МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Тувинский государственный университет»

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Исследование некоторых плоских кривых

Работа допущена к защите
Зав. кафедрой ____________
Танзы М.В., к.п.н., доцент____
(фамилия, и.о., уч.степень, звание)

Студенты 4_курса_5_группы
направления подготовки 01.03.01
профиль «Математика»
очной формы обучения
Хертек Мерген Сарыг-оолович

____
(Ф. И. О.)

____
(подпись)

«__»_______________________20___г.

Работа защищена «__»________20__г.
С оценкой ______________________
Председатель ГЭК ______________
(подпись)
Сенашов В.И. д.ф-м.н., профессор
ведущий научный сотрудник Института
вычислительного моделирования
СО РАН,Красноярск

Члены комиссии ________________
____
____
____
(подписи)

Научный руководитель: _____________
(подпись)
Садовничий Ю. В., д.ф.-м.н., профессор
(фамилия, и. о., должность, уч.степень, звание)

Кызыл – 2020г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Кривая (линия) – след, оставленный движущейся точкой или телом. Обычно кривую представляют лишь как плавно изгибающуюся линию, вроде параболы или окружности. Но математическое понятие кривой охватывает и прямую, и фигуры, составленные из отрезков прямых, например, треугольник или квадрат. Кривые используются при решении различных задач. В связи с углублением знаний по математике в скором времени может понадобиться подробная информация о различных кривых.

Некоторые понятия кривых встречаются нам в нашей повседневной жизни, хотя чаще всего мы этого не замечаем. Например, по круговой траектории движутся планеты вокруг Солнца, по параболе – тело в однородном поле силы тяжести, брошенного под углом к горизонту и даже контуры или очертание природы описываются кривыми.

Знакомство с кривыми, с их свойствами позволит расширить геометрическое представление, повысит интерес к изучению геометрии, и в дальнейшем создаст содержательную основу для изучения математики, физики и других наук,.

Предметом исследования является изучение теории плоских кривых.

Цель данной работы: изучение свойств некоторых кривых, углубление и обобщение, расширение геометрических представлений об исследуемых кривых.

Цель исследования обусловила решение следующих задач**:**

1. Проанализировать учебно-методическую и научную литературу по теме исследования.
2. Изучить теорию плоских кривых, используя аппарат дифференциального исчисления и аналитической геометрии.
3. Рассмотреть несколько типов плоских кривых, изучить их историю, сделать вывод уравнения кривой, вычислить (вывести формулу) длины дуги кривой, найти площадь (при наличии), построить кривую.

Глава 1. Теоретические аспекты, связанные с исследованием плоских кривых.

1.1. Способы образования кривых

Исследование особенностей формы кривой и ее свойств средствами дифференциальной геометрии возможно, когда кривая выражена в аналитической форме, т.е. уравнением. Однако прежде чем исследовать уравнение кривых, необходимо его составить на основании некоторых данных. Для этого рассмотрим способы образования кривых.

1) Кривая определяется как линия пересечения данной поверхности с плоскостью, положение которой определено. Например, сечения кругового конуса, кривые Персея, Эвольвента круга определяется как линия пересечения поверхности касательных к винтовой линии, перпендикулярной к ее оси и другие.

2) Кривая определяется как геометрическое место точек, обладающих данным свойством.

3) Кривая определяется как траектория точки, характер движения которой обусловлен тем или иным образом. Кинематический способ образования линий был также хорошо известен греческим ученым. Как траекторию точки, участвующей одновременно в двух равномерных движениях, одно из которых совершается по прямой, а другие – по окружности, определил Архимед свою спираль. Все циклоидные кривые являются траекториями точки, жестко связанной с кругом, который катится без скольжения по окружности другого круга. Кинематическим путем определяется *квадратриса Диностратa* как траектория точки пересечения вращающегося радиуса окружности с хордой, движущейся параллельно самой себе. Лемниската Бернулли может быть определена как траектория середины большого звена шарнирного *антипараллелограмма*, противоположное звено которого закреплено. Кинематически определяются кривые и многие другие линии. Кинематический способ задания кривой полагается Декартом в основу определения кривых методом координат.

4. Образование линий способом сопряжения проективно соответствующих элементов. Этот способ сравнительно недавнего происхождения и во всей полноте рассматривается в курсах проективной геометрии. В основе его лежит идея соответствия двух проективных рядов точек или двух проективных пучков.

Проективно соответствующими называются две прямолинейной точки, если любым четырём гармоническим точкам одного из них соответствует также четыре гармонической точки второго ряда. Аналогично определяется проективное соответствие пучков прямых. На основе этих понятий и возникает проективный способ образования линий. Так, если имеются два проективных пучка прямых, то геометрическое место точек пересечения соответствующих прямых этих пучков представляет собой кривую второго порядка.

Точно так же, если заданы два проективно связанных прямолинейных ряда точек, то огибающая прямых, проходящих через соответствующие точки этих рядов, будет представлять собой кривую второго класса и одновременно второго порядка.

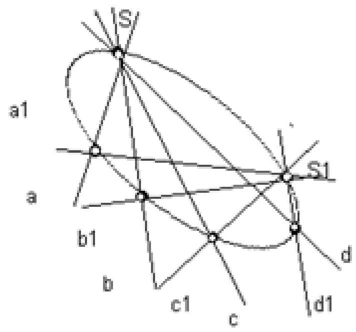


рис. 1.

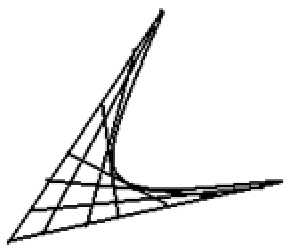


рис. 2.

На кривой второго порядка могут быть в свою очередь определены гармонические четвёрки точек, т.е. точки пересечения этой кривой с четырьмя гармонически сопряжёнными лучами пучка прямых, центр которого находится в какой-либо точке этой кривой. Так возникает понятие криволинейного проективного ряда, который в отличие от прямолинейного ряда называется *проективным рядом второго порядка*. Аналогично устанавливается понятие *пучка второго порядка,* под которым понимают упомянутую выше совокупность прямых, проходящих через соответствующие точки двух прямолинейных проективных рядов и огибающих кривую второго порядка.

Понятие ряда второго порядка и пучка второго порядка позволяет определить проективным способом алгебраические кривые высших порядков и классов.

Частным случаем проективного способа является *перспективное* соответствие, которое осуществляется путём проектирования двух плоских систем из общего центра. Соответствующие точки при этом лежат на одном проектирующем луче, а соответствующие прямые принадлежат одной проектирующей плоскости.

Способом проектирования могут быть получены многие из часто встречающихся кривых. Сюда относится циклоида, являющаяся параллельной проекцией винтовой линии на плоскость, параллельную её оси. Спираль Архимеда может быть определена как проекция конической винтовой линии на плоскость, перпендикулярную её оси. Овалы Декарта могут быть определены как проекции линии пересечения двух конических поверхностей с параллельными осями на плоскость, перпендикулярную к этим осям, и т.д.

5. Кривая определяется заданием её дифференциальных свойств.

Непосредственно задаваемое по условию задачи или вытекающее из этого условия соотношение между бесконечно малыми элементами кривой выражается сначала в виде некоторого дифференциального уравнения. Последующее интегрирование этого уравнения приводит к обычному уравнению искомой кривой. Такой способ определения уравнения кривой характерен для многочисленных задач геометрии, механики, физики, техники. Так показательная кривая может быть определена как линия, у которой подкасательная для всех точек имеет одно и то же значение. Трактриса характеризуется постоянством длины касательной. Радиоидальная спираль определяется как линия, для которой радиус кривизны обратно пропорционален длине дуги. На основании геометрических соображений и законов механики выводятся дифференциальные уравнения цепной линии, изогнутой оси балки и т.д.

6. Кривая определяется как линия, получаемая в результате того или иного геометрического преобразования уже известной кривой.

Этот способ образования кривых является наиболее эффективным. Он не только даёт неиссякаемые средства для определения новых кривых, но и позволяет определять свойства новой кривой как отражение свойств преобразуемой кривой.

К числу основных геометрических преобразований относятся *аффинное, проективное, инверсия, квадратичное, двойственное, касательное.*

7. Мы заключим обзор различных способов, дающих средства для аналитического определения кривых, ещё одним, естественным по сравнению с предыдущими, в том смысле, что составлять уравнение кривой в том смысле уже не приходится, так как кривая задаётся сразу же в аналитической форме и представляет собой график той или иной функции. Выше было замечено, что метод Декарта, которым определяется соответствие между линией и уравнением, даёт неограниченные возможности для определения кривых самых разнообразных форм. В арсенале замечательных кривых, используемых в науке и технике, имеется немало линий, которые исторически возникли аналитическим путём, т.е. определялись первоначально как кривые, соответствующие определённым уравнениям. к ним относятся декартов лист – график функции, определяемой уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Сюда же относятся параболы и гиперболы высших порядков – графики функций определяемых уравнением $y = cx^m$, кривые Ламе – графики функций, определяемые уравнением $(\frac{x}{a})^m - \left(\frac{x}{a}\right)^m = 1$. К аналитически определяемым кривым относятся также кривые, являющиеся графиками тригонометрических функций, показательной функции и многие другие.

1.2. Классификация плоских кривых

В этом параграфе рассмотрим классификацию плоских кривых.

Так как характерные особенности формы кривой и её свойства определяются особенностями и свойствами соответствующего ей уравнения, то естественно положить в основу классификации кривых природу их уравнений – подразделение уравнений на алгебраические и трансцендентные. Здесь, однако, возникает затруднение, заключающееся в том, что природа уравнения кривой зависит не только от природы самой кривой, но и от той системы координат, к которой отнесена кривая. Одна и та же кривая в одной системе координат может выражаться алгебраическим уравнением, а в другой – трансцендентным. Более того иногда достаточно изменить положение системы и уравнение кривой, которое было алгебраическим, становится трансцендентным. Так, например, в полярной системе координат уравнение окружности с центром в полюсе имеет вид $p = a$ и является, как видно, алгебраическим: но достаточно поместить полюс в какую-либо точку (p_1, φ_1), как уравнение принимает вида $a^2 = p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos(\varphi - \varphi_1)$ и становится, таким образом, трансцендентным.

Указанный недостаток отсутствует, однако, у прямоугольной декартовой системы координат. Параллельное смещение и поворот этой системы не меняют не только природу уравнения этой кривой, но и степень этого уравнения, если оно было алгебраическим. Естественно поэтому разделить все кривые на *алгебраические* и *трансцендентные* соответственно тому, будут ли их уравнения алгебраическими или трансцендентными в прямоугольной системе координат.

