МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Тувинский государственный университет»

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Методика изучения темы «Векторы» в школьном курсе математики

Работа допущена к защите
Зав. кафедрой ____________
Танзы М.В., к.п.н., доцент____
(фамилия, и.о., уч.степень, звание)

Студента (ки)_5_курса_1_группы
направления подготовки 44.03.05
ПО (с двумя профилями подготовки)
профили «Математика» и «Информатика»
очной формы обучения

Сат Милы Мустафаевны_______________
(Ф. И. О.)

Работа защищена «__»________20__г.
С оценкой ______________________
Председатель ГЭК ______________
(подпись)
Биче-оол И.Н. директор ГАОУ «Тувинский республиканский лицей-интернат»_

____
(подпись)
«__»________________________20___г.

Члены комиссии ________________
____
____
(подписи)

Научный руководитель: _____________
(подпись)
Танова О.М., старший преподаватель___
(фамилия, и. о., должность, уч.степень, звание)
кафедры математики и МПМ__________

Кызыл – 2020г.

Содержание

Введение 3

ГЛАВА 1. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ....... 5

«ВЕКТОРЫ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ................................ 5

1.1. Требования к изучению векторов согласно ФГОС 5

1.2. Сравнительный анализ изучения темы «Векторы» по различным школьным учебникам геометрии 8

1.3. Основы использования векторов при решении задач и доказательстве теорем 12

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ... 16

2.1. Методика введения понятия вектора 17

2.2. Методика изучения равенства векторов 19

2.3. Методика изучения операций над векторами 21

2.4. Элективный курс «Векторы» для учащихся 9 класса 26

2.5. Примеры решения геометрических задач векторным методом 56

2.6. Апробация 61

Заключение 64

Список литературы.. 66

Введение

Тема «Векторы» занимает одну из главных мест в школьном курсе геометрии. Векторы стали изучаться в школе сравнительно недавно, и на сегодняшний день все убедились, что введение в курс школьной геометрии понятия вектора явилось правильным шагом как с научной, так и с методической точки зрения.

Понятие вектора и его операции используются при решении многих геометрических задач и доказательстве теорем. Векторный метод при решении различных математических задач является одним из широко употребляемых методов решения задач. Отметим, что курс вузовской геометрии также начинается с изучения векторной алгебры, и многие задачи из курса линейной алгебры, аналитической и дифференциальной геометрии решаются векторным методом.

Однако практика показывает, что большинство выпускников школ демонстрируют низкий уровень знаний по теме «Векторы». В связи с этим вопрос о том, как повысить у учащихся уровень знаний по теме «Векторы» и умения использовать векторы при решении задач, остается одним из острых вопросов преподавания математики в школе. Все вышесказанное обуславливает ***актуальность*** темы выпускной квалификационной работы.

Объектом исследования выступает процесс обучения геометрии в школе.

Предметом исследования является методика изучения темы «Векторы» в школьном курсе геометрии.

Целью нашего исследования является разработка элективного курса по теме «Векторы» для учащихся 9 класса.

Гипотеза исследования: Организация обучения теме «Векторы» по разработанной нами элективному курсу способствует эффективному усвоению учащимися материала по этой теме и формированию у них умений и навыков решения задач векторным методом.

Для реализации намеченной цели и проверки гипотезы исследования были поставлены следующие **задачи:**

- Изучить учебную, методическую, психолого-педагогическую литературу по данной теме;
- Изучить ФГОС и программы по геометрии для основного общего образования;
- Разработать методику изучения темы «Векторы» по темам;
- Разработать элективный курс по теме «Векторы» для учащихся 9 классов;
- Провести апробацию исследования.

В первой главе изложены методологические основы изучения темы «Векторы» в школьном курсе геометрии. Здесь определены роль и место темы «Векторы» в школьном курсе геометрии, сделан сравнительный анализ изучения темы «Векторы» в школьных учебниках геометрии.

Во второй главе нами разработана методика изучения темы «Векторы» по темам. Методику изучения темы мы дали согласно учебникам А. В. Погорелова и Л. С. Атанасяна и др. Основную часть главы составляет разработанный нами элективный курс по теме «Векторы» для учащихся 9 классов.

Апробация была проведена в 9«б» классе МБОУ Хандагайтинская СОШ во время педагогической практики. Итоги апробации отражены в конце работы.

Новизна исследования заключается в том, что разработан элективный курс по теме «Векторы» для 9 классов, направленный на активизацию использовании векторного метода при решении задач.

Практической значимостью работы является то, что данная выпускная квалификационная работа будет полезна учащимся, учителям математики, методистам, а также студентам физико-математического факультета во время педагогической практики.

Заключение содержит результаты проделанной работы.

ГЛАВА 1. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Требования к изучению векторов согласно ФГОС

Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) основного общего образования представляет собой совокупность требований, при реализации основной образовательной программы основного общего образования образовательными учреждениями, имеющими государственную аккредитацию. Основой разработки и реализации стандарта является концепция духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России [20].

Стандарт устанавливает требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы основного общего образования: личностным, метапредметным и предметным.

Личностные результаты включают сформированность мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности, системы значимых социальных и межличностных отношений, ценностно-смысловых установок [20].

Метапредметные результаты включают регулятивные, познавательные, коммуникативные способности, их использования в учебной, познавательной и социальной практике[20].

Предметные результаты включают не только изучение учебного предмета, но и умения, специфические для данной предметной области, виды деятельности по получению нового знания в рамках учебного предмета [20].

Математическое образование, являясь важнейшим компонентом в системе общего образования и частью общей культуры, обладает уникальными составляющими:

интеллектуально развивающей - изучение математики является источником и средством активного интеллектуального развития человека, его умственных способностей;

познавательной – с помощью математики человек познает окружающий мир, его пространственные и количественные отношения;

прикладной – математика является той базой, которая обеспечивает готовность человека к овладению смежными дисциплинами, многими профессиями, делает для него доступным непрерывное образование и самообразование во многих сферах человеческой деятельности, в немалой степени обеспечивает многие ежедневные потребности человека;

историко-культурологической – на примерах из истории развития математики прослеживается развитие не только основных идей и методов самой математики и их влияние на культурный облик человечества, но и развитие человеческой культуры в целом;

воспитательной – математическое образование воспитывает культуру мышления и способствует формированию важнейших черт нравственной личности,

философско-мировоззренческой – математика помогает осмыслять мир, в котором мы живем, формирует у человека развивающиеся научные представления о строении Вселенной, о реальном физическом пространстве, она все в большей и большей степени становится методом мышления, применяемым во многих науках и научно-технической деятельности [8].

ФГОС побуждает учителя [20]:

- развивать у учащихся широкие познавательные интересы, инициативу и любознательность, мотивы познания и творчества;
- формировать целеустремленность и настойчивость в достижении целей, готовность к преодолению трудностей и жизненного оптимизма;
- формировать умение учиться и способность к организации своей деятельности (планировать, корректировать, контролировать и оценивать свою деятельность).

Целью изучения курса геометрии в 7-9 классах является систематическое изучение свойств геометрических фигур на плоскости, формирование пространственных представлений, развитие логического мышления и подготовка аппарата, необходимого для изучения смежных дисциплин и курса стереометрии в старших классах [13].

Содержание материала:

В рамках учебного предмета «Геометрия традиционно изучается евклидова геометрия, элементы векторной алгебры, геометрические преобразования.

Планируемые результаты изучения учебной программы по теме «Векторы»:

Выпускник научится

- ✓ оперировать с векторами: находить сумму и разность двух векторов, заданных геометрически, находить вектор, равный произведению заданного вектора на число;
- ✓ находить для векторов заданных координатами: длину вектора, координаты суммы и разности векторов, координаты произведения вектора на число, применяя при необходимости сочетательный, переместительный и распределительный законы;
- ✓ вычислять скалярное произведение векторов, находить угол между векторами, устанавливать перпендикулярность прямых [20].

Выпускник получит возможность:

- ✓ овладеть векторным методом для решения задач на вычисления и доказательства;
- ✓ приобрести опыт выполнения проектов на тему «применение векторного метода при решении задач на вычисления и доказательства» [20].

1.2. Сравнительный анализ изучения темы «Векторы» по различным школьным учебникам геометрии

В настоящее время в школе используется несколько различных учебников геометрии, в каждом из которых изложение темы «Векторы» имеет свои методические особенности. Наибольшее распространение получили учебники следующих авторов: 1) Л.С. Атанасян и др., 2) А.В. Погорелов и 3) А.Г.Мерзляк и др. [1, 15, 12].

В этих учебниках векторы даются как последняя глава, изучаемая в 8 классе. Здесь вводится понятие вектора, рассматриваются нулевой вектор, длина вектора, равные векторы, откладывание вектора от точки, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов в учебнике Л. С. Атанасяна и др. вводится в 9 классе, а в учебнике А. В. Погорелова – в 9 классе. Авторы А. Г. Мерзляк и др. вводит всю теорию по теме «Векторы» в 9 классе.

Автор учебника	**Л.С.Атанасян и др.**	**А.В.Погорелов**	**А.Г.Мерзляк и др.**
8 класс	Понятие вектора. нулевой вектор, длина вектора, равные векторы, откладывание вектора от точки, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число.	Понятие вектора. нулевой вектор, длина вектора, равные векторы, откладывание вектора от точки, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.	
9 класс	Скалярное произведение векторов.		Понятие вектора. нулевой вектор, длина вектора,

			равные векторы, координаты вектора, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.
10-11 классы	Векторы в пространстве. Использование векторов при решении задач в пространстве.		

Давайте подробно рассмотрим каждый учебник.

