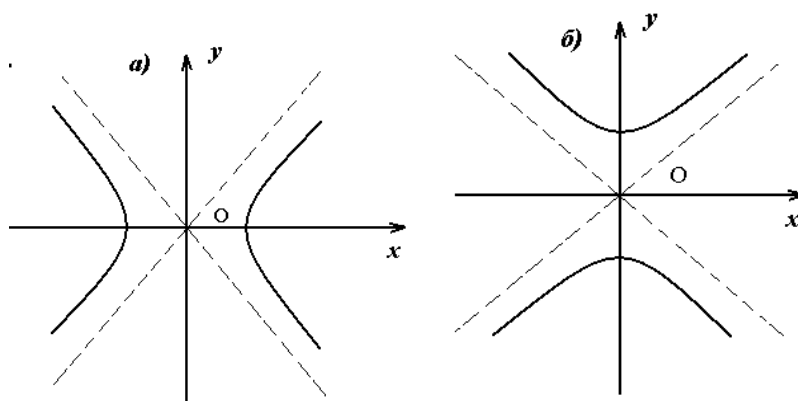


Рис. Б3

Уравнение при этом преобразуется в уравнение $uv = l$, которое равносильно уравнению $v = \frac{2}{3}$, ибо $u = 0$ равенство означало бы $x - y = 0$, и, значит, $l = 0$. В зависимости от знака числа l мы можем изобразить ветви гиперболы в соответствующих координатных четвертях системы $(u; v)$, тем самым будет получено изображение гиперболы, задаваемой уравнением $x^2 - y^2 = l$ в системе координат $(x; y)$.

При этом, подставляя в исходное уравнение $x = 0$ или $y = 0$ в зависимости от знака l , мы получим точки пересечения гиперболы с той или иной координатной осью. Эти точки называются вершинами гиперболы (рис. 21).

Если к гиперболе $x^2 - y^2 = l$ провести касательные в её вершинах (**Теорема.** Касательная к гиперболе в произвольной её точке является биссектрисой внутреннего угла M_0 треугольника $F_1M_0F_2$, имеющего своими вершинами фокусы гиперболы и данную точку M_0 , см. рис. 27), то они пересекут асимптоты гиперболы в точках, которые будут вершинами квадрата (это следует из соображений симметрии). Удобно этот квадрат назвать осевым квадратом гиперболы (рис. 23). Центр этого квадрата совпадает с центром симметрии гиперболы, её диагонали – это её асимптоты, а сторона равна $2\sqrt{|l|}$.

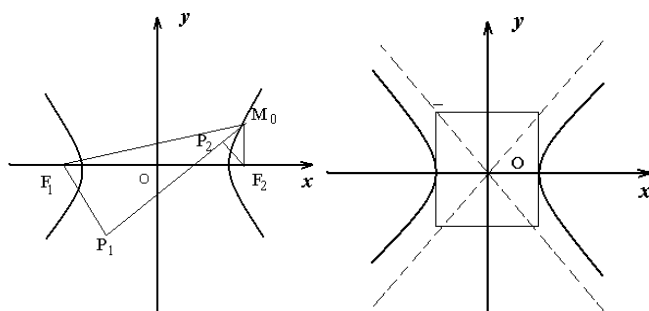


Рис. Б4

Если произвести сжатие к оси Ox с коэффициентом $k > 0$, $k \neq 1$, то гипербола преобразуется в линию, также называемую гиперболой, но о такой гиперболе говорят, что она неравнобокая. Исходную же гиперболу называют равнобокой. При сжатии осевой квадрат преобразуется в осевой прямоугольник, а диагонали квадрата – в диагонали прямоугольника (они будут асимптотами для получающейся неравнобокой гиперболы). Уравнение неравнобокой гиперболы имеет вид: $kx^2 - y^2 = l$, где $k^2 \neq 1$.

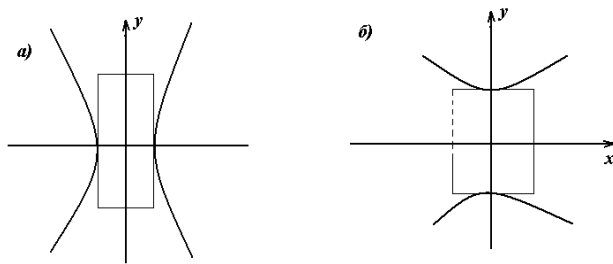


Рис. Б5

Таким образом, уравнение $kx^2 - y^2 = l$ ($k \neq 0$, $l \neq 0$) всегда задаёт гиперболу. Она равнобокая, если $k = 1$ и неравнобокая, если $k \neq 1$. Её вершины лежат на оси Ox , если $l > 0$, и на оси Oy , если $l < 0$. Для её изображения нужно сначала построить осевой прямоугольник, его диагонали и вершины гиперболы (рис. 24).