а) Алгебраические кривые

Внутри обширного семейства алгебраических линий в свою очередь производят подразделение кривых, в основу которого полагается понятие *порядка* кривой, определяемого степенью её уравнения.

Соответственно этому *алгебраической кривой n-го порядка называется кривая, уравнение которой, после освобождения его от дробей и радикалов, записывается в декартовой системе координат в виде*

$$\begin{aligned}
&A_0x^n + A_1x^{n-1}y + A_2x^{n-2}y^2 + \cdots + A_ny^n + \\
&B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2}y + B_2x^{n-3}y^2 + \cdots + B_{n-1}y^{n-1} + \\
&C_0x^{n-2} + C_1x^{n-3}y + C_2x^{n-4}y^2 + \cdots + C_{n-2}y^{n-2} + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\
&+L_0x + L_1y + M = 0
\end{aligned}$$

Очевидно, число членов уравнения равно $(n+1)(n+2)/2$. Разумеется, в частном случае некоторые коэффициенты могут быть нулями.

Если левая часть уравнения кривой разлагается на множители $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \ldots$, то такому уравнению будет соответствовать система кривых $\varphi_1(x,y) = 0, \varphi_2(x,y) = 0, \ldots$. В этом случае кривую n-го порядка называют *распадающейся* или *приводимой*.

В частности, когда левая часть уравнения кривой, которую мы обозначим через $f(x, y)$, является однородной функцией n-го измерения, кривая вырождается в систему прямых линий. Действительно, по известному свойству однородных функций, мы, полагая $y = \alpha x$, будем иметь $f(x, y) = x^n f(1, \alpha)$, и если a_1, a_2, ..., a_n – корни уравнения $f(1, \alpha) = 0$, то $f(x, y) = A_0(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \dots (\alpha - a_n)x^n = A_0\left(\frac{y}{x} - \alpha_1\right)\left(\frac{y}{x} - \alpha_2\right) \dots \left(\frac{y}{x} - \alpha_n\right)x^n =$
$= A_0(y - a_1 x)(y - a_2 x) \dots (y - a_n x)$.

Приравнивая к нулю каждый множитель, получим систему n прямых (среди которых могут быть и мнимые).

Рассмотрим разновидности алгебраических кривых.

Класс алгебраической кривой. Формулы Плюккера .

Алгебраические кривые классифицируются не только по их порядку, но и по их классу и роду (жанру).

Класс алгебраической кривой определяется степенью её уравнения в тангенциальных координатах – так называются коэффициенты u и v в уравнениях прямых $ux + vy + 1 = 0$, касающихся данной алгебраической кривой.

Класс кривой может быть также определён числом касательных, действительных и мнимых, которые можно провести к этой кривой из произвольной точки, не лежащей на ней.

Для получения тангенциального уравнения кривой и, следовательно, для определения её класса, представим себе, что данная кривая $f(x, y) = 0$ пересечена прямой $ux + vy + 1 = 0$. Условие того, что две точки её пересечения с кривой совпадают между собой, записанное в форме равенства, связывающего u и v, и будет искомым тангенциальным уравнением кривой.

Так, например, желая найти тангенциальное уравнение окружности $x^2 + y^2=1$, пересечём её прямой $ux + vy + 1 = 0$. Исключая y из уравнения этой прямой и окружности, получим $(u^2 + v^2) x^2 +2ux+(1- v^2)=0$. Условием касания прямой и окружности будет совпадение корней этого квадратного уравнения, что приводит к равенству $v^2 (1- u^2 - v^2)=0$. Подобным же образом получим равенство $u^2 (1- u^2 - v^2)=0$. Очевидно, полученные равенства будут удовлетворяться, если $1- u^2 - v^2=0$. Это и есть тангенциальное уравнение заданной окружности.

Если, наоборот, необходимо перейти от тангенциального уравнения $f(u,v)=0$ кривой к её обычному уравнению, то следует присоединить к этому уравнению уравнение $ux + vy + 1 = 0$ пучка всех касательных к кривой, проходящих через точку М (x, y). Условие того, что эта точка будет точкой касания, выразится равенством, определяющим условие совпадения двух касательных в одну (так как в тангенциальных координатах каждая точка кривой определяется как точка пересечения двух бесконечно близких касательных). Это равенство и будет искомым уравнением кривой в исходной системе.

Так, например, если дана в тангенциальных координатах кривая $u+v+uv=0$ то, желая иметь её обычное уравнение, рассмотрим пучок прямых $ux+vy+1=0$, проходящих через произвольную точку М*(x, y)*. Найдём те прямые этого пучка, которые касаются кривой. Исключая u из заданного уравнения кривой и уравнения пучка, получим: $v^2 y+v\ (1+y-x)+1=0$. Для того, чтобы две прямые, определяемые двумя значениями v в этом равенстве, совпали в одну, необходимо, чтобы эти значения v были равны между собой, а последнее произойдёт, если будет справедливым равенство $(1+y-x)^2-4y=0$, которое и представляет собой обычное уравнение к заданной кривой.

Порядок и класс линии, вообще говоря не совпадают, за исключением кривых второго порядка, которые одновременно являются кривыми второго класса. В общем случае при определении класса кривой приходится принимать во внимание не только её порядок, но и ряд её характерных особенностей – наличие у неё двойных точек, точек перегиба, двойных касательных и т.д. Именно, если n – порядок кривой, k – класс кривой, d – число двойных точек (узловых и изолированных), r – число точек возврата, t – число двойных касательных (т.е. прямых, касающихся кривой в двух точках), w – число точек перегиба кривой, то между всеми этими величинами существуют следующие соотношения:

$k=n(n-1)-2d-3r,\ n=k(k-1)-2t-3w,$

$w=3n(n-2)-6d-8r,\ r=3k(k-2)-6t-8w.$

Эти равенства называются *формулами Плюккера* и были приведены им впервые в его «Системе аналитической геометрии на плоскости» в 1834 году.

Род алгебраической кривой.

Известно, что не распадающаяся кривая n-го порядка может иметь не более чем $((n-1)(n-2)/2)$ двойных точек. Действительно, если бы она имела, например, $\left(\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)+1\right)$ двойных точек, то через эти точки и через $n-3$ других точек её можно было бы, как легко видеть, провести кривую порядка $(n–2)$. Но так как каждая двойная точка первой кривой должна считаться за две точки пересечения её со второй кривой, то получается, что эти кривые имели бы $\left(2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\right]+n-3=n(n-2)+1\right)$ общих точек. Последнее, однако, невозможно, так как не распадающийся кривой будет справедливо и для точек высшей кратности, если точку кратности k считать за $(k(k-1)/2)$ двойных точек. Например, кривая 5-го порядка может иметь семь двойных точек и одну тройную $\left(7+\frac{3\cdot 2}{2}=\frac{5\cdot 4}{2}\right)$. Это соглашение оправдывается тем, что через точку кратности k проходит k ветвей этой кривой. Если их представлять себе отделёнными от кратной точки, то, пересекаясь попарно, они дадут $k(k-1)/2$ двойных точек, которые, совпадая, и образуют точку кратности k.

Дадим понятие рода кривой. *Род, или жанр, алгебраической кривой определяется числом p, являющейся разностью между наибольшим числом двойных точек, которые может иметь кривая этого порядка, и их фактическим числом у данной кривой.* С ранее упомянутыми числовыми характеристиками алгебраической кривой эта новая характеристика p связана соотношениями

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r,$$

$$p = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - t - \omega,$$

Если рассматриваемая кривая имеет наибольшее число двойных точек, возможных для кривых её порядка, то, очевидно, это будет кривая *нулевого рода.* Эти кривые обладают весьма важным свойством, а именно, *координаты точки, двигающейся по такой кривой, могут быть выражены рациональными функциями некоторого параметра.*

1) Рациональные кривые

Рациональными являются кривые четвёртого, имеющие три двойные точки. Координаты точки таких кривых являются целыми рациональными функциями 4-й степени от параметра.

Укажем два способа конструктивного образования рациональных кривых 4-го порядка.

С проективной точки зрения рациональная кривая 4-го порядка определяется пересечением прямых, принадлежащих некоторому пучку, с прямыми проективно соответствующего ему пучка касательных к некоторой кривой второго порядка.

Рациональные кривые четвертого порядка могут быть получены также квадратичным преобразованием кривой второго порядка. Действительно, если рациональную кривую второго порядка отнести к координатному треугольнику, вершины которого совпадают с тремя двойными точками этой кривой, то уравнение её запишется в виде

$$ax_2^2x_2^8 + bx_3^2x_1^2 + cx_1^2x_2^3 + 2dx_1x_2x_3^2 + 2ex_2x_3x_1^2 + 2gx_3x_1x_2^2 = 0.$$

Пользуясь формулами квадратичного преобразования

$$x_1 = \rho \grave{x}_2 \grave{x}_3,$$

$$x_2 = \rho \grave{x}_1 \grave{x}_3,$$

$$x_3 = \rho \grave{x}_1 \grave{x}_2,$$

получим уравнение:

$$ax_1'^2 + bx_2'^2 + cx_3'^2 + 2dx_1'x_2' + 2ex_2'x_3' + 2gx_1'x_3' = 0,$$

которое выражает кривую 2-го порядка, например, окружность, пересекает какую-либо сторону координатного треугольника в двух точках, то соответствующая кривая второго порядка должна иметь, по свойству квадратичного преобразования, в противолежащей вершине этого треугольника две касательные и, значит, узловую точку. Если указанные две точки совпадают в одну, то совпадают в одну и соответствующие им касательные и, значит, узловую точку. Также если указанные две точки совпадают в одну, то совпадают в одну и соответствующие им касательные, и следовательно, кривая четвёртого порядка будет иметь в вершине треугольника точку возврата. Если, наконец, точки пересечения кривой второго порядка со стороной треугольника будут мнимыми, то противолежащая вершина треугольника является изолированной точкой кривой четвёртого порядка.

На рисунке 2 все эти случаи предусмотрены, причём соответствующие элементы помечены одинаковыми цифрами.

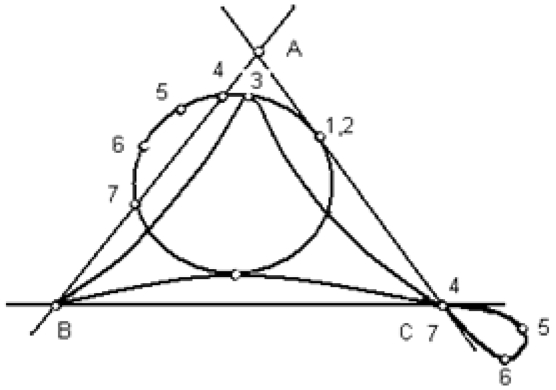


Рис. 2

Из сказанного следует, что если преобразуемая кривая второго порядка пересекает стороны координатного треугольника в шести точках, то кривая четвёртого порядка будет иметь три узловые точки; если эти шесть точек мнимые, то им будут соответствовать три изолированные точки; если они попарно совпадают, то соответствующая кривая 4-го порядка будет иметь три точки возврата.