Л. С. Атанасян и др. Геометрия 7-9 классы: учебник для общеобразовательных организаций, 3-е издание, −М.: Просвещение, 2017. [1]

В данном учебном пособии материал, посвященный векторам, изложен в главе «Векторы». Глава состоит из трех параграфов: в первом параграфе дается «Понятие вектора», во втором параграфе − «Сложение и вычитание векторов», в третьем − «Умножение вектора на число. Применение векторов при решении задач». На изучение темы «Векторы» отводится девять часов.

В первом параграфе девятой главы рассматривается понятие вектора, равенство векторов, откладывание вектора от одной точки. Понятие вектора основывается на определение:

Определение: *Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется направленным отрезком или вектором* [1]

Также дается определение нулевого вектора, сонаправленных и противоположно направленных векторов, равных векторов.

В конце параграфа даны практические задания 738-743, вопросы и задачи 744-752.

Второй параграф девятой главы рассматривается сумма двух векторов, законы сложения векторов, правило треугольника и параллелограмма, сумма нескольких векторов и вычитание векторов. Рассматривается задача о построении разности двух векторов, в конце даны практические задания 753- 758, вопросы и задачи 759-774.

В третьем параграфе рассматривается произведение вектора на число, средняя линия трапеции и применение векторов к решению задач. Рассматриваются две задачи, в конце параграфа даны практические занятия 775-778 и задачи 779-799.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. используется метод изложения без использования координат. Это создаст определенные трудности в обосновании законов векторной алгебры. Трудности возникают, главным образом, за счет необходимости рассмотрения большого количества частных случаев. Так, доказательство независимости суммы векторов от выбранной точки требует рассмотрения кроме стандартного случая, когда точки не лежат на одной прямой, который приведен в учебнике Л. С. Атанасяна и др., случая, при котором все точки расположены на одной прямой. Доказательство переместительного свойства сложения векторов предполагает рассмотрение двух частных случаев, а доказательство сочетательного свойства умножения вектора на число - четырех случаев.

А. В. Погорелов. Геометрия, 7-9 классы: учебник для общебобразовательных организаций, 2-е издание,−М.: Просвещение, 2014, -240 с. [15]

Содержание учебника позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС основного общего образования.

В данном учебном пособии материал, посвященный векторам, изложен в десятом параграфе для 8-ых классов. Параграф состоит из 9 пунктов:

п.91. Абсолютная величина и направление вектора,

п.92. Равенство векторов,

п.93. Координаты вектора,

п . 9 4 . Сложение векторов,

п.95. Сложение сил,

п.96. Умножение вектора на число,

п.97. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам,

п.98. Скалярное произведение векторов,

п.99. Разложение вектора по координатным осям.

В каждом пункте рассматриваются примеры. В конце параграфа дается контрольные вопросы и задачи для работ в классе и домашних работ.

В отличие от учебника Л.С. Атанасяна «Геометрия, 7-9 классы» в данном пособии мало задач для работ в классе и самостоятельных работ.

В основу изложения векторов в учебнике А. В. Погорелова положен координатный метод, поэтому здесь широко используются координатные модели векторных понятий и доказательства теорем с использованием координат вектора.

А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. Геометрия: учебник для 9-ых классов общеобразовательных учебных заведений, –Х.: Гимназия, 2017, – 240 с.[12]

В данном учебнике тема «Векторы» изложен в четвертом параграфе. Параграф состоит из 5 пунктов: п.12 посвящен понятию вектора, в п.13 дается координаты вектора, в п.14 – сложение и вычитание векторов, в п.15 – умножение вектора на число, в п.16 – скалярное произведение векторов.

В каждом пункте рассматриваются примеры, даются вопросы к пункту и практические задания. Упражнений для работ в классе и домашних работ, а также для самостоятельных работ достаточно. Есть еще упражнения для повторения темы.

В конце параграфа дано задание в тестовой форме для самостоятельной работы.

Выводы: В каждом из анализированных учебников есть теоретическая и практическая часть, но учебник Л.С. Атанасяна «Геометрия 7-9 классы» отличается от других учебников тем, что в нем доступно изложен материал, большое число подробно решѐнных примеров, приведено достаточно задач для классных и домашних работ. Содержание материала учебника соответствует требованиям стандарта.

1.3. Основы использования векторов при решении задач и доказательстве теорем

Понятие вектора и его операции используются при решении многих геометрических задач и доказательстве теорем.

Метод решения математической задачи с использованием векторного аппарата называется **векторным методом** решения задач [9].

Векторный метод решения геометрических задач в школьном курсе геометрии начинается в девятом классе. Данный метод позволяет легко делать обобщения, роль которых в математике трудно переоценить. Однако следует иметь в виду, что векторный метод не является универсальным и к решению некоторых задач может быть неприменим или малоэффективным.

В своем учебнике по геометрии автор Потоскуев Е.В. отмечают, что решение задач векторным методом в чем-то аналогично алгебраическому решению текстовых задач и состоит из трех этапов [16].

Первый этап. Условие задачи записывается в векторном виде, вводя подходящим образом векторы (аналогия- введение неизвестных и составление алгебраического уравнения).

Второй этап. Средствами векторной алгебры условие задачи преобразуется так, чтобы получить решение задачи в векторном виде (аналогия – решение алгебраического уравнения).

Третий этап. Получение векторное соотношение истолковывается в исходных терминах (аналогия – формулировка ответа, после того как алгебраическое уравнение решено).

Достоинство векторного метода решения геометрических задач состоит в том, что он позволяет избежать искусственных дополнительных построений, указывает общие приемы решения задач.

Сочетание векторного и традиционного методов решения геометрических задач способствует широкому осуществлению внутрипредметных связей в математике, так как при этом учащиеся одновременно используют знания из алгебры и геометрии. Это позволяет школьникам убедиться в единстве математики, с точки зрения методов изучения. Следует отметить, что обучение решению геометрических задач гораздо сложнее, чем алгебраических, так как они плохо поддаются алгоритмизации. Поиск и конструирование методов решения задач вырабатывает дисциплинированное мышление в процессе решения, прививает эстетический взгляд на решение задачи, предполагает оценку решения не только с точки зрения ее логической правильности, но и красоты решения.

При решении задач векторным методом следует обращать внимание на следующие случаи, встречающиеся на том или ином этапе решения задачи. Сформулируем эти случаи в виде таблицы.

Что требуется доказать или найти (на геометрическом языке)	**Что достаточно доказать или найти (на векторном языке)**
Прямые a и b параллельны.	$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, где $AB \epsilon a, CD \epsilon b$.
Точки A, B и C лежат на одной прямой.	а) $\overrightarrow{AB} = k \cdot BC$, или $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. б) $\overrightarrow{QC} = p \cdot \overrightarrow{QA} + q \cdot \overrightarrow{QB}$, где $Q -$ произвольная точка, $p + q = 1$; в) $a \cdot \overrightarrow{QA} + B \cdot \overrightarrow{QB} + y \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, где $Q -$ произвольная точка, $a + B + y = 0$.
Точка C лежит на прямой AB, AB: BC=m:n.	а) $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$; б) Существует точка ⊥ такая, что $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{QA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{QB}$.

Прямые a и b перпендикулярны.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \vec{0}$, где $AB \epsilon a, CD \epsilon b$.
Вычислить длину отрезка.	1) Выбрать два неколлинеарных вектора, у которых известны длины и величина угла между ними. 2) Разложить по ним вектор, длина которого вычисляется. 3) Найти скалярный квадрат этого вектора; использовать формулу $\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$.
Вычислить величину угла.	1) Выбрать два неколлинеарных вектора, у которых известны отношение длин и величина угла между ними. 2) Выбрать векторы, задающие искомый угол, разложить их по базисным векторам. 3) Вычислить $\cos(\overrightarrow{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$.

При решении геометрических задач векторным методом рекомендуется от геометрической постановки задачи перейти к ее векторному описанию. Затем, пользуясь свойствами векторов и операции над ними, найти некоторые векторные соотношения, отражающие данные и условия задачи, из которых можно получить решение задачи.

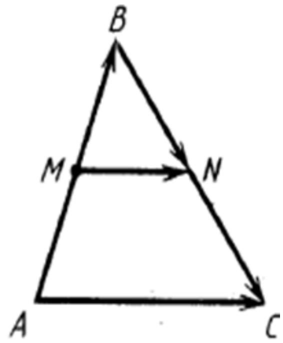
Таким образом, можно выделить следующие умения, которыми должны владеть учащиеся для решения задач векторным методом [14]:

1) перевод условия задачи на язык векторов, в том числе:
   - введение в рассмотрение векторов;
   - выбор базисных векторов;
   - разложение всех введенных векторов;
2) составление системы векторных равенств (или одного равенства);
3) упрощение векторных равенств;
4) замена векторных равенств алгебраическими уравнениями и их решения;
5) объяснение геометрического смысла полученного решения этой системы (или одного уравнения).

Понятие вектора нашло широкое распространение при решении задач и доказательстве теорем. Аппарат векторной алгебры позволил упростить не только изложение некоторых сложных геометрических понятий, но и доказательство многих теорем школьного курса геометрии. В некоторых случаях при использовании векторов получаются быстрые и простые доказательства.

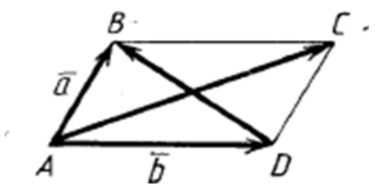
Приведем примеры доказательств теорем, при которых используются выделенные выше умения.

Теорема 1: Средняя линия треугольника параллельна его третьей стороне и равна половине этой стороны.



Доказательство: Рассмотрим треугольник ABC (рис.1). Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Пусть M и N – середины сторон AB и BC ΔABC, тогда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{c}$. Так как $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{MN}\frac{1}{2}\vec{c}$, то $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Значит, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AC}$ сонаправлены, следовательно $AC \parallel MN$. Что и требовалось доказать.

Теорема 2: Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.