Преобразуем уравнение $kx^2 - y^2 = l$. Разделим обе его части на l :

$$\frac{kx^2}{l} - \frac{y^2}{l} = 1, \quad \frac{x^2}{\frac{l}{k}} - \frac{y^2}{l} = 1 \quad (1)$$

Если $l > 0$, то уравнение примет вид (1), а если

$$l < 0 - \frac{x^2}{\frac{l}{k^2}} - \frac{y^2}{l} = -1 \quad (2).$$

Сделаем замену $\frac{l}{k^2} = a^2$, $l = b^2$, тогда получим уравнение гиперболы в общем виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3) \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \right) \quad (4).$$

Уравнения (3) и (4) называются *каноническими уравнениями*, а гиперболы, заданные этими уравнениями, называются сопряжёнными, a и b – стороны осевого прямоугольника. Если $a = b$ – осевого квадрата.

Для закрепления решим несколько задач.

1) Построить графики.

а) $3x^2 - 5y^2 + 4 = 0$

I способ.

Это уравнение равносильно уравнению $\frac{3}{5}x^2 - y^2 = -\frac{4}{5}$. Поскольку $l < 0$, то вершины гиперболы расположены на оси Oy . Гипербола неравнобокая, т. к.

$k = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Строим осевой прямоугольник со сторонами $2\sqrt{l}$ и $2\frac{a}{c}$, где $l = -\frac{4}{5}$, $\frac{\sqrt{|l|}}{k} = \frac{\sqrt{4/5}}{\sqrt{3/5}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$. Чертим график гиперболы.

II. способ

Приведём уравнение к каноническому виду

$$3x^2 - 5y^2 + 4 = 0, \quad \frac{x^2}{\frac{4}{3}} - \frac{y^2}{\frac{4}{5}} = -1, \quad \text{следовательно, } a = \sqrt{\frac{4}{3}}, b = \sqrt{\frac{4}{5}}.$$

Строим осевой прямоугольник, а затем изображаем гиперболу.

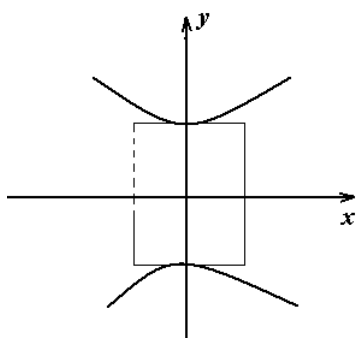


Рис. Б6

Параллельный перенос гиперболы преобразует уравнение к виду:

$$k^2(x-a)^2 - (y-b)^2 = l. \quad (5) \quad \left(\text{или} \quad \frac{(x-a')^2}{a^2} - \frac{(y-b')^2}{b^2} = 1 \quad (6) \right).$$

Рассмотрим способ построения гиперболы по уравнению данного вида.

б) $2x^2 - 8x - 3y^2 + 12y - 5 = 0$. Преобразуем его к виду (5)

$$2(x-2)^2 - (y-2)^2 - 1 = 0 \quad \text{и далее:} \quad \frac{2}{3}(x-2)^2 - (y-2)^2 = \frac{1}{3}.$$

Это уравнение

гиперболы, где $k^2 = \frac{2}{3}; l = \frac{1}{3}; \frac{\sqrt{l}}{k} = \frac{\sqrt{1/3}}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Осевой прямоугольник со

сторонами $2\sqrt{\frac{1}{2}}; 2\sqrt{\frac{1}{3}}$ смещён на две единицы вверх и вправо. Строим его и изображаем гиперболу.

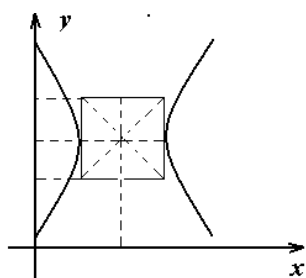


Рис. Б7

II способ.