Особенности формы этой кривой зависят также от того, пересекает ли кривая второго порядка стороны координатного треугольника или их продолжения. Частные формы кривых, зависящие от этого обстоятельства, представлены на рисунке 3 – 6, где в качестве преобразуемой кривой второго порядка взята окружность.

Проследить особенности формы получающихся при квадратичном преобразовании кривых 4-го порядка можно, осуществляя преобразование заданной кривой второго порядка аналитически, но можно воспользоваться и графическим способом осуществления такого преобразования.

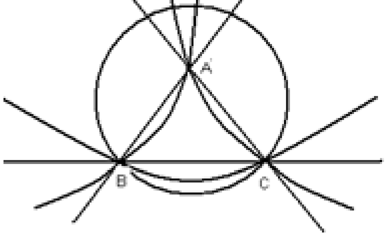


Рис. 3

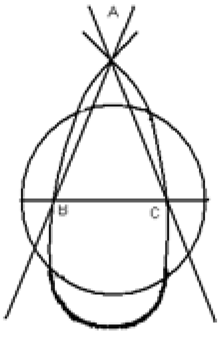


Рис. 4

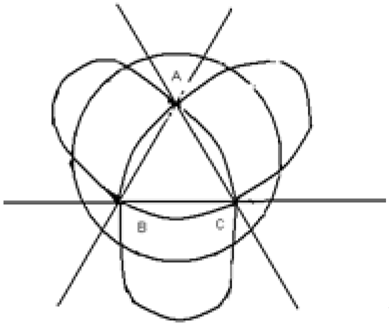


Рис. 5

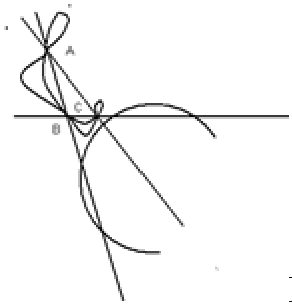


Рис. 6

Если прямая c_1 проходит через вершину координатного треугольника, то при преобразовании ей будут соответствовать две прямые – прямая c_2, проходящая через ту же вершину, и противолежащая сторона треугольника (кривая второго порядка, которая должна соответствовать прямой в общем случае, здесь распадается). Углы, составляемые прямой c_1 и прямой c_2 с биссектрисой угла А равны (рис. 7). Это обстоятельство и определяет графический способ осуществления квадратичного преобразования; а именно, чтобы найти точку P_2, соответствующую заданной точке P_1 с какой-либо вершиной треугольника, например с А, и проводим через вершину А прямую c_2 , симметричную прямой P_1 А относительно биссектрисы угла А (рис. 8). Проводя аналогичное построение относительно вершины В, получим искомую точку P_2 как точку пересечения найденных прямых.

Осуществляя графическим путём квадратичного преобразования для ряда точек преобразуемой кривой, мы получим соответствующие точки новой кривой.

Графический способ даёт возможность определить наличие бесконечно удалённых точек кривой 4-го порядка, получаемой в результате квадратичного преобразования.

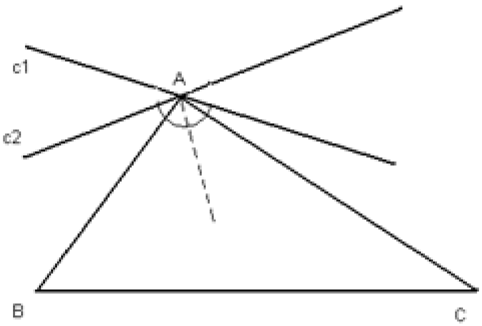


Рис. 7

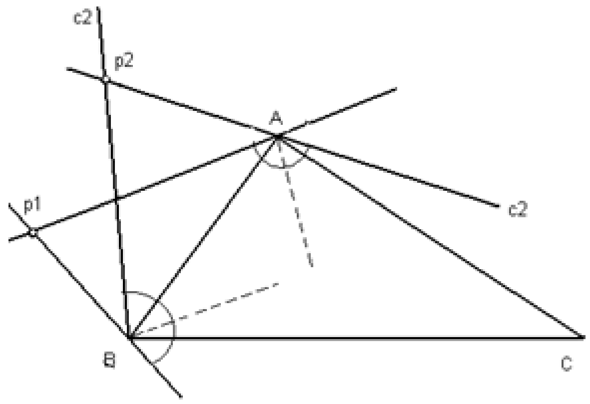


Рис. 8

Для этого потребуется уравнение бесконечно удалённой прямой в трилинейных координатах [1].

Квадратичное преобразование устанавливает соответствие между точками описанной около координатного треугольника окружности и точками бесконечно удалённой прямой.

Отсюда следует, что кривая 4-го порядка, получаемая в результате квадратичного преобразования кривой 2-го порядка, будет иметь бесконечно удалённые точки лишь в том случае, если преобразуемая кривая пересекает окружность, описанную около координатного треугольника.

Чтобы определить направление, в котором удалена точка кривой в бесконечность достаточно построить указанным выше графическим путём, образ точки пересечения кривой с описанной около координатного треугольника окружностью.

2) Эллиптические кривые.

Более сложными по своей природе являются кривые первого рода. Правые части их параметрических уравнений могут быть выражены эллиптическими функциями параметра, в силу чего такие кривые называют эллиптическими, и при изучении их широко пользуются свойствами эллиптических функций.

Подобно тому, как рациональные кривые 4-го порядка могут быть получены квадратичным преобразованием кривых второго порядка, эллиптические кривые 4-го порядка получаются квадратичным преобразованием кривых третьего порядка, не имеющих двойных точек и проходящих через две вершины координатного треугольника.

3) Циркулярные кривые

Циркулярные кривые являются алгебраическими кривыми, проходящими через циклические точки плоскости. Уравнение окружности, записанное в однородных координатах, имеет вид $x_1^2 + x_2^2 + 2Ax_1x_3 + 2Bx_2x_3 + Cx_3^2 = 0$. Точки пересечения этой окружности с несобственной прямой $x_3 = 0$определяются системой$\frac{x_2}{x_1} = i, x_3 = 0$. Полагая $x_1 = 1$, находим эти точки $J_1 (1, i,0)$ и $J_2 (1,- i,0)$. Так как изменение коэффициентов A, B, C в уравнении окружности не изменяет найденных координат, то можно утверждать, что всякая окружность проходит через точки J_1 и J_2, которые являются несобственными и мнимыми точками этой окружности и называются *круговыми* или *циклическими* точками плоскости.

4) Бициркулярные кривые

Эти кривые получаются в результате стереографической проекции линии пересечения поверхности шара с поверхностью второго порядка, не проходящей через центр проекции.

Интересными свойствами обладают бициркулярные кривые 4-го порядка, если они одновременно являются рациональными кривыми. Будучи рациональными, эти кривые должны иметь три двойные точки, но две двойные точки их должны совпадать с циклическими точками плоскости, и следовательно, они будут иметь только одну двойную точку, не являющуюся бесконечно удалённой.

Общее уравнение таких кривых может быть записано в виде

$(x^2+y^2)+(dx+ey)(x^2+y^2)+ax^2+bxy+cy^2=0.$ (1)

Уравнение касательной в двойной точке имеет вид:

$ax^2+bxy+cy^2=0.$

В зависимости от знака (или равенства нулю) дискриминанта b^2-4ac, двойная точка кривой окажется изолированной, точкой возврата или узловой.

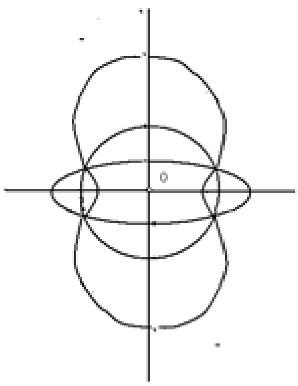


Рис. 9

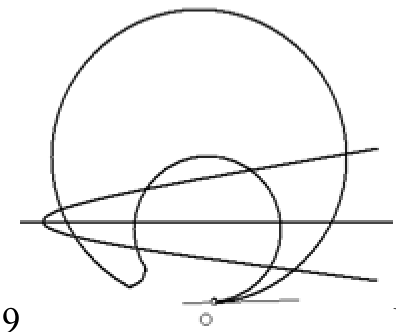


Рис. 10

Бициркулярные рациональные кривые 4-го порядка могут быть образованы инверсией кривой второго порядка, но при условии, что полюс инверсии не лежит на этой кривой [1].

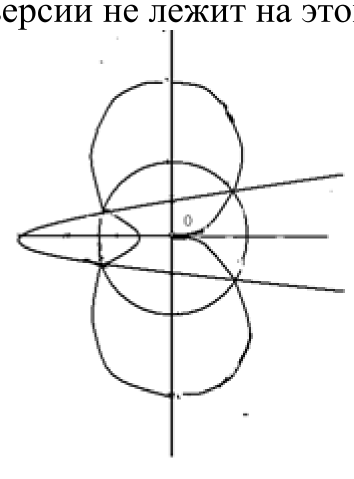


Рис. 11

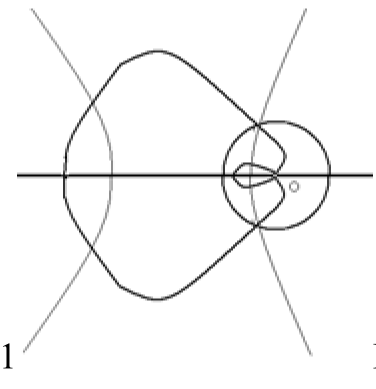


Рис. 12

На рисунке 9 представлена инверсия эллипса, причём полюс инверсии находится в центре эллипса, который является изолированной точкой кривой. На рис. 10 и 11 приведена инверсия параболы, а на рис. 12 – инверсия гиперболы, причём полюс инверсии находится в фокусе гиперболы.

б) трансцендентные кривые

Трансцендентными называются кривые, уравнения которых, будучи записаны в прямоугольной системе координат, не являются алгебраическими.

Разлагая в ряд правую часть уравнения такой, например, трансцендентной кривой, как $y = sinx$, мы получим уравнение, содержащее алгебраические функции, однако число членов в нём будет неограниченным, а степень – бесконечно большой. Это даёт основание рассматривать трансцендентные кривые как алгебраические линии бесконечно высокого порядка. Соответственно этому можно полагать, что характерные точки алгебраических кривых (точки пересечения с прямой, точки перегиба, особые точки и т.д.) у трансцендентных кривых могут встречаться в бесконечном количестве. И это на самом деле так: трансцендентная кривая может пересекать прямую в бесконечном числе точек, у неё может быть бесконечное множество вершин даже на сколь угодно малом интервале (например, у кривой $y = \sin\frac{1}{x}$ вблизи начала координат), бесконечное количество точек перегиба, асимптот и т.д.