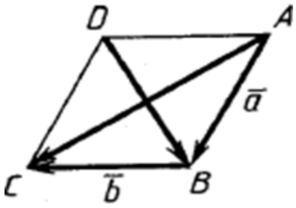
Доказательство: Пусть дан параллелограмм ABCD (рис.2). Положим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ($\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right| = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \vec{b}$) по определению суммы и разности векторов $\overrightarrow{AC}$=$\vec{a}$+$\vec{b}$, $\overrightarrow{DB}$=$\vec{a}$-$\vec{b}$. Используя свойства скалярного квадрата, получим:

$$\overrightarrow{AC^2} + \overrightarrow{DB^2} = (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = \overrightarrow{a^2} + 2\vec{a}\vec{b} + \overrightarrow{b^2} + \overrightarrow{a^2} - 2\vec{a}\vec{b} + \overrightarrow{b^2}$$

$$= 2\overrightarrow{a^2} + 2\overrightarrow{b^2}\text{, т. е. } AC^2 + DB^2$$

$$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2\text{, так как } \overrightarrow{AC^2} = AC^2, \overrightarrow{DB^2} = DB^2 .$$

Теорема 3: Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.



Доказательство: Пусть дан ромб ABCD (рис. 3). Введем обозначения: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Из определения ромба $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. По определению суммы и разности векторов $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$.

Рассмотрим $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{DB}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\boldsymbol{a^2}} - \overrightarrow{\boldsymbol{b^2}}$

(по свойствам скалярного произведения).

Так как стороны ромба равны, то $\vec{a}=\vec{b}$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{DB}=0$.

Из последнего получаем $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$, т.е. $\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AC}$.

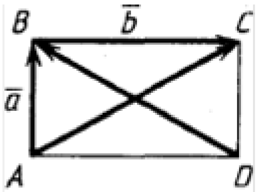


рис.4

Теорема 4: Диагонали в прямоугольнике имеют равные длины.

Доказательство: Пусть ABCD – данный прямоугольник (рис.4).

1) Введя обозначения $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{DC}=\vec{b}$, получим: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$.
2) Найдем квадраты длин диагоналей, используя свойства скалярного произведения: $\overrightarrow{\boldsymbol{AC^2}} = \boldsymbol{AC^2} = \left(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{b}\right)^{\boldsymbol{2}} = \overrightarrow{\boldsymbol{a^2}} + \boldsymbol{2}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}} + \overrightarrow{\boldsymbol{b^2}},\ \overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{b^2}$ так как $\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0}$, ибо в прямоугольнике $\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{b}}$.

Итак, $\boldsymbol{AC^2} = \boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}$. Далее

$$\overrightarrow{\boldsymbol{DB^2}} = \boldsymbol{DB^2} = (\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}})^2 = \overrightarrow{\boldsymbol{a^2}} + \boldsymbol{2}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{b^2} = \overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{b^2} \text{ так как } \vec{a} \perp \vec{\boldsymbol{b}}, \text{ ибо в прямоугольнике } \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{AC^2} = \boldsymbol{DB^2} = \boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}$, т. е. $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{DB}$.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ» В

ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

2.1. Методика введения понятия вектора

Существуют различные подходы к введению понятия вектора при изложении школьного курса геометрии.

Вектор рассматривается как:

1. *Множество направленных отрезков плоскости*

Сложение определяется следующим образом. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$- два направленных отрезка. Отметим произвольную точку A плоскости и отложим от нее направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки B отложим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ называется суммой направленных отрезков $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Введенное таким образом сложение направленных отрезков удовлетворяет аксиомам сложения [18].

Произведением ненулевого направленного отрезка $\vec{a}$ на число k называется такой направленный отрезок, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причем отрезки $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленные, если $k>0$ и противоположно направленные, если $k<0$.

Произведением нулевого направленного отрезка на любое число считается нулевой направленный отрезок. Под нулевым направленным отрезком понимают направленный отрезок, начало и конец которого совпадают. При этом выполняются аксиомы умножения.

Таким образом, множество направленных отрезков плоскости является *векторным пространством.* В этом случае вектор отождествляется с направленным отрезком.

Такая трактовка вектора используется в учебниках А. В. Погорелова и Л. С. Атанасяна и др.

2. *Множество классов направленных отрезков плоскости*

Объектами этого множества являются не отдельные направленные отрезки, а классы, состоящие из сонаправленных отрезков, имеющих равные длины. В качестве «нулевого» объекта выступает множество точек плоскости. Операции сложения этих объектов и умножения на действительное число сводятся к соответствующим операциям с представителями классов, поэтому они удовлетворяют аксиомам векторного пространства.

Таким образом, множество классов, каждый из которых состоит из сонаправленных отрезков равной длины, является интерпретацией векторного пространства. Здесь векторы - это классы сонаправленных отрезков равной длины.

3. *Множество параллельных переносов плоскости*

Под суммой параллельных переносов T_1 и T_2 понимается их композиция. Произведением параллельного переноса T на число m называется параллельный перенос mT, расстояние которого равно произведению расстояния, на которое осуществляется параллельный перенос T, и модуля числа m, а направление совпадает с направлением параллельного переноса T, если $m > 0$ и противоположно ему, если $m < 0$ [18].

Можно доказать, что введенные таким образом сложение параллельных переносов и умножение параллельного переноса на число удовлетворяет аксиомам сложения и умножения, поэтому множество параллельных переносов плоскости является интерпретацией векторного пространства. Отсюда можно отождествить понятие вектора и понятие параллельного переноса.

Отметим достоинства и недостатки рассмотренных подходов к введению понятия вектора.

Достоинства трактовки вектора как направленного отрезка:

- 1) Трактовка вектора как направленного отрезка придает этим объектам и операциям над ними хорошую наглядность. Это очень важно, гак как в процессе формирования понятия большую роль играет образное мышление, поэтому желательны такие определения, которые позволяют воображению легко конструировать образы определяемых объектов.

- 2) Трактовка вектора как направленного отрезка обычно используется в физике. Таким образом, она способствует осуществлению межпредметных связей. Следует отметить и то, что в решении геометрических задач вектор используется как направленный отрезок.

К недостаткам трактовки вектора как направленного отрезка можно отнести то, что при их использовании получаются громоздкие доказательства свойств сложения векторов и умножения вектора на число. Так, доказательство переместительного свойства сложения векторов предполагает рассмотрение двух случаев: а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; б) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Доказательство свойства: для любых k, l и вектора $\bar{a}$ справедливо равенство $(kl)\,\vec{a} = к(1\vec{a})$ требует рассмотрения четырех случаев.

Трактовка вектора как параллельного переноса наиболее абстракта, лишена наглядности. Ее достоинства - это отсутствие непоследовательностей в действиях с векторами, естественное введение сложения векторов и умножения вектора на число, более простые доказательства основных законов векторной алгебры. Ее реализация требует обширных знаний теории геометрических преобразований. Но геометрические преобразования не составляют основу наших учебников, поэтому такой подход к введению понятия вектора не используется в настоящее время.

Также следует отметить, что рассмотрение вектора как параллельного переноса не приемлема в физике. Так в механике обычно рассматриваются так называемые *скользящие векторы* (вектор, начало которого можно выбирать на некоторой прямой, по которой он может перемещаться) и *связанный вектор* (вектор, начало которого отождествляется с некоторой фиксированной точкой). Итак, рассмотрение различных интерпретаций векторного пространства приводит к выводу о том, что наиболее приемлемой в средней школе является интерпретация вектора как направленного отрезка.

2.2. Методика изучения равенства векторов

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. используется следующее определение равенства векторов: *Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны* [1].

В учебнике А. В. Погорелова равенство векторов определяется через параллельный перенос: *Два вектора называются равными, если они совмещаются параллельным переносом* [15].

И в первом и во втором случае введению понятия равных векторов должно предшествовать рассмотрение понятий *сонаправленных* и *противоположно направленных векторов, длины вектора.* Для иллюстрации сонаправленных (противоположно направленных) векторов следует использовать наглядный материал (модели, схемы и т. д.). Усвоению этих понятий будет способствовать использование упражнений следующего типа:

1. Начертите равнобочную трапецию: а) существуют ли векторы, определяемые её вершинами и равные по длине? б) Сколько пар сонаправленных векторов задают вершины трапеции?
2. Сколько пар сонаправленных (противоположно направленных) векторов определяют вершины параллелограмма?
3. Верны ли утверждения: если векторы $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, то $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны?
4. Начертить параллелограмм, обозначить его вершины и написать все равные между собой векторы, началом и концом которых являются вершины параллелограмма.
5. Известно, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Следует ли отсюда, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны? Если нет, то изменить условие так, чтобы из него следовало равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Приведенные упражнения позволяют учащимся самим формулировать теоремы, выражающие свойство и признак равных векторов.

1) Теорема (признак) Два вектора равны тогда и только тогда, когда *они одинаково направлены и равны по абсолютной величине.*

2) *Равные векторы имеют равные соответствующие координаты.*
3) *Обратно: если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.*

2.3. Методика изучения операций над векторами

К операциям над векторами относятся сложение векторов, вычитание векторов и умножение вектора на число.

А. В. Погорелов сумма векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение векторов определяются через координаты этих векторов.

Суммой векторов $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ называется вектор $\vec{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Из определения суммы векторов, признака равенства векторов и свойств сложения действительных чисел следуют все свойства сложения векторов. Такое определение суммы векторов позволяет легко обосновать свойства сложения векторов, но оно не указывает способа построения суммы двух данных векторов. Один из таких способов дает теорема:

Теорема. Каковы бы ни были точки *A, B. C* имеет место равенство

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{A}C}$.

В процессе доказательства теоремы устанавливается, что формула $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{A}C}$ выражает «правило треугольника» для сложения векторов

Изучение законов сложения векторов можно начать с выполнения соответствующих заданий. Например, известно, что три точки O, A, B не лежат на одной прямой. Построить сумму векторов $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ следующими двумя способами: а) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ сложить с $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$; б) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ сложить с $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$. Сравнивая результаты, полученные при выполнении этой работы двумя способами, учащиеся приходят к выводу: получен один и тот же вектор-сумма.