Приводим уравнение к каноническому виду:

$$\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1, \text{ следовательно, } a = \sqrt{\frac{1}{2}}, b = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Центр осевого прямоугольника – точка (2; 2).

Строим его и изображаем гиперболу.

2) Найти длины полуосей и координаты фокусов следующих гипербол:

$$a) 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

$$9x^2 - 4y^2 = 36; \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Привели к каноническому виду, а следовательно $a = 2, b = 3$.

F_1 и F_2 имеют координаты: $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$.

$$c^2 = a^2 + b^2, c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow c = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Таким образом, $F_1(-\sqrt{13}; 0), F_2(\sqrt{13}; 0)$.

Ответ: $a = 2, b = 3, F_1(-\sqrt{13}; 0), F_2(\sqrt{13}; 0)$.

$$б) x^2 - y^2 - 5 = 0$$

$$x^2 - y^2 = 5; \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1. \text{ Используя каноническое уравнение, получим:}$$

$$a = \sqrt{5}, b = \sqrt{5}.$$

Мы знаем, что $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$,

$$c^2 = a^2 + b^2, c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow c = \sqrt{5 + 5} = \sqrt{10}.$$

Итак, $a = \sqrt{5}, b = \sqrt{5}, F_1(-\sqrt{10}; 0), F_2(\sqrt{10}; 0)$.

$$в) 10x^2 - 2y^2 - 10 = 0$$

$$10x^2 - 2y^2 = 10, \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow a = 1, b = \sqrt{5}.$$

$$F_1(-c; 0), F_2(c; 0): c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow c = \sqrt{5}.$$

Ответ: $a = 1, b = \sqrt{5}, F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0)$.

Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10;

Итак, нам дано, что $2c = 10, 2a = 8$. Находим, что $c = 5, a = 4$.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Т.к. $b = \sqrt{25 - 16} = 3$, то уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

3) Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, построить области, определяемые следующими системами неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 4y^2 - 4 < 0 \\ 4x^2 + 3y^2 - 12 < 0 \end{cases}$$

построим множество точек, определяемых 1-м и 2-м неравенствами. Найдём пересечение этих множеств.

I. Построим гиперболу $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$. После преобразования получаем каноническое уравнение $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$, с полуосями $a = 2$ и $b = 1$. Точки гиперболы не принадлежат искомой области, т. к. неравенство строгое. Это неравенство определяет внутренние точки гиперболы. Строим осевой прямоугольник, гиперболу и изображаем искомую область.

II. Строим множество точек, заданных вторым неравенством. Для этого изображаем прямую $y = \frac{12 - 4x}{3}$ и штрихуем определяемую область.

Построение.

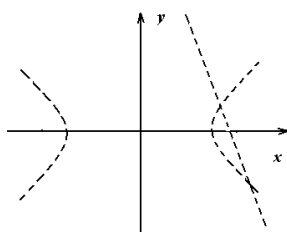


Рис. Б9

$$\text{б) } \begin{cases} 9x^2 - 16y^2 - 144 \geq 0 \\ 2x - y - 6 \leq 0 \\ 3x + y + 12 \geq 0 \end{cases}$$

Построим множество точек, определяемых 1-м, 2-м. 3-м неравенствами. Найдём пересечение этих множеств.

I. построим гиперболу $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$. Её точки принадлежат искомой области, т. к. неравенство не строгое. Т. о. Неравенство определяет

внешние точки гиперболы. Преобразуем уравнение. $\frac{9}{16}x^2 - y^2 = -\frac{144}{16}$. это

уравнение гиперболы, где $k^2 = \frac{9}{16}, l = \frac{144}{16}$, точки которой не принадлежат

искомой области (неравенство строгое), $\frac{\sqrt{l}}{k} = 4$. строим осевой

прямоугольник со сторонами $2\frac{\sqrt{l}}{k} = 8, 2\sqrt{l} = 6$ и изображаем гиперболу.

II. Строим множество точек, заданных вторым неравенством. Для этого изображаем прямую $y = 2x - 6$ и штрихуем определяемую область.

III. Рассуждаем аналогично. строим прямую $y = -2$ и штрихуем определяемую область.

Построение.

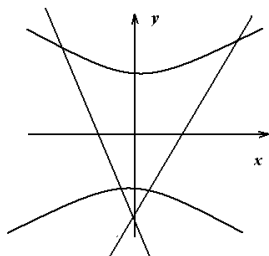


Рис. Б10