Но помимо этой особенности, у трансцендентных кривых могут быть характерные точки особой природы, которые не существуют у алгебраических кривых. К ним относятся *точки прекращения*, обладающие той особенностью, что окружность достаточно малого радиуса, проведённая из такой точки как из центра, пересекает кривую только в одной точке (например, кривая $y = xlnx$, имеющая точку прекращения в начале координат). Сюда относятся также *угловые точки*, в которых прекращаются две ветви кривой, причём каждая из них имеет в этой точке свою касательную (например, кривая $y = x\,arctgx + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$, имеющая угловую точку в начале координат).

Трансцендентная кривая может иметь также *асимптотическую точку*, к которой неограниченно приближается ветвь кривой, делая вокруг этой точки бесконечное количество оборотов (например, логарифмическая спираль $r = a^j$, для которой асимптотической кривой является полюс).

Помимо указанных характерных точек, трансцендентные кривые могут обладать весьма своеобразными особенностями формы. Кривая может иметь, например, пунктирную ветвь, состоящую из бесконечного множества изолированных точек (например, кривая, $y = \sqrt{x}sinx$ имеет пунктирную ветвь, располагающуюся вдоль отрицательной части абсцисс и состоящую из множества изолированных точек с абсциссами *-p, -2 p, -3 p,…*).

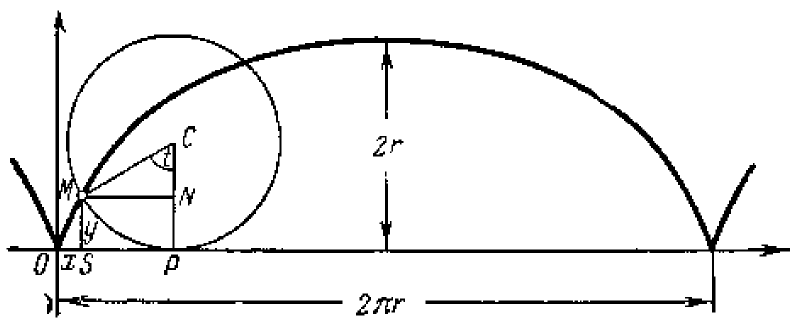
До сих пор нет удовлетворительной классификации трансценденных кривых. Попытки определить основы теории трансцендентных кривых были мало состоятельны.

Одна из таких попыток заключалась в следующем. Было замечено, что у подавляющего числа известных трансцендентных кривых также, как и у всех алгебраических кривых, *угловой коэффициент y' касательной в каждой точке кривой является корнем алгебраического уравнения, коэффициенты которого представляют собой полиномы от x и y.* Иными словами, дифференциальные уравнения подавляющего большинства известных в науке трансцендентных кривых являются уравнениями первого порядка вида $\sum_{\gamma=0}^{\gamma=n} f_\gamma(x,y)\, y'^{\,n-\gamma} = 0.$

Глава 2. Исследование некоторых кривых.

2.1 Циклоида.

Кривую, называемую циклоидой, можно определить, как траекторию точки, лежащей на окружности круга, который без скольжения катится по прямой.



Принимаем прямую, по которой катится круг с радиусом r, за ось абсцисс. Полагаем, что в исходном положении вычерчивающая точка находилась в начале координат, а после того как круг повернулся на угол t, заняла положение *M.*(рис.1.)

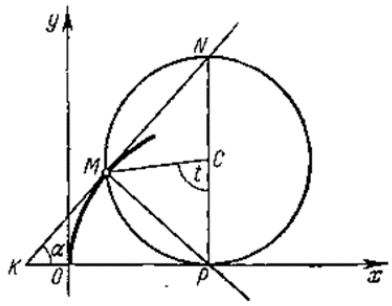
Имеем: *x=OS=OP-SP, y=MS=CP-CN*; но *OP=MP=rt, SP=MN=rsint, CP=rcost*; следовательно, параметрические уравнения циклоиды запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= rt - rsint, \\ y &= r - rcost. \end{aligned}\right\} (1)$$

Исключая параметр t, получим уравнение циклоиды в прямоугольной системе

$$x = r\,arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Из самого способа образования циклоиды заключаем, что она должна состоять из конгруэнтных арок, каждая из которых соответствует полному обороту производящего круга. Расстояние между началом и концом каждой такой арки равно *2πr*–длине окружности производящего круга, а наибольшая ордината – диаметру этого круга.



Точки сопряжения арок, для которых, $x = 0, \pm 2\pi r, \pm 4\pi r, \ldots$,являются особыми. Для уяснения их природы найдем угловой коэффициент касательной точке циклоиды. Имеем $tg\ a = \frac{dy}{dx} = \frac{rsint}{r - rcost} = ctg\frac{t}{2} = tg(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})$, откуда $a = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$.

В точке сопряжения арок, например при $t = 0$, получим $a = \frac{\pi}{2}$; следовательно, в точках сопряжения арок касательные к ним совпадают в одну, перпендикулярную к оси абсцисс, а значит, эти точки будут точками возврата.

Рассмотрим далее ряд свойств циклоиды и прежде всего свойства ее *касательных* и *нормалей*.

Обращаясь к рис. 2, видим, что прямая *NK*, проходящая через точку *M*и высшую точку *N*производящего круга, составляет с осью абсцисс угол, равный $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$; она, следовательно, и будет касательной к циклоиде в заданной точке *M*.

Далее, так как угол $NMP = \frac{\pi}{2}$, то прямая *MP* будет нормалью циклоиды в точке *M*. Таким образом, *касательная к циклоиде в произвольной ее точке проходит через высшую точку производящего круга, а нормаль – через его низшую точку.*

Это свойство определяет простой способ построения касательной и нормали в любой точке заданной циклоиды.

Радиус кривизны в произвольной точке циклоиды определится равенством

$$R = 4r\sin\frac{t}{2}. \ (2)$$

Важное свойство радиуса кривизны циклоиды можно обнаружить, определив длину нормали в соответствующей точке. Тогда имеем:

$$N = y\sqrt{1+\acute{y}^2} = r(1-cost)\sqrt{1+\left(\frac{sint}{1-cost}\right)^2} = 2rsin\frac{t}{2}. \ (3)$$

Сопоставляя равенства (2) и (3), получим соотношение $R = 2N$, т. е. *радиус кривизны в произвольной точке циклоиды равен удвоенной длине соответствующей нормали.*

Определяя длину дуги циклоиды от исходной точки, где $t = 0$, до некоторой точки ***M (t)***, будем иметь:

$$S = \int_0^t \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_0^t 2r\sin\frac{t}{2}dt = 4r(1-\cos\frac{t}{2}) = 8r\ sin^2\frac{t}{4}. \ (4)$$

Пологая $t = 2\pi$, приходим к заключению, что *длина одной арки циклоиды равна 8*r*, т. е. четырем диаметрам производящего круга.*

Исключая из равенства (2) и (4) параметр t, получим натуральное уравнение циклоиды в виде

$$R^2 + (S-4r)^2 = 16r^2$$

По виду уравнения, которое мы получили, заключаем, что если циклоида катится по прямой, то геометрическое место ее центров кривизны соответствующих точкам касания, представляет собой окружность, радиус которой в 4 раза больше радиуса производящего круга.

Циклоида строится в следующей последовательности:

1. На направляющей горизонтальной прямой откладывают отрезок A_1A_2, равный длине производящей окружности радиуса r, $(2\pi r)$;
2. Строят производящую окружность радиуса r так, чтобы направляющая прямая была касательной к ней в точке A;
3. Окружность и отрезок A_1A_2 делят на несколько равных частей, например, на 12;

4. Из точек делений 1^1, 2^1, 3^1, $\ldots 12^1$ восстанавливают перпендикулярны до пересечения с продолжением горизонтальной оси окружности в точках O_1, O_2, $\ldots O_{12}$;

5. Из точек деления окружности 1, 2, …12 проводят горизонтальные прямые, на которых делают засечки дугами окружности радиуса r.

Полученные точки A_1, A_2, $\ldots A_{12}$ принадлежат циклоиде.

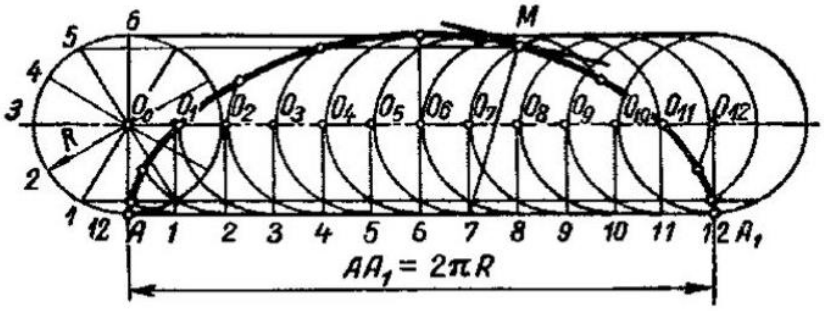


Рис 1.

Параметрическое уравнение циклоиды. Допустим, что нам дана циклоида, образованная окружностью радиуса a. Параметрические уравнения циклоиды, будут иметь вид:

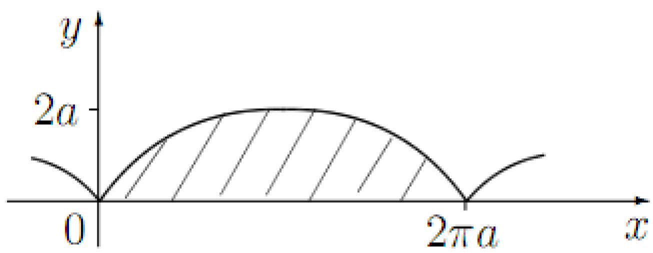
$$\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}, \text{где } (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Задачи на нахождение частей циклоиды и фигур, образованных циклоидой.

*Задача №1.*Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды, уравнение которой задано параметрическим способом

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - cost) \end{cases}$$

и осью Ох. Рис. 2.