Следовательно, для сложения векторов имеет место переместительный закон. Доказательство соответствующей теоремы можно предложить учащимся изучить по учебнику, а затем записать его на доске и в тетрадях.

Переместительное свойство сложения векторов обосновывает второй способ построения суммы двух векторов «правило параллелограмма», а сочетательное свойство позволяет ввести понятие сложения нескольких векторов.

Разностью векторов $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{c}$+ $\vec{b}$= $\vec{a}$. Обозначается $\vec{c}$ = $\vec{a}$ — $\bar{b}$, тогда c_1 =$a_1 - b_1$, c_2 =$a_2 - b_2$.

Для того, чтобы показать способ построения разности двух векторов можно решить с учащимися задачу: Даны векторы с общим началом: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Докажите, что $\overrightarrow{AC}$-$\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{BC}$.

Решение этой задачи дает *правило для построения разности двух векторов.* Чтобы построить вектор, равный разности векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, надо отложить их от одной точки, тогда вектор, направленный от вычитаемого к уменьшаемому и будет вектором разности $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Понятие умножения вектора на число А. В. Погорелов дает также через координаты вектора.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1, a_2)$ *на число l* называется вектор с координатами (la_1; la_2).

Затем выполняются упражнения на построение произведения вектора на число:

1) Постройте произведение вектора $\overrightarrow{OA}$ (4; 5) на число а) 2; б) -3; в) 0;

г) 5; д) -1,5.

В процессе выполнения упражнений такого типа учащиеся могут заметить, что векторы $\overrightarrow{OA}$ и l $\overrightarrow{OA}$ лежат на одной прямой и направления их совпадают, если $l > 0$, и противоположны, если $l < 0$.

Полезны упражнения на распознавание среди множества векторов таких, которые являются произведением данного вектора на некоторое число.

2) Среди векторов $\vec{a}(3;\ 5)$, $\vec{b}(-2;\ -10)$, $\vec{c}(0;\ 1)$, $\vec{d}(-2;\ 4)$, $\vec{e}(3;\ 6)$ указать такие, которые являются произведением вектора $\vec{m}(1;\ 2)$ на некоторое число.

Координатное определение произведения вектора на число позволяет легко обосновать все свойства умножения вектора на число. Однако оно не дает способа построения произведения данного вектора на заданное число.

Л.С.Атанасян и др.дают следующее определение суммы векторов:

Пусть $\boldsymbol{\vec{a}}$ и $\boldsymbol{\vec{b}}$ - два вектора. Отмстим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ равный $\boldsymbol{\vec{a}}$. Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ равный $\boldsymbol{\vec{b}}$. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ называется суммой векторов $\boldsymbol{\vec{a}}$ и $\boldsymbol{\vec{b}}$.

Такое определение суммы векторов обладает хорошей наглядностью, легко может быть мотивировано рассмотрением примера на перемещение материальной точки. Однако при этом громоздким является обоснование свойств сложения векторов и независимости векторов от выбранной точки.

Вычитание векторов авторы определяют как действие, обратное сложению. Важное место здесь занимает теорема о том, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо соотношение $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Эта теорема дает способ построения разности векторов: чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, надо сложить вектор $\vec{a}$ с вектором, противоположным вектору $\vec{b}$.

Следует обратить внимание учащихся на то, что разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти, не прибегая к сложению векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$. Можно составить с учащимися алгоритм нахождения разности векторов a и $\vec{b}$:

- 1) отложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки;

- 2) построить вектор, начало, которого совпадает с концом вектора $\vec{b}$, а конец совпадает с концом вектора $\vec{a}$;
- 3) построенный вектор есть искомый $\vec{a}$ - $\vec{b}$.

В данном учебнике произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $к$ называют такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|к|\ |\overrightarrow{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $к$ >0 и противоположно направлены при $к$ < 0. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор. Свойства умножения вектора на число в этом учебнике не доказываются.

Изучение новой операции над векторами - умножения вектора на число - можно начать со следующих заданий.

1) Построить вектор, представляющий сумму:

$\overrightarrow{AB}$=$\vec{a}$+$\vec{a}$; $\overrightarrow{CD}$=$\vec{a}$+$\vec{a}$+$\vec{a}$.

В процессе выполнения этого задания выяснить с учащимися следующее:

а) Данный и построенный векторы являются сонаправленными.

б) Длина построенного вектора $\overrightarrow{AB}$ (или |CD|) равна произведению длины данного вектора $\vec{a}$ на число 2 (на число 3). Результат операции выразить в записи: $\overrightarrow{AB}$=2$\cdot$ $\vec{a}$; $\overrightarrow{CD}$=3$\cdot\vec{a}$.

2) Рассматривая задачу построения вектора, противоположного данному вектору $\vec{b}$, нетрудно мотивировать учащимся, что вектор -$\vec{b}$ целесообразно рассматривать как произведение вектор$\vec{a}$ $\vec{b}$ на число (-1), т. е. -$\vec{b}$ = (- 1) $\vec{b}$.

После этого можно перейти к рассмотрению новой задачи.

Дан вектор $\vec{c}$. Построить вектор $\overrightarrow{MN}$ = - $\vec{c}$ - $\vec{c}$ = - $\vec{c}$ + (-$\vec{c}$).

В беседе с учащимися следует выяснить, что:

- а) вектор $\vec{c}$ и вектор $\overrightarrow{MN}$ - противоположно направленные векторы;

- б) длина вектора $\overrightarrow{MN}$ равна произведению длины вектора $\vec{c}$ на число (-2), то есть | $\overrightarrow{MN}$ | = |- 2| • | $\vec{c}$ |. Результат операции выразить в записи: $\overrightarrow{MN}$ = - 2 $\vec{c}$.

После этого можно дать определение произведения вектора $\vec{a}$ на число $к$ и рассмотреть равенство | $к$ $\vec{a}$ | = | $к$ | $\overrightarrow{|\ a\ |}$, являющееся следствием этого определения.

При изучении сложения векторов, вычитания векторов и умножения вектора на число следует выполнять упражнения не только на нахождение суммы, разности векторов, произведения вектора на число, но и на представление вектора в виде: а) суммы нескольких векторов; б) произведения вектора на число. Эти умения важны при решении задач.

При изучении скалярного произведения векторов в обоих учебниках применяется традиционный подход к его определению. Тема начинается с введения понятия угла между векторами и его обозначения. Также даются определение и обозначение перпендикулярных векторов. Затем дается традиционное определение скалярного произведения.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$$

Далее можно дать свойство о том, что скалярное произведение ненулевых векторов рано нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярные. После этого учащиеся с помощью определения скалярного произведения приходят к понятию скалярного квадрата

$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{a}}$=$\boldsymbol{\vec{a}^2}$ и к тому, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля. Изучение темы завершается скалярным произведением в координатах и свойствами скалярного произведения, которые доказываются с помощью формулы его вычисления по координатам. Важное внимание следует уделить формуле вычисления угла между векторами, которая непосредственно следует из определения скалярного произведения векторов.

2.4. Элективный курс «Векторы» для учащихся 9 класса

Элективный курс «Векторы» предназначен для учащихся 9-ых классов. Он разработан в соответствии с требованиями ФГОС ОО. Прохождение курса даст учащимся возможность подробно изучить тему «Векторы» и проявить свои способности.

Цели курса:

1. Восполнить содержательные пробелы основного курса геометрии по данной теме.
2. Показать приемы решения задач векторным методом.

Задачи курса:

1. Научить учащихся решать задачи более высокой, по сравнению с обязательным уровнем сложности.
2. Овладеть умениями применения векторов к решению различных задач.
3. Расширить знания учащихся по данной теме.

Программа ориентирована на учащихся 9 классов. Курс рассчитан на 10 часов и предполагает изложение теории вопроса, решение типовых задач. Каждое занятие состоит из двух частей: задачи, решаемые с учителем, и задачи для самостоятельного (или домашнего) решения. Основные формы занятий: лекция, объяснение, практическая работа

Обязательные результаты обучения

В соответствии с содержанием программы учащиеся должны уметь:

1. уметь обозначать и изображать векторы, откладывать от данной точки вектор, равный данному;
2. знать, как определяется сумма двух или нескольких векторов, строить сумму двух и более векторов, разность двух векторов используя правила треугольника и параллелограмма, формулировать и применять законы сложения;

3. знать, как определяется умножение вектора на число, формулировать свойство умножения вектора на число, формулировать и строить произведения векторов на различные числа;
4. уметь выполнять операции над векторами по координатам, находить длину вектора;
5. знать определение и свойства скалярного произведения векторов, уметь вычислять скалярное произведение векторов по определению и по координатам;
6. уметь вычислять угол между векторами;
7. уметь применять векторы к решению задач и доказательству теорем.

Содержание курса

Понятие вектора (2 часа)

Определение вектора и равенство векторов.

Сложение и вычитание векторов (3 часа)

Сумма векторов, правило треугольника и параллелограмма, законы сложения, разность двух векторов, понятие противоположного вектора.

Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач (3 часа)

Умножение вектора на число, свойства умножения вектора на число, понятие средней линии трапеции.

Тематический план элективного курса

№	Наименование тем курса	Всего часов
1	Понятие вектора. Равенство векторов	1
2	Откладывание вектора от данной точки	1
3	Сумма векторов. Законы сложения векторов.	1

	Правило параллелограмма	
4	Сумма нескольких векторов	1
5	Вычитание векторов	1
6	Умножение вектора на число	1
7	Средняя линия трапеции	1
8	Скалярное произведение векторов	1
9	Применение векторов к решению задач	1
10	Контрольная работа по теме «Векторы»	1
Итого		10 ч.