Решение:

$$S = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} dt - 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos t + \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1+\cos 2t) dt =$$

$$= a^2 t\Big|_0^{2\pi} - 2a^2 \sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2} t\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{4} \sin 2t\Big|_0^{2\pi} = a^2 2\pi + \frac{a^2}{2} 2\pi = 2\pi a^2.$$

Задача №2. Найти длину одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases}$$

Решение: $L_{AB} = \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$

Имеем $x' = \frac{dx}{dt} = a\,(1 - cost)$, $y` = \frac{dy}{dt} = a \sin t$, а поэтому

$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 sin^2 t} dt = 2a \int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2} dt = 4cos\frac{t}{2}|_0^{2\pi} = 8a.$

Задача №3. Найти площадь поверхности S, образованной от вращения одной арки циклоиды.

Решение: В интегральном исчислении существует следующая формула для нахождения площади поверхности тело вращения вокруг Ox кривой, заданной на отрезке $[a, b]$параметрическим способом: $x = \varphi(t)$, $y = \omega(t), (a \le t \le b)$

$$|S| = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} \omega(t)\sqrt{\varphi^2(t) + \omega^2(t)} dt.$$

Применяя нашу формулу для нашего уравнения циклоиды получаем:

$$|S| = 2\pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - cost)\sqrt{\varphi^2(t) + \omega^2(t)} dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} 4sin^3\frac{t}{2} dt = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

Задача №4. Найти объем тела, полученного при вращении арки циклоиды.

Решение: $V = \pi \int_a^\beta \omega^2(t) \cdot \varphi`(t)\, dt$

$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - cost)^3\, dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3cost + 3cos^2 t - cos^3 t)\, dt =$
$\pi a^3 \left((t - 3sint) \Big|_0^{2\pi} - 3\int_0^{2\pi} (1 + cos2t)dt + \int_0^{2\pi} (1 - sin^2 t) d(sint) \right) = \pi a^3 (2\pi + 3\pi) =$
$5\pi^2 a^3$.

2.2. Эпициклоида

Эпициклоида – кривая, образуемая фиксированной точкой окружности, катящейся по внешней стороне другой окружности без скольжения.

Если центр неподвижной окружности находится в начале координат, ее радиус равен R, радиус катящейся по ней окружности равен r, то эпициклоида описывается параметрическими уравнениями относительно φ;

$$\begin{cases} x = (R + r)cos\varphi - rcos(\alpha + \frac{R+r}{r}\varphi) \\ y = (R + r)sin\varphi - rsin(\alpha + \frac{R+r}{r}\varphi) \end{cases} \quad (1)$$

Где α – угол поворота точки, описывающий эпициклоиду, относительно центра подвижной окружности в момент начало движения (против часовой стрелки от оси x), φ – параметр, но фактический это угол наклона отрезка между центрами к оси *OX*.

Введем величину $k = \frac{R}{r}$, тогда уравнение предстанет в виде:

$$\begin{cases} x = r(b + 1)(cos\varphi - \frac{\cos((b+1)\varphi)}{b+1}) \\ y = r(b + 1)\left(sin\varphi - \frac{\sin((b+1)\varphi)}{b+1}\right) \end{cases}. \quad (2)$$

Величина k определяет формулу эпициклоиды. При b=1 эппициклоида образует *кардиоду*, а при $b = 2$ *нефроиду*. Если k – не сократимая дробь вида $\frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$, то m–это количество *каспов* данной эпициклоиды, а n – количество полных вращений катящейся окружности. Если k*иррациональное число*, то кривая является незамкнутой и имеет бесконечное множество не совпадающих каспов.

Исследуем эпициклоиду (в общем уровнении эппициклоиды значение параметра a=1):

А) зафикцируем значение параметра b=1. И получется график(рис. 3.):

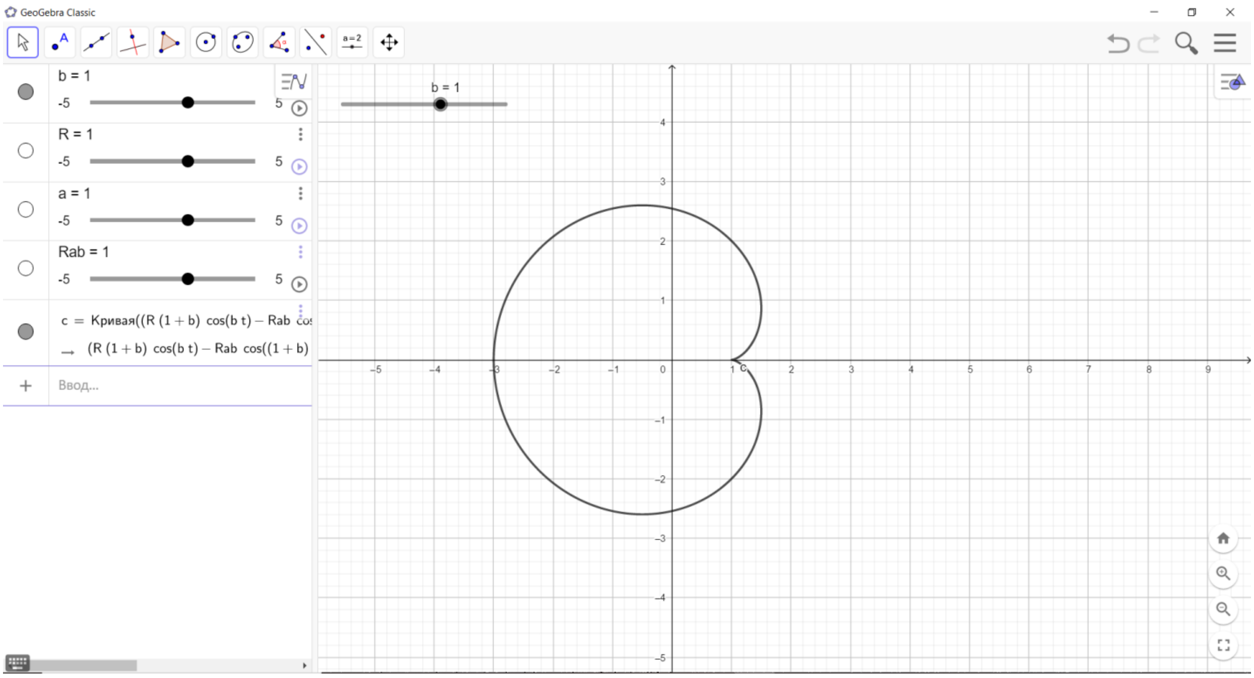


Рис. 3.

При b=1 получается «Кардиоида».

Б) При b=1/2 получаем «Нефроиду» (рис. 4.)

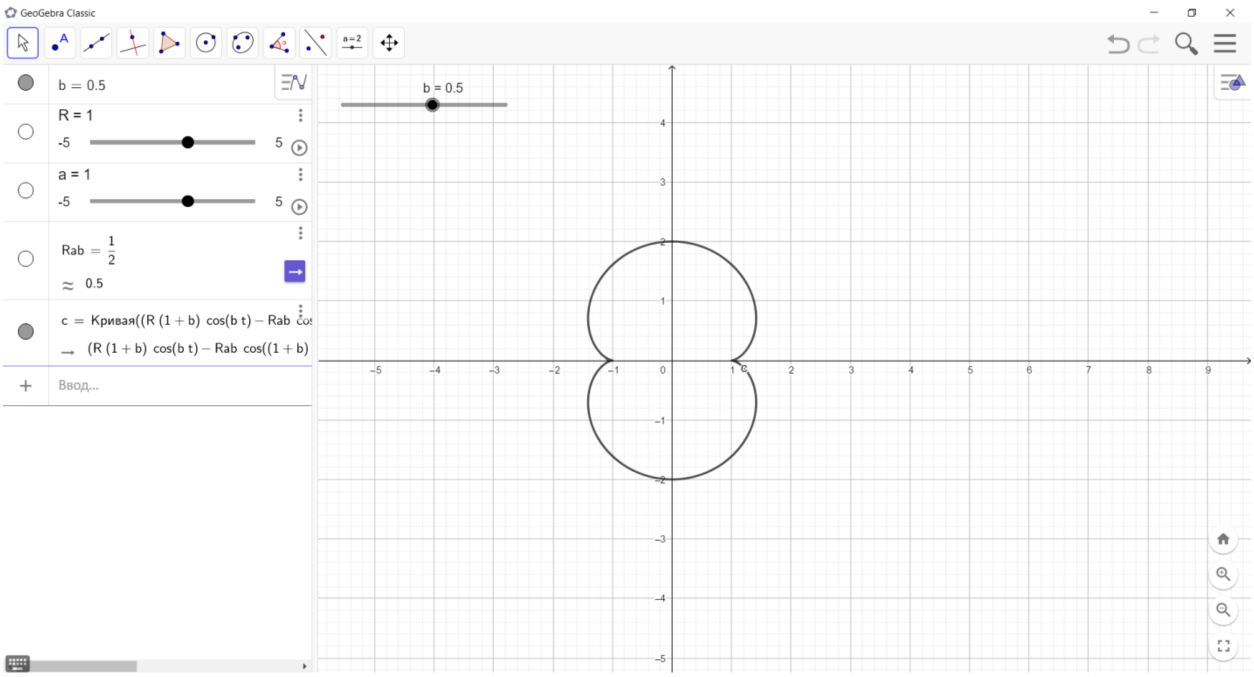


Рис. 4.

в) при b=1/3 получим график (рис. 5.):

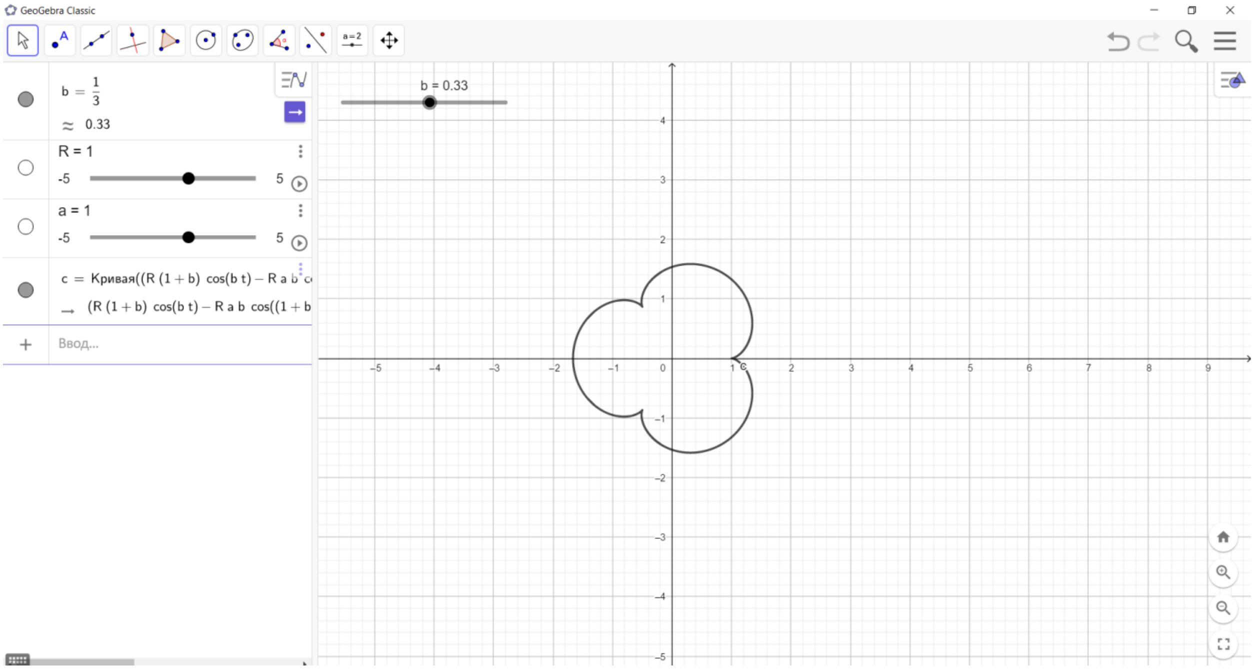


Рис. 5.

Г) Возьмем произвольно число b=3/8 то получится (рис. 6.):

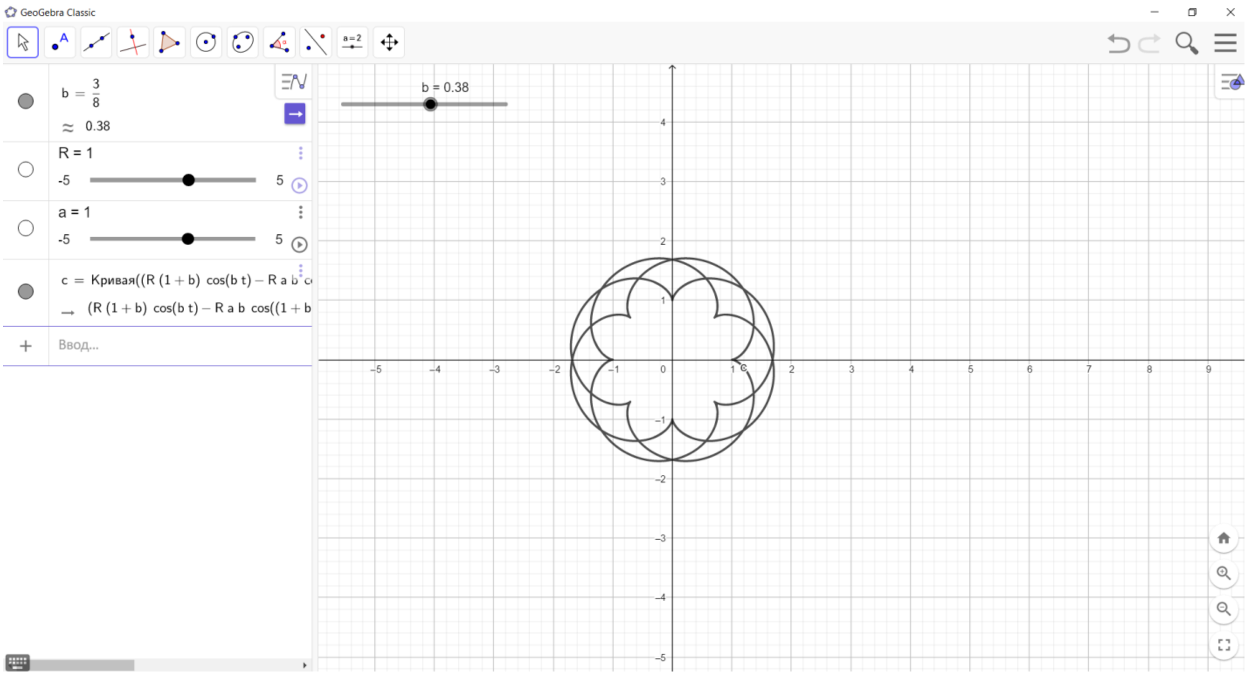


Рис. 6.

2.3. Гипоциклоида

Гипоциклоида – плоская кривая, образуемая точкой окружности, катящейся по внутренней стороне другой окружности без скольжения.

$$\begin{cases} x = r(k-1)(cost + \frac{\cos((k-1)t)}{k-1}) \\ y = r(k-1)(sint - \frac{\sin((k-1)t)}{k-1}) \end{cases} \text{(а)}$$

- параметрическая формула гипоциклоиды.

Где $k = \frac{R}{r}$, где R – радиус неподвижной окружности, r – радиус катящейся окружности.

Вывод уравнений: Пусть в начальный момент окружности касаются в точке $\boldsymbol{A}$, лежащей на оси $\boldsymbol{OX}$, где точка O – центр большой окружноси. Координаты точки А при этом – ***(kr, 0)***, где $k = \frac{R}{r}$.

Рассмотрим, как меняются координаты точки A, привязанной к катящейся окружности ($\boldsymbol{A}$ переходит в $\boldsymbol{A'}$).

Пусть в начальный момент окружность прокатилась так, что ее цетр перешел из точки $\boldsymbol{C'}$в точку $\boldsymbol{C'}$и повернулся относительно точки $\boldsymbol{O}$на угол t. Во-первых можно показать, что поворот маленькой окружности относительно своего центра при этом (т.е. угол между $\boldsymbol{CA}$и $\boldsymbol{C'A'}$**)** равен $t - kt = -(k-1)t$. Во вторых, координаты точки $\boldsymbol{C}$`будут такими:

$$(\cos(t)\,(k-1)r, \sin(t)\,(k-1)r).\text{(б)}$$

Тогда, зная, куда перейдет центр катящейся окружности, и на какой угол она повернулась относительно этого центра, можно записать координаты точки $\boldsymbol{A'}$:

$$\begin{cases} x = \cos(t)\,(k-1)r + \cos\big((k-1)t\big)\,r \\ y = \sin(t)\,(k-1)r - \sin\big((k-1)t\big)\,r \end{cases} \text{(в)}$$

Модуль величины kопределяет форму гипоциклоиды. При, $k = 2$, гипоциклоида описывается *парой Туси* – это диаметр неподвижной окружности, при$k = 4$является астроидой.Пара Туси – пара кругов в которой малый круг вращается без проскальзывания внутри круга вдвое большего диаметра. При движении каждая точка на окружности меньшего круга описывает (свой) диаметр большего круга; это частный случай гипоциклоиды. Если модуль k – **несократимая дробь** вида, $\frac{m}{n}(m, n \in N)$, то m – это количество каспов данной гипоциклоиды, а $(m = n)$ – количество полных вращений катящейся окружности. Если модуль kиррациональное число, то кривая является незамкнутой и имеет бесконечное множество несовпадающих каспов.

Возьмем, для исследования его графиков, общую параметрическую формулу (а), которая задана в начале:

1) Общий график гипоциклоиды (Астроида) (рис. 7)

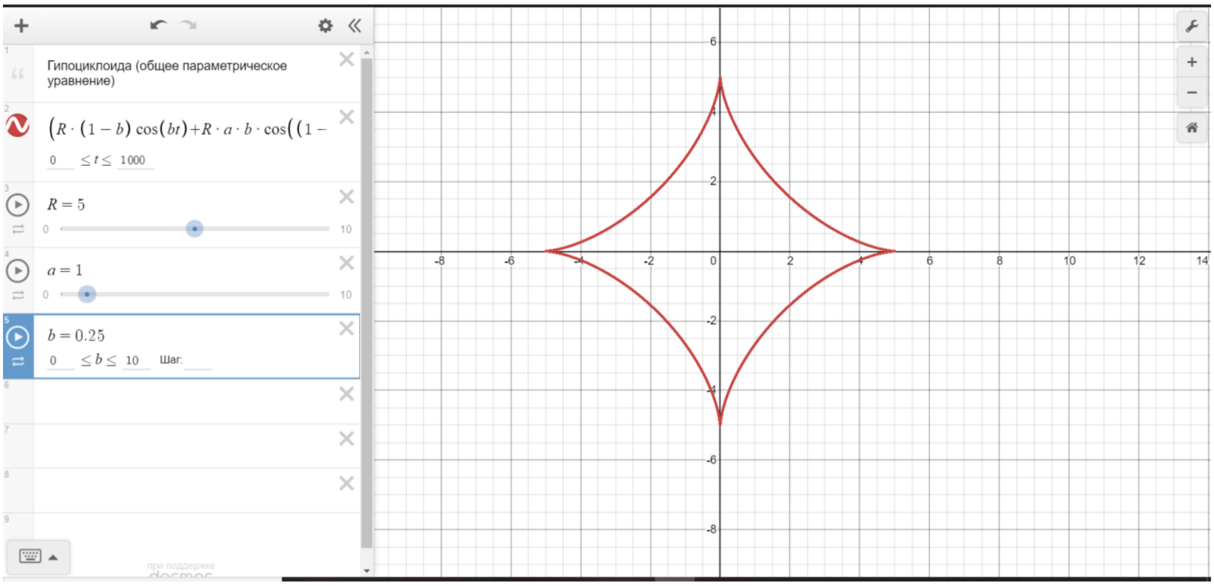


Рис. 7.

2) Укороченная гипоциклоида (рис. 8):

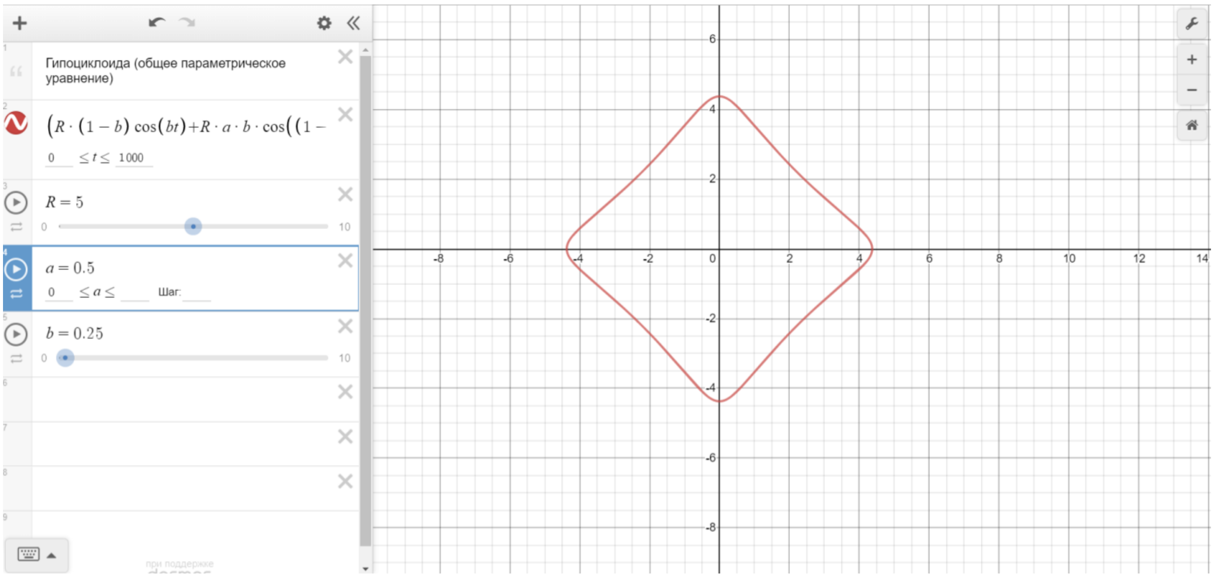


Рис. 8.