Критерии оценивания самостоятельных и контрольной работ

Оценка «5» ставится в том случае, если ученик:

- ✓ выполнил все задания практической работы без ошибок;
- ✓ допустил при выполнении работы 1-2 недочѐта.

Оценка «4»ставится, если ученик:

- ✓ выполнил все задания практической работы, но допустил 1-2 ошибки;
- ✓ допустил при выполнении работы 3-4 недочѐта;
- ✓ показал умение применять изученный материал на практике, но делал это неуверенно;

Оценка «3»ставится в следующих случаях:

- ✓ ученикверно выполнил более 50% работы;
- ✓ выполнил все задания практической работы, но допустил 3-4 ошибки;
- ✓ допустил при выполнении работы 5-6 недочѐтов;

- ✓ показывает навыки работы на практике только с подсказки учителя.

Оценка «2»ставится в следующих случаях:

- ✓ выполнено менее 50% работы;
- ✓ допущено более 4 ошибок;
- ✓ не может применить теоретические знания на практике.

Система занятий по теме «Векторный метод»

Занятие № 1

Тема: Понятие вектора.

Цель занятия:

- ввести понятие вектора, равенство векторов;
- рассмотреть одинаково направленные и противоположно направленные вектора, равные вектора;

Задачи:

- Рассмотреть основные характеристики вектора, определить равенство векторов;
- научить изображать и обозначать вектор, различать начало и конец в записи и на чертеже, распознавать, изображать и записывать сонаправленные и противоположно направленные векторы, откладывать от любой точки вектор, равный данному;
- применять полученные знания при решении задач.

Тип занятия: урок усвоения новых знаний.

Ход занятия.

1) **Организационный момент.**

Приветствие, сообщается тема и цели занятия.

2) **Изучение нового материала.**

1. Многие физические величины характеризуются не только числовыми значениями, но и направлением (перемещение, скорость). Такие физические величины называются векторными величинами (или векторами).

Пусть на тело действует сила 8 Н. Как на рисунке обозначают силу? Стрелка показывает направление силы, а длина отрезка

соответствует в выбранном масштабе числовому значению силы. (рис.240) – 1 Н - 0,6 см (на рисунке), 8 Н – 4,8 см

Рассмотрим отрезок произвольной величины. Его концы – граничные точки отрезка. На данном отрезке можно отметить 2 направления. Чтобы выбрать одно из направлений, одну граничную точку отрезка назовем началом, другую – концом. Теперь будем считать, что отрезок направлен от начала к концу

Опр.: *Отрезок, для которого обозначены начало и конец, называется направленным отрезком или вектором.*

На рисунке вектор обозначается отрезком со стрелкой, показывающей направление вектора. Обозначается вектор двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними, например $\overrightarrow{AB}$ где $\vec{A}$ – начало вектора, $\vec{\mathrm{B}}$ – конец вектора.

Также любая точка плоскости – вектор. В данном случае вектор называется ***нулевым,*** т.е. начало вектора совпадает с его концом. Обозначается такой вектор двумя одинаковыми заглавными латинскими буквами - $\overrightarrow{AA}$ или $\vec{0}$. Длиной или модулем ненулевого вектора A называется длина отрезка АВ. Длина вектора обозначается $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{|a|})$.

Длина нулевого вектора считается равной нулю: |0|=0.

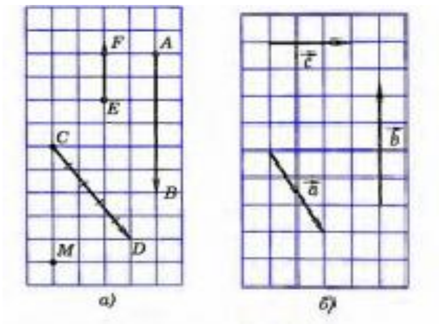


рис. 1.1

2. Рассмотрим движение тела, при котором все его точки движутся с одной и той же скоростью и в одном и том же направлении. Скорость каждой точки М тела является векторной величиной => можно изобразить эту точку в виде направленного отрезка, начало которого совпадает с точкой М. Так как все точки данного тела движутся одновременно и с одной скоростью, то все они направлены и имеют одинаковые направления.

Опр.: *Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор коллинеарен любому вектору.*

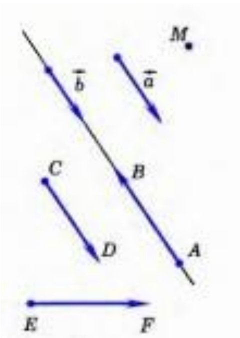


рис. 1.2

Если два вектора $\vec{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы называются *сонаправленными* ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), а во втором *противоположно направленными* ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$). Т.к. у нулевого вектора начало и конец совпадают, поэтому определенного направления он не имеет.

Свойства нулевого вектора:

1) Если $a \uparrow\uparrow n$, $n \uparrow\uparrow b$ ($n \neq 0$), то $a \uparrow\uparrow b$.

2) Если $a \uparrow\downarrow n$, $n \uparrow\downarrow b$ ($n \neq 0$), то $a \uparrow\uparrow b$.

3) Если $a \uparrow\uparrow n$, $n \uparrow\downarrow b$ ($n \neq 0$), то $a \uparrow\downarrow b$.

Опр.: *Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.*

1. Пусть дана точка A и A – начало вектора $\overrightarrow{a}$. Тогда вектор $\vec{a}$ отложен от точки А.

Опр.: От любой точки М можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

3. Закрепление нового материала

1. Какие из следующих величин являются векторными: масса, скорость, сила, температура, площадь, длина?

Ответ: скорость и сила, так как для них необходимо знать не только числовые значения, но и направление.

Выпишите пары коллинеарных векторов:

а) параллелограмма MNPQ;

б) трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ;

в) треугольника FGH. Укажите среди них пары сонаправленных и противоположно направленных векторов.

3. Отметьте точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Начертите все ненулевые векторы, начало и конец которых совпадают с каким-то двумя из этих точек. Выпишите все полученные векторы и укажите начало и конец каждого вектора.

4. Домашнее задание.

Задача 1. Верно ли утверждение:

а) если $a = b$, то $a \uparrow\uparrow b$;

б) если $a = b$, то a и b коллинеарны;

в) если $a = b$, то $a \uparrow\downarrow b$;

г) если $a \uparrow\uparrow b$, то $a = b$?

Задача 2. Докажите, что если векторы AB и CD равны, то середины отрезков AD и BC совпадают. Докажите обратное утверждение: Если середина отрезков AD и BC совпадают, то векторы AB и CD равны.

Занятие №2

Тема: Откладывание вектора от данной точки.

Цель занятия: Сформировать умение откладывать от любой точки плоскости вектор, равный данному.

Задачи:

- Проверить знания учащихся по теме: «Понятие вектора. Равенство векторов».
- Научить учащихся откладывать вектор, равный данному.
- Развивать умение анализировать и систематизировать знания.
- Воспитывать аккуратность выполнения чертежей.

Тип занятия: формирование новых знаний и умений

Формы работы учащихся: фронтальная, индивидуальная.

Ход занятия.

1) Организационный момент.

Приветствие, сообщается тема и цели занятия.

2) Актуализация знаний учащихся.

Давайте вспомним:

1. Что такое вектор? Какие векторы называют нулевыми?
2. Нарисуйте вектор и отметьте на нем начало и конец вектора. Какие векторы называют равными?

3) Изучение нового материала.

Опр.: Если точка A - начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ отложен от точки A.

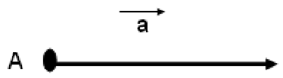


Рис. 2.1.

Учащиеся выполняют построения в тетрадях и на доске.

Утверждение: От любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

рис. 2.2.

Примеры: Постройте векторы А) $MP = \vec{a}$; Б) $NQ \uparrow\downarrow \vec{a}$

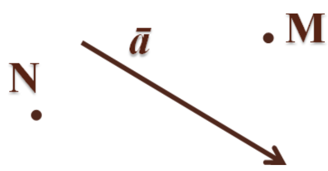


рис. 2.3

Задача 1: стороны прямоугольника ABCD равны 3дм и 4дм. Найдите длины вектора $\overrightarrow{AC}$. (Учащиеся заполняют пропуски в задаче)

Решение: Длина вектора $\overrightarrow{AC}$ – это длина ______AC. Отрезок AC является _____________ прямоугольника ABCD, следовательно,

$AC = \sqrt{3^2 + \_\_}$ =___(дм), т.е. $|\overrightarrow{AC}|$ =____дм.

Ответ: ______________.

4) Закрепление материала.

На закрепление изученного материала предлагаю вам самостоятельную работу: *(учащиеся выполняют работу на тетрадях)*

Вариант 1.

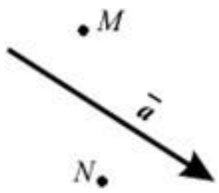


рис. 2.4.

1. Постройте векторы $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{NQ}$ такие, что $\overrightarrow{MP} = \vec{a}, \overrightarrow{NQ} = \vec{a}$.
2. ABCD – параллелограмм.

   Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Вариант 2.

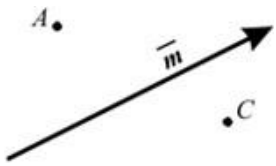


рис. 2.4.

1. Постройте векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ такие, что $\overrightarrow{CD} = \vec{m}, \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{m}$.

2. Точки M,N,K,P не лежат на одной прямой и $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{PN}$. Докажите, что – параллелограмм.

5) Домашнее задание *(Записывают в тетрадь)*

1. Начертите ненулевой вектор $\vec{a}$ и отметьте на плоскости три точки А,В и С . Отложите от точек А,В и С векторы, равные $\vec{a}$.

2. В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке О. равны ли векторы?

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; б)$\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$? Ответ обоснуйте.

Занятие № 3

Тема: Сумма векторов. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма.