3) Удлиненное гипоциклоида (рис. 9):

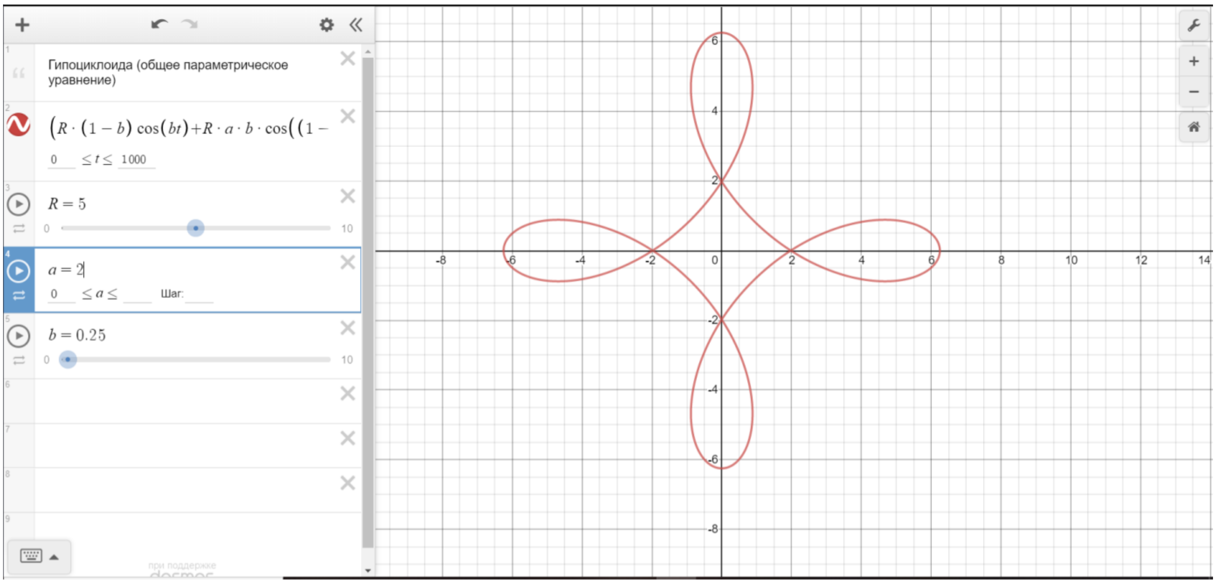


Рис. 9.

4) Возьмем случайные данные, радиуса в результате получаем график

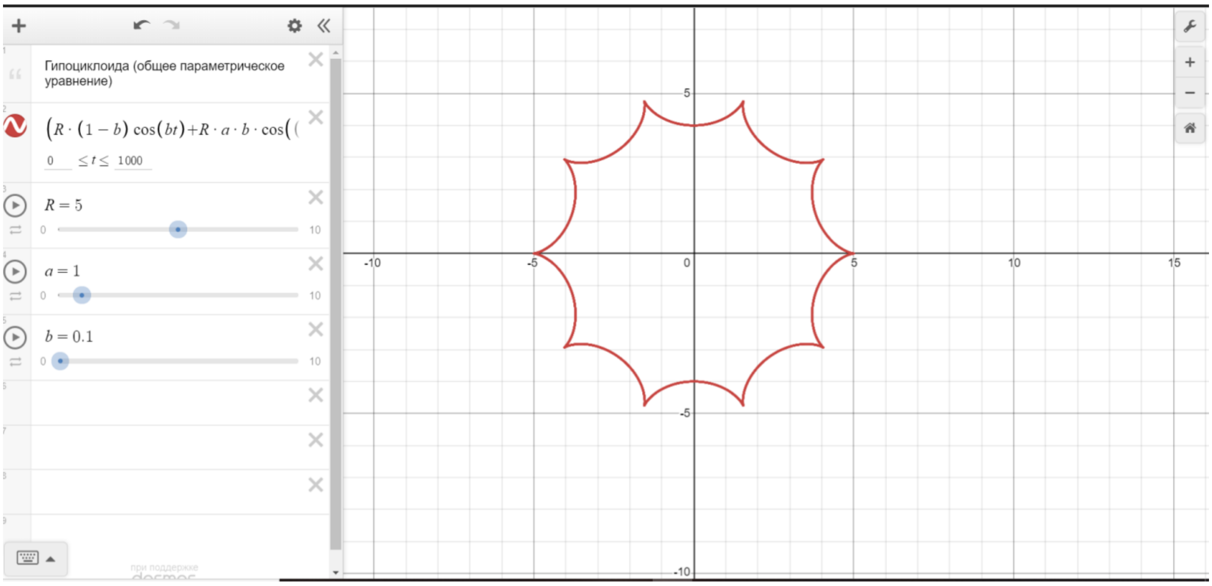


Рис. 11.

5) Фиксируя, a=1, b=0,4 получаем график звезды:

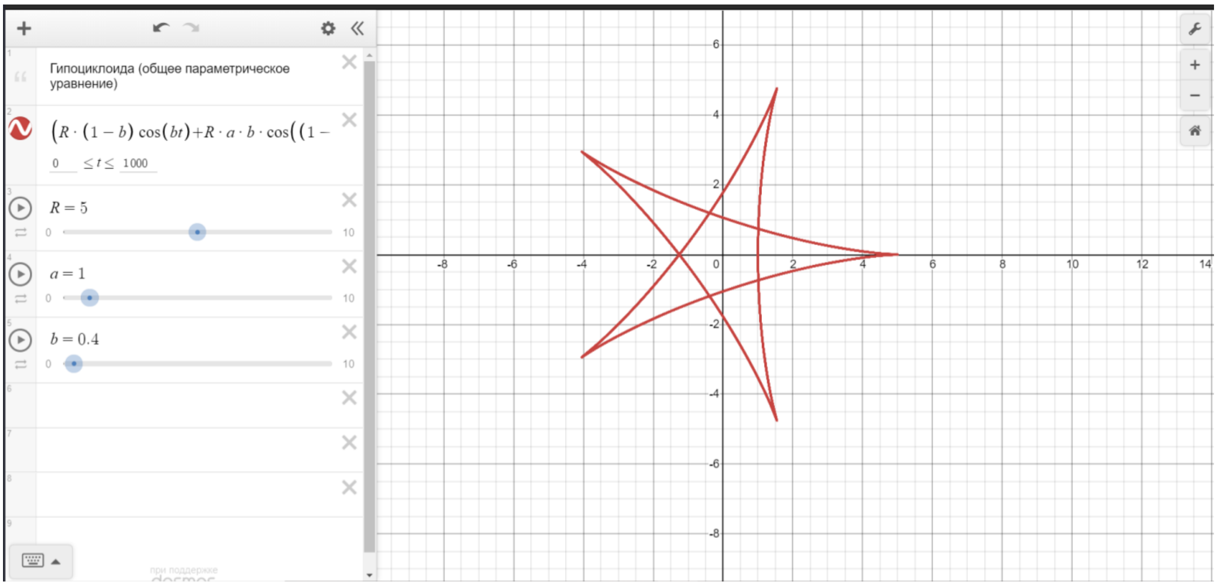


Рис. 12.

2.4. Гипотрохоида

Гипотрохоида – плоская кривая, которая образуется фиксированной точкой, находящейся на фиксированной радиальной прямой окружности, катящейся по внутренней стороне другой окружности.

Параметрические уравнения в прямоугольной системе:

$$\begin{cases} x = (R-r)cos\varphi + hcos(\frac{R-r}{r}\varphi) \\ y = (R-r)sin\varphi - hsin(\frac{R-r}{r}\varphi) \end{cases}$$

Частным случаем гипотрохоиды ($r = h$) является гипоциклоида.

Одним из самых интересных примеров Гипотрохоиды является Розы (полярные) или кривые Гвидо Гранди. Название свое эти кривые получили из-за сходства с лепестками цветов, а также по имени итальянского монаха, философа, математика и инженера Гранди Луиджи Гвидо (1671-1742), который описал их в своей работе «Floris Geometrici» в 1728 году.

Характеристическое свойство: кривая Гвидо описывается уравнением в полярной системе координат

$r = asink\theta,$ где $a, k > 0,$

где при различных значениях параметра k будут получатся различные виды роз, уменьшающиеся в круге, радиуса a.

Для начала, рассмотрим примерно, как выглядит примерный график Розы (рис. 13):

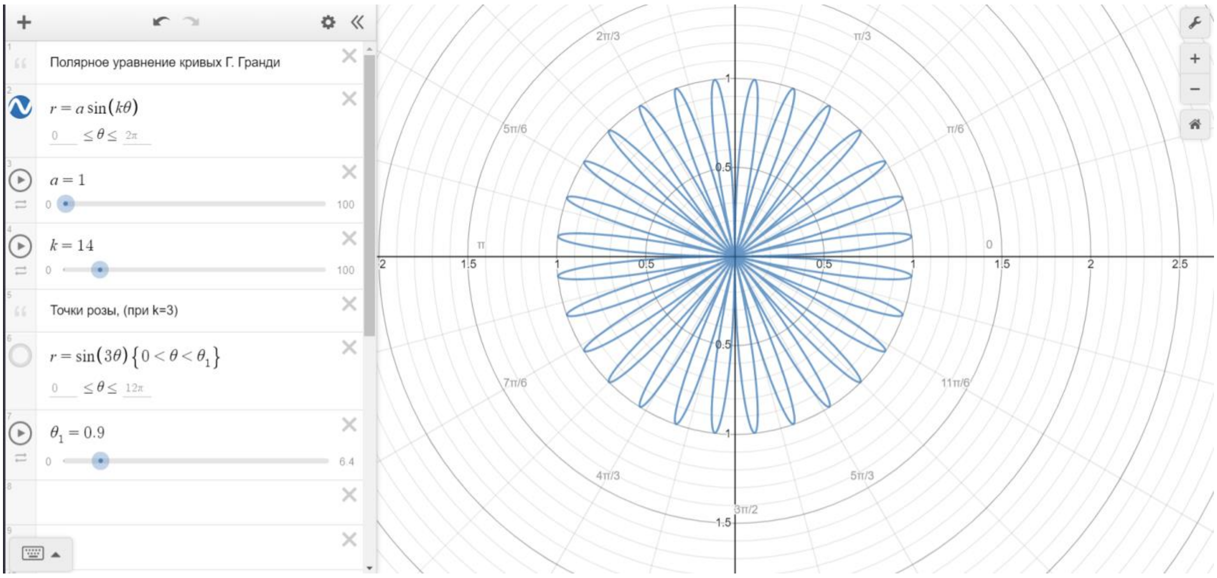


Рис. 13.