Цели занятия:

Образовательные:

- Проверка знаний учащихся, полученных на предыдущем уроке о векторах;
- Знакомство учащихся с правилами сложения векторов;
- Отработка полученных знаний при решении задач.

Развивающие: развитие самостоятельности, самоконтроля, умения сравнивать и делать выводы.

Воспитательные: воспитание положительной мотивации при изучении нового материала и применения полученных знаний.

Тип занятия: урок изучения нового материала.

Ход занятия.

1. **Организационный момент.**

Приветствие, сообщается тема и цели занятия.

2. **Актуализация знаний учащихся.**

Фронтальная работа по рисунку с одновременной проверкой

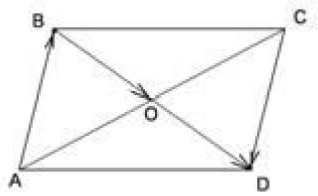


рис.3.1.

а) Назовите все векторы, изображенные на рис. 3.1.

б) Среди изображенных на рис. 3.1. векторов укажите коллинеарные, сонаправленные и равные вектора.

в) Среди изображенных на рис. 3.1. векторов укажите векторы, сонаправленные вектору $\overrightarrow{OO}$.

3. Изложение нового материала.

Вводится понятие суммы двух векторов (<u>правило треугольника</u>).

Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим произвольную точку А и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. Затем от точки В отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это правило называется «правило треугольника».

Учащиеся выполняют аналогичные построения в тетради.

Вводится понятие суммы двух векторов (<u>правило параллелограмма</u>)

Рассмотрим те же два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. От произвольной точки А отложим вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$ и затем вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору. Построим параллелограмм ABCD , проведем в нем диагональ AC, тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ равен сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Этот прием построения суммы векторов называется «правилом параллелограмма»

Учащиеся выполняют аналогичные построения в тетради.

Сравните полученные результаты и попытайтесь сделать вывод. Результаты получаются одинаковые, независимо от того каким правилом воспользуешься.

Законы сложения векторов.

Переместительный закон сложения: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Сочетательный закон: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

1. **Закрепление изученного материала**

Задача 1. Используя правило треугольника, найди сумму векторов:

а) $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{MT}$; б) $\overrightarrow{CH}$ и $\overrightarrow{HC}$; в) $\overrightarrow{AD} + \vec{0}$; г) $\vec{0} + \overrightarrow{CE}$.

Решение:

а) $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{PT}$

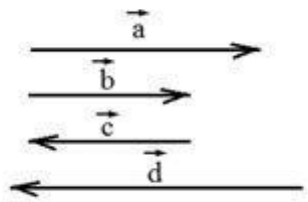
б) $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

в) $\overrightarrow{AD} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$

г) $\vec{0} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CE}$.

Задача 2. Сложение коллинеарных векторов.

Найдите сумму векторов по правилу треугольника



4. **Самостоятельная работа**

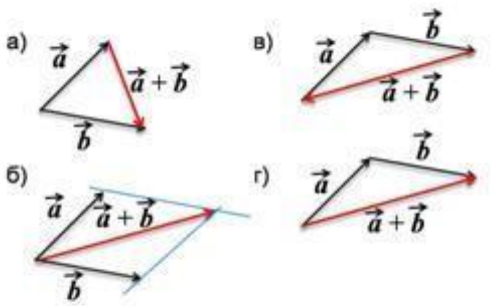
1) Упростите выражение $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{NX}$

   а) $\overrightarrow{MX}$; б) $\overrightarrow{MY}$; в) $\overrightarrow{NY}$; г) $\overrightarrow{YM}$.

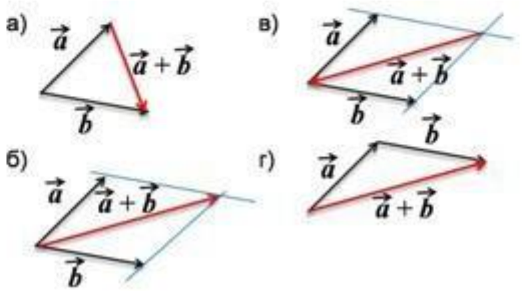
2) Найдите вектора $\vec{x}$: $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{AK}$

   а) $\overrightarrow{BK}$; б) $\overrightarrow{KB}$; в) $\overrightarrow{KK}$; г) $\overrightarrow{CK}$.

3) Найдите вектор $\vec{a} + \vec{b}$, используя правило треугольника.



4) Найдите вектор $\vec{a} + \vec{b}$, используя правило параллелограмма.



Ответы :

1	2	3	4
Б	А	Г	Б

5. Постановка домашнего задания

Выучить определения и законы сложения.

6. Подведение итогов урока

– Какие правила можно использовать для нахождения суммы векторов?
– Какова последовательность выполнения при использовании этих правил?
– Есть ли разница в том, каким правилом вы воспользуетесь при нахождении суммы векторов?
– Что можно сказать при сложении ненулевого вектора с нулевым?

Занятие № 4

Тема: Сумма нескольких векторов.

Цель занятия: ознакомить учащихся с правилом построения суммы нескольких векторов, правилом многоугольника и со свойством сложения нескольких векторов.

Задачи урока:

Образовательные:

- Повторение теоретических сведений по теме «Векторы»;
- Научить учащихся выполнять сложение нескольких векторов;

- Выработать у учащихся умение применять свойства сложения нескольких векторов в решении простейших задач.

Развивающие:

- Развитие познавательного интереса к предмету
- Формирование ключевых и предметных компетентностей
- Развитие пространственного воображения и логического мышления
- Развитие памяти, математической речи, наблюдательности, развитие графических навыков у учащихся
- Развитие творческих способностей
- Развивать у учащихся навыки самостоятельной работы и работы в парах

Воспитательные:

- Воспитание интереса к предмету и потребности в приобретении знаний
- Воспитание инициативы и творчества
- Воспитание ответственного отношения к учебному труду
- Воспитание уважительного отношения к сверстникам.

Тип занятия: изучения нового материала.

Ход занятия.

1. Организационный момент.

Приветствие, сообщение темы и целей занятия.

2. Актуализация знаний

Вспомните:

1) Какие законы сложения мы рассматривали на прошлом занятии?
2) Дан параллелограмм ABCD (рис.4.1). Найдите сумму векторов BD+DC=?

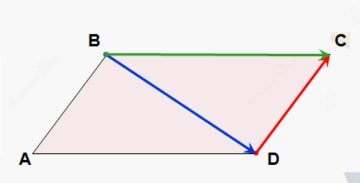


Рис.4.1.

3. Изучение нового материала

Опр.: Суммой нескольких векторов называется вектор, получающийся после ряда последовательных сложений: к первому вектору прибавляется второй, к полученному вектору прибавляется третий и т.д.

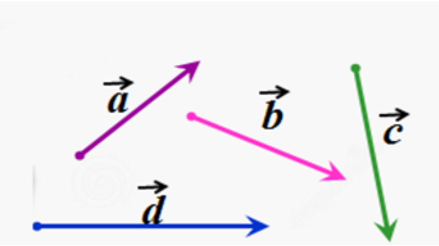


рис.4.2

Сумма векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ обозначается так: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

Из определения вытекает способ построения суммы нескольких векторов.

Построим, например, сумму $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и $\vec{d}$.

От произвольной точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, а затем от точки C – вектор $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, наконец, от точки D- вектор $\overrightarrow{DE}=\vec{d}$. Тогда по определению, вектор $\overrightarrow{AE}$- сумма векторов

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ и } \vec{d} \text{ или } \overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}.$$

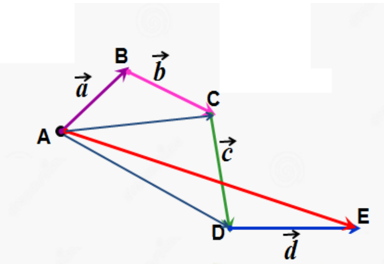


рис. 4.3

Вывод: Первый вектор складывается со вторым, затем их сумма – с третьим вектором и т.д. Это правило сложения векторов называется **правилом многоугольника.**

Из закона сложения векторов следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком языке они складываются.

1. Закрепление нового материала

Задача 1. Пользуясь правилом многоугольника и законом сложения векторов, упростите выражения: $\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{KM}$.

Решение: $\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{MT}+$___=___+ $\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{MT}+$___= $\overrightarrow{BK}+$ ___+ $\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{MT}=$_____+ $\overrightarrow{MT}$ + ___ = ___ + $\overrightarrow{TP}$ = ___.

Ответ: ______

Задача 2 . ABCD - ромб, CD- прямоугольник.

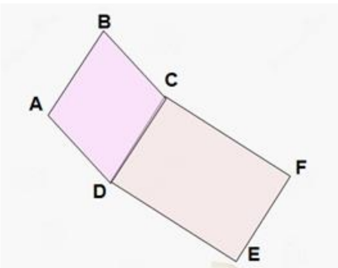


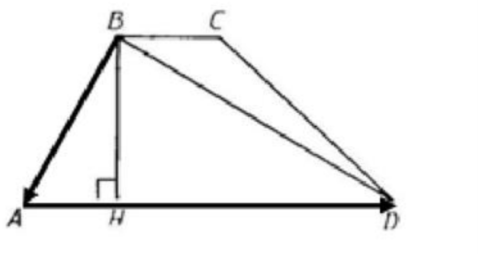
рис.4.4

А. Упростите выражение $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EF}$.

Б. Найдите вектор $\vec{b}$ такой, что $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FC}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

2. Домашнее задание

Задача: В трапеции ABCDAD || BC, ∠ABC = 120° , AD = 6см, AB = 3см. Найдите $|BA + AD|$.



Занятие № 5

Тема: Вычитание векторов.

Цели занятия:

- Ввести понятия разности двух векторов; противоположных векторов
- Научить строить разность двух данных векторов двумя способами
- Рассмотреть теорему о разности двух векторов
- Научить решать задачи на вычитание векторов.

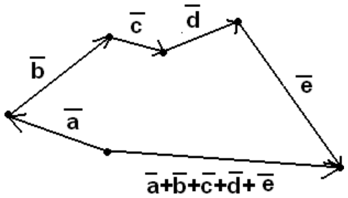
Тип занятия: усвоение новых знаний и умений.

Ход занятия.

1. **Организационный момент**

Приветствие и проверка общей готовности учащихся к занятию

2. **Актуализация знаний**



На доске даны векторы. Найдите сумму векторов. Какие вопросы у вас возникли при построении суммы данных векторов? У кого в результате суммы получился 0 ?

(ученик показывает свое решение у доски)

3. **Подготовка учащихся к восприятию нового материала**

Прежде чем говорить о разности векторов, вспомним о разности чисел. Что значит, из числа а вычесть число b?

- Разностью чисел a и b называется такое число c, что b+c=a (ученики отвечают на заданный вопрос)

Найдите вектор $\vec{x}$ из равенства:

1) $\vec{x} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}; (\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},\ \vec{x} = \overrightarrow{AC})$

2) $\vec{x} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MC}; (\vec{x} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD},\ \vec{x} = \overrightarrow{MD})$

Что значит из данного числа вычесть другое? Надо к этому числу прибавить противоположное вычитаемому. Т.е. a-b=a+(-b). Чтобы найти разность двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, мы к вектору $\vec{a}$ прибавим вектор проиивоположный вектору $\vec{b}$. А какой вектор мы назовем противоположным данному?

- Вектор равный данному по длине, но противоположно направленный.

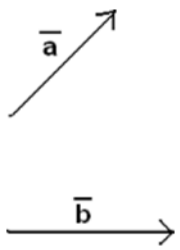
Укажите вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{KE}$.

Ответ: $\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{NM},\ \overrightarrow{EK}$.

4. Изучение нового материала

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой **вектор**, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Разность обозначается так: $\vec{a}-\vec{b}$.

Построим разность двух векторов с использованием правила треугольника.



Пусть даны два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки векторы $=\vec{a}$ и $=\vec{b}$.

По правилу треугольника $\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$. Таким образом, сумма векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}$ равна $\vec{a}$. По определению разности векторов это означает, что$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$, т. е. вектор $\overrightarrow{BA}$ искомый.

Построить разность двух векторов можно и другим способом, для этого мы ввели понятие вектора, противоположного данному. Рассмотрим теорему о разности двух векторов.

Теорема: для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

Сначала построим противоположный вектор, а затем найдем сумму.

5. Закрепление изученного материала

Задача 1. Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ и постройте векторы $\vec{x}-\vec{y};\ \vec{z}-\vec{y};\ \vec{x}-\vec{x};\ -\vec{x};\ -\vec{y};\ -\vec{z}$.

Задача 2. Сторона равностороннего треугольника равна. Найдите

А. $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|$

Б. $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$

6. Домашнее задание: доказать теорему о разности векторов.

Занятие № 6

Тема: Умножение вектора на число.

Цель занятия: формирование умения умножать вектор на число; изучение свойств умножения вектора на число; формирование умений применять изученные значение и свойства к решению задач.

Тип занятия: комбинированный.

Ход занятия.

1. **Организационный момент**

Приветствие и проверка общей готовности учащихся к занятию.

2. **Актуализация знаний**

Фронтальная беседа

1) Дайте определение суммы двух векторов. Опишите способы построения вектора суммы двух векторов.

2) Дайте определение разности двух векторов. Опишите способы построения вектора разности двух векторов.

3) Сформулируйте законы сложения и вычитания двух векторов.

3. **Изучение нового материала**

Опр.: Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, причем:

1) $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2) Если $\lambda>0$, то вектор $\vec{b}$, одинаково направленный с вектором $\vec{a}$;

3) Если $\lambda< 0$, то вектор $\vec{b}$ противоположно направленный вектору $\vec{a}$ (рис.6.1).

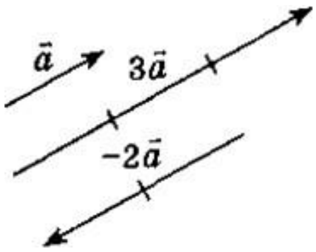


рис. 6.1

Свойства произведения вектора на число

1) $(\lambda_1\lambda_2)\vec{a} = \lambda_1(\lambda_2\vec{a})$ (связующий закон);

2) $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a} = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a}$ (распределительный закон);

3) $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$ (распределительный закон);

4) $0 \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Два ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, λ-отличное от нуля число.

Координаты вектора $\lambda\vec{a}$ равны произведению числа λ на соответствующие координаты векторы $\vec{a}$. Если векторы заданы на плоскости, то $\lambda\vec{a}(a_1;\ a_2) = \vec{a}(\lambda a_1;\ \lambda a_2)$.

Решение упражнений:

1) Постройте вектор $\vec{a}$, длина которого равна 4 см. постройте с помощью линейки векторы:

.а) $2\vec{a}$; б) $-2\vec{a}$; в) $\frac{1}{2}\vec{a}$.

2) Дано $\vec{a}(1;\ -3), \vec{b}(-2; 1)$. Найдите координаты вектора:

а) $2\vec{a}$; б) $-3\vec{b}$; в) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; ; ; г) $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

3) В параллелограмме ABCDO- точка пересечения диагоналей, K-середина стороны CD. Выразите векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

4. Закрепление и осмысление нового материала

Решение задач

1) В треугольнике ABC AM- медиана. Докажите, что $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

2) Точки M и N- середины отрезков AB и CD соответственно (рис.6.2). Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

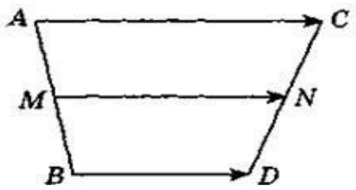


рис.6.2

3) Дан параллелограмм ABC, $\overrightarrow{AC} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Домашнее задание

1) Изучить теоретический материал

2) Решить задачи

1) Даны векторы $\vec{a}(3{:}\,2)$ и $\vec{b}(0;-1)$. Найдите вектор $\vec{c} = -2\vec{a} + 4\vec{b}$ и его абсолютную величину.

2) В параллелограмме ABCD O- точка пересечения диагоналей, M- середины BC. Выразите $\overrightarrow{DO}$ и $\overrightarrow{DM}$ через векторы $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DC}$.

Занятие № 7

Тема: Средняя линия трапеции.

Цель занятия:

- Ввести понятия средней линии трапеции
- Доказать теорему о средней линии трапеции с помощью векторов
- Упражнять учащихся в решении задач

Тип занятия: изучение новой темы

Ход занятия

1. Организационный момент

Приветствие учащихся, проверка их готовности к уроку

2. Актуализация знаний

Устно ответить на вопросы:

1) Какие векторы называются коллинеарными? Изобразите на рисунке сонаправленные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направленные векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$.
2) Могут ли векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ быть неколлинеарными?
3) Сформулируйте основные свойства умножения вектора на число.

3. Изучение нового материала.

В трапеции ABCD отрезки AD и BC являются основаниями трапеции, а отрезки AB и CD – боковыми сторонами.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется ее средней линией.

Докажем, что средняя линия трапеции параллельна основаниями и равна их полсуммы.

Доказать: MK || AD, $MK = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Доказательство:

Выразим вектор $\overrightarrow{MK}$ через сумму векторов сначала одним, а затем другим способом.

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK}$$

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}$$

Сложим почленно эти два равенства и упростим получившееся выражение.

$$2\overrightarrow{MK} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{DK}\right) = 0 + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right) + 0$$
$$= (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$

Выразим вектор $\overrightarrow{MK}$ через векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

$$\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}\text{, тогда } \overrightarrow{MK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}\text{, т. е. } \overrightarrow{MK} \,||\, \overrightarrow{AD}.$$

Выразим длину вектора $\overrightarrow{MK}$: $2\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Следовательно, длина средней линии трапеции равна полусумме ее оснований.

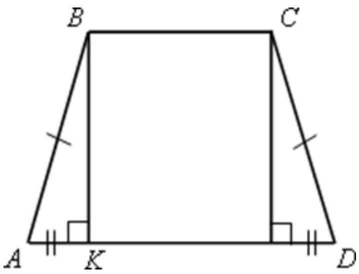
4. Закрепление материала

Задача 1. Боковые стороны трапеции равны 13 см и 15 см, а периметр равен 48 см. найдите среднюю линию трапеции.

Решение:

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ − основания трапеции, тогда $\vec{a} + \vec{b} = 48 - (13 + 15) = 20$ (см); средняя линия $\overrightarrow{MN} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{20}{2} = 10$(см). Ответ: 10 см.

Задача 2. Дана равнобедренная трапеция ABCD. Перпендикуляр, проведенный из вершины B к большому основанию AD, делит это основание на два отрезка, больший из которых равен 7 см. Найдите среднюю линию трапеции. [5]



Решение: Пусть BK- перпендикуляр, проведенный к основанию AD данной трапеции.

Тогда KD=AD – AK.

Но $AK = \frac{AD-BC}{2}$, поэтому $KD = AD - \frac{AD-BC}{2} = \frac{AD+BC}{2}$, то есть отрезок KD равен средней линии трапеции. Значит, средняя линия трапеции равна 7 см. Ответ: 7см.

5. Итоги урока.

1) Что называется средней линией трапеции?

2) Каково свойство о средней линии трапеции?

3) Что понравилось?

4) Что не понравилось?

6. Домашнее задание.

Подумать над другим способом доказательства теоремы о свойстве средней линии трапеции.

Занятие № 8

Тема: Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.

Цель занятия: Научить учащихся применять формулы нахождения скалярного произведения при решении задач.