Рассмотрим графики при *k=2* и k=3:

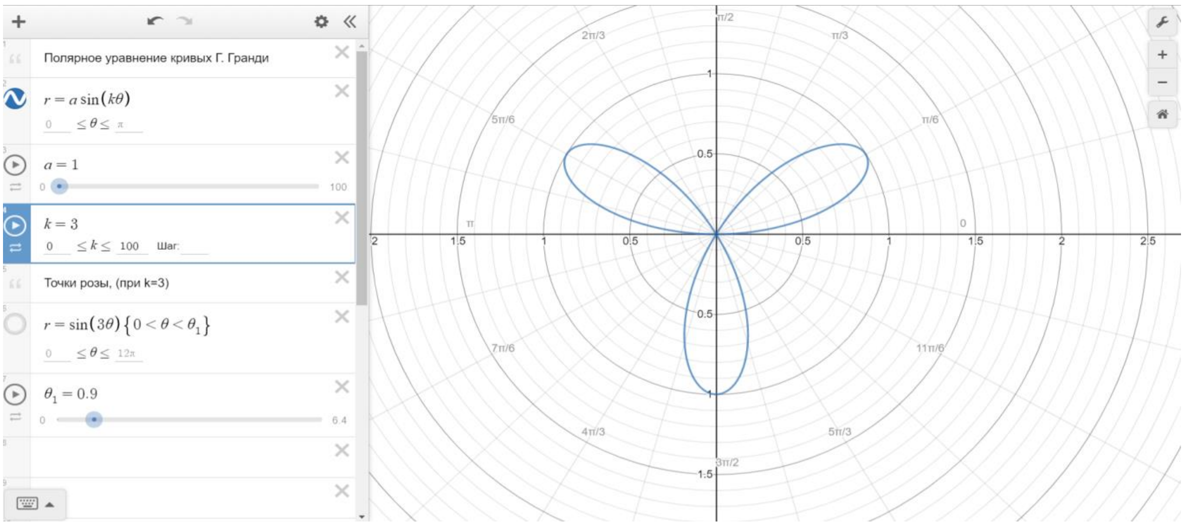


Рис.14.

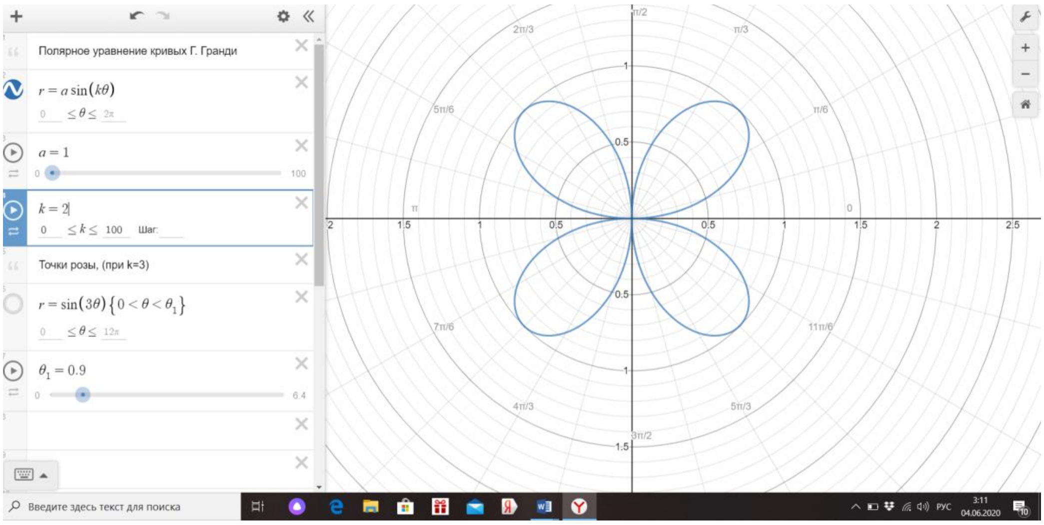


Рис.15.

При рассмотрении мы заметили, что лепестки при четном значении 2 раза больше, а при нечетном значении лепестки соответствует данному числу, которое мы берем.

Если взять иррациональные числа получим график с наложенными друг на друга лепестками;

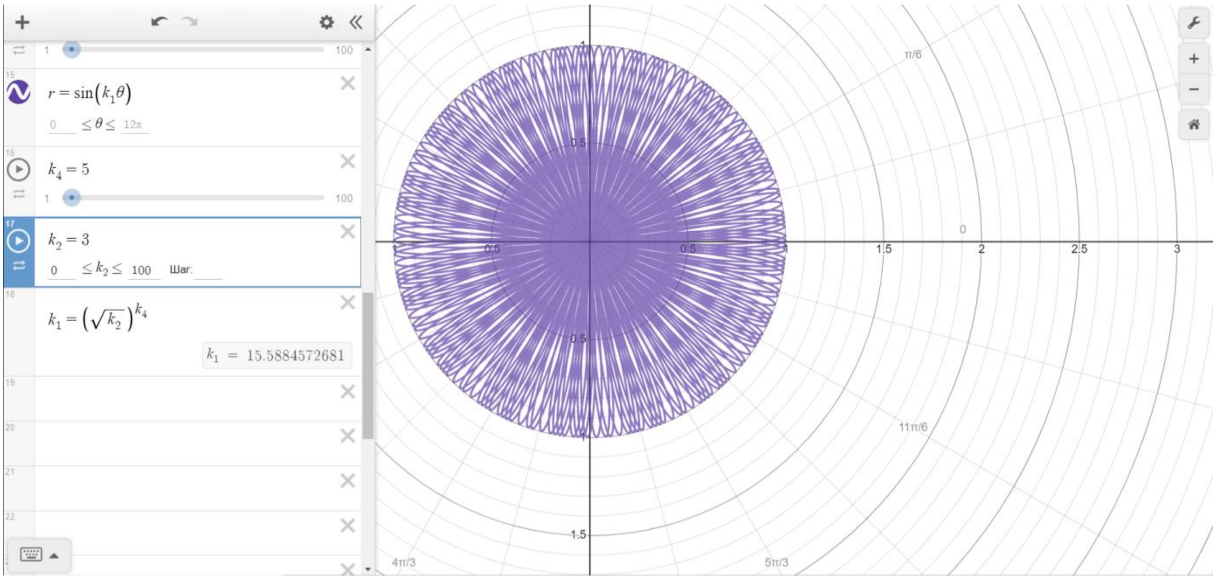


Рис. 16.

Заключение

В ходе подготовки выпускной квалификационной работы была изучена научная и методическая литература по теории плоских кривых, их история, систематизирован материал для целостного изложения.

Руководителем была поставлена цель: изучить свойства некоторых кривых, обобщить знания и расширить геометрические представления об исследуемых кривых. Для достижения данной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Проанализировать учебно-методическую и научную литературу по теме исследования.
2. Изучить теорию плоских кривых, используя аппарат дифференциального исчисления и аналитической геометрии.
3. Рассмотреть несколько типов плоских кривых, изучить их историю, сделать вывод уравнения кривой, вычислить (вывести формулу) длины дуги кривой, найти площадь (при наличии), построить кривую.

Более подробно были изучены циклоиды (гипо- и эпи- циклоиды) и кривая Гвидо Гранди. Составлены графики кривых с использованием программы Десмос. Выполнены вычисления длин, площадей петель.

Предложено более удобное приложение (Desmos) для расширения геометрических представлений. Полное название Desmos Graphing Calculator – это облачный сервис, в основе которого лежит технология HTML5.

Программа Desmos, по моему представлению, лучше некоторых тем что данная программа работает в режиме on-line на любом компьютере, планшете или смартфоне. После авторизации можно сохранять построенные графики, апплеты в виде рисунков и делиться ими в виде ссылки или картинки.

Нами также было выполнена вычисление нескольких задач:

1) вычисление площади одной арки циклоиды;
2) найти длину одной арки циклоиды;
3) найти площадь поверхности, образованной от вращения одной арки циклоиды;
4) найти объем тела, полученного при вращении одной арки циклоиды.

Считаю, что поставленные задачи решены и цель достигнута.

Литература.

Основная литература:

1. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (Справочное руководство).Автор: А.А. Савелов. Общие сведения о кривых/ способы образование кривыхСтр. 7-27. Циклоидные кривые 109-124. Циклоида 240-248.Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение - М. 1969-293 с.URL: http://bookre.org/reader?file=444123– Текст: Электронный
2. О. В. Сильванович «Специальные кривые» построение кривыхURL:https://books.ifmo.ru/file/pdf/1835.pdfТекст: электронный
3. Vuzlit.ruЭпициклоида, гипоциклоида свойства замечательных кривых.URL: https://vuzlit.ru/858151/epitsikloida
4. Берман Г.Н. Циклоида. – М., 1980.Текст: Непосредственный
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия.7 глава. Поверхности второго порядка.3& Исследование формы поверхностей 2-го порядка по их каноническим уравнениям с. 194-205 URL: https://studizba.com/files/show/pdf/51759-1-v-a-il-in-e-g-poznyak--analiticheskaya.html Текст: Электронный.

Дополнительная литература

6. Тышкевич. Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. - 2-е изд. – Минск. Пособие для студентов математических специальностей университетов и педагогических институтов. Плоские фигуры 2-го порядка с. 277-281. Текст: Непосредственный.
7. Васильев К.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые, М.:Наука, 1978-152 с. Текст: Электронный.
8. Маркушевич А.И. Замечательные кривые. Популярные лекции поматематике, выпуск 4.М.-Л.: Гостехиздат, 1952-32 с.Текст: Электронный
9. Википедия. Циклоида URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Циклоида Эпициклоида URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Эпициклоида Гипоциклоида. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гипоциклоида. Текст: Электронный.
10. Приложения использованная, для построение, графиков: AppDownloads – GeoGebra, www.desmos.com.