Тип занятия: изучение новой темы.

План урока:

1) Организационный момент (2 мин.).

2) Изучение нового материала (15 мин.).

3) Закрепление нового материала (18 мин.).

4) Итог урока (5 мин.).

5) Выставление оценок, домашнее задание.(5 мин.).

Ход занятия.

1. Учитель:

- Здравствуйте, садитесь. Откройте тетради, запишите сегодняшнее число и тему урока «Угол между векторами. Скалярное произведение векторов».

2. Учитель:

-Запишите **определение**:

Углом между ненулевыми векторами a $и$ b называется угол, образованный при откладывании этих векторов от одной точки.

Обозначение: $(a,\wedge b)$

- Замечание:

Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен 0°, а если векторы противоположно направлены, то угол между ними равен 180°.

- Введем определение скалярного произведения:

***Опр.*:** Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е. скалярное произведение векторов равно числу:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{|a|}\cdot\overrightarrow{|b|}\cdot\cos(\vec{a},\hat{}\vec{b}) => \cos(\vec{a},\hat{}\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\overrightarrow{|a|}\cdot\overrightarrow{|b|}}$$

Свойства: (на доске)

1. Для любых a, b верно:

a·b=b·c

2. Для любых a, b и любого действительного числа α верно:

$(\alpha a)b=\alpha(a\cdot b)$

3. Для любых a, b и c верно:

$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

3. Закрепим новый материал:

Задача №1

Дано:

$\overrightarrow{|a|}=5$

$\overrightarrow{|b|}=4$

$\cos(\vec{a},\hat{}\vec{b})=0.6$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=?$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{|a|}\cdot\overrightarrow{|b|}\cdot\cos(\vec{a},\hat{}\vec{b})=5\cdot4\cdot0.6=12$

Задача №2

Дано:

$\overrightarrow{|a|}=\sqrt{3}$

$\overrightarrow{|b|}=2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$\cos(\vec{a},\hat{}\vec{b})=?$

$$\cos(\vec{a},\hat{}\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\overrightarrow{|a|}\cdot\overrightarrow{|b|}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Задача №3

Дано:

$$\overrightarrow{|b|} = 2$$

$$\cos\left(\vec{a}, \hat{}\vec{b}\right) = 0.5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$$

$$\overrightarrow{|a|} = ?$$

$$\overrightarrow{|a|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\overrightarrow{|b|}\cos(\vec{a}, \hat{}\vec{b})} = \frac{5}{2 \cdot 0.5} = 5$$

- Скалярное произведение определяется также через координаты. Запишите координатный вид скалярного произведения.

Пусть даны векторы:

$a\{x_1, y_1\} \quad b\{x_2, y_2\}$

Тогда их скалярное произведение определяется формулой:

$$a \cdot b = x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2$$

(сумма произведений абсцисс векторов и ординат векторов) так как:

$$\cos(\vec{a}, \hat{}\vec{b}) = \frac{a \cdot b}{\overrightarrow{|a|} \cdot \vec{b}}$$

и

$$\overrightarrow{|a|} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \qquad \overrightarrow{|b|} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

то через координаты формула нахождения косинуса угла между векторами выглядит следующим образом:

$$\cos(\vec{a}, \hat{}\vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Если векторы взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0

Решим следующую задачу:

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\{1,1\}\ \vec{b}\{2,3\}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 = 5$

4. - Сегодня на уроке мы познакомились с понятием скалярного произведения векторов. Что является скалярным произведением векторов?

- По каким формулам можно найти косинус угла между векторами?

- Как находится абсолютная величина вектора?

Занятие № 9

Тема: Применение векторов к решению задач.

Цель занятия: на конкретных примерах показать применение векторов при решении геометрических задач; развивать логическое мышление учащихся, учить решать задачи.

Тип занятия: закрепление и совершенствование знаний, навыков и умений.

Ход занятия.

1. **Организационный момент**

Приветствие. Написать на доске дату и тему занятия.

2. **Актуализация знаний.**

    1) Вспомнить основные правила действий с векторами.
    2) Решить задачи на доске и в тетрадях

А) Упростите выражения $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{EP}$.

Б) Найдите вектор $\vec{x}$ из условия $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}-\vec{x}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DF}$.

В) Записать в тетрадях таблицу перевода с «геометрического языка» на «векторный»:

С- точка на прямой АВ	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$
MN ‖ PQ	$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{PQ}$
ABCD – параллелограмм	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}\neq k\overrightarrow{AC}$
ABCD –трапеция (AB ‖ CD)	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}, k>0, k\neq 1;\ \overrightarrow{AB}\neq x\overrightarrow{AC}$

3. **Решение задач**

Задача 1. Точки M и N – середины сторон AB и CD четырехугольника ABCD. Докажите, что

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Решение: Пусть O- произвольная точка.

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right), \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$ поэтому $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

Примечание. Результат задачи 1 можно использовать при доказательстве теоремы о средней линии трапеции.

Задача 2. Точка C лежит на отрезке AB, причем $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{3}$. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$.

Решение: По условию $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{3}$, поэтому $3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$. Но $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

Следовательно,

$3\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) = 2\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)$, откуда получается $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$.

4. **Домашнее задание**

Приготовиться к контрольной работе.

Занятие № 10

Тема: Контрольная работа по теме: «Векторы».

Цель занятия: Проверить знания учащихся по теме «Векторы».

Тип занятия: повторение ранее изученных тем.

Характеристика занятия:

– Контрольная работа состоит из двух вариантов одинаковой сложности.

– Каждый вариант содержит три задачи примерно одинаковой сложности.

Вариант 1.

1. Даны два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы

$$a)\ \vec{a}+\vec{b};\ b)\ \vec{a}-\vec{b};\ c)\ 2\vec{a}+\vec{b};\ d)\ \vec{a}+2\vec{b}.$$

2. $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей, – середина BC, $AB = a$, $AD = b$. выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующие векторы:

$$a)\ \overrightarrow{AC};\ b)\ \overrightarrow{AO};\ c)\ \overrightarrow{BD};\ d)\ \overrightarrow{AM}.$$

3. Одно основание трапеции на 4 см больше другого, а средняя линия равна 8см. Найдите основание трапеции.

Вариант 2.

1. Даны два произвольных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Постройте векторы

$a)\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC};\ b)\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC};\ c)\ \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC};\ d)\ 3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$

2. ABCD – параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей, - середина AD , CB = a, CD = b. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующие векторы:

$a)\ \overrightarrow{CA};\ b)\ \overrightarrow{CO};\ c)\ \overrightarrow{BD};\ d)\ \overrightarrow{CM}.$

3. Одно основание трапеции в 2 раза больше другого, а средняя линия равна 9 см. Найдите основание трапеции.

2.5. Примеры решения геометрических задач векторным методом

При решении геометрических задач векторным методом нужно от геометрической постановки задачи перейти к ее векторному описанию. Затем, пользуясь свойствами векторов и операции над ними, найти некоторые векторные соотношения, отражающие данные и условия задачи, из которых можно получить решение задачи.

Задача 1. Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям. [12]

Решение: Пусть *M* и *N*– середины диагоналей трапеции *ABCD*. Покажем, что *MN* || *AD*. Для этого достаточно показать, что MN коллинеарен *AD*.

Так как M и N – середины отрезков AC и BD, то

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AM}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\right),$$

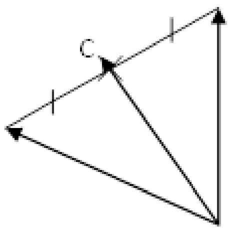
$$\overrightarrow{\boldsymbol{AN}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AD}}\right).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{MN}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AN}} - \overrightarrow{\boldsymbol{AM}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AD}}\right) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AD}} - \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\right).$$

Но $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$, поэтому $\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{AD}} = \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$. Тогда $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AD}} - \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{1} - \lambda)\overrightarrow{\boldsymbol{AD}} = \boldsymbol{k}\overrightarrow{\boldsymbol{AD}},$ то есть $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$ коллинеарен $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$, что и требовалось доказать.

Задача 2. Точка C - середина отрезка AB, а O – произвольная точка на плоскости (рис. 5). Доказать, что $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OB}})$. [10]



Решение: По правилу треугольника.

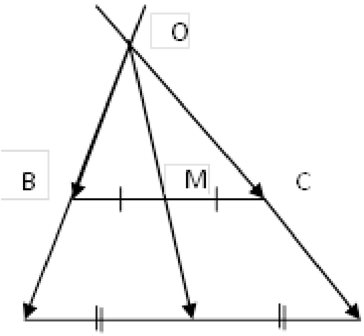
$\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$. Складывая эти равенства, получаем:

$$\mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{OC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} + (\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}})$$

Так как точка C – середина отрезка AB, то $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = \vec{\mathbf{0}}$. Таким образом,

$\boldsymbol{2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}$, или $\boldsymbol{\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}$.

Задача 3. Доказать, что прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон. [4]



Пусть $ABCD$ - данная трапеция, M и N - середины оснований BC и AD, а O - точка пересечения прямых AB и CD (рис. 6).

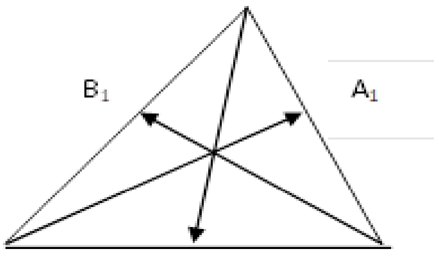
Докажем, что точка O лежит на прямой MN. Треугольники OAD и OBC подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{oc} = K$. Так как $\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OD}$, то $\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OC}$. (1)

Точка M – середина отрезка BC, поэтому $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Аналогично $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$.

Подставив в последнее равенство выражения (1) для $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}$ получим: $\overrightarrow{ON} = k \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, и, значит, точкая O лежит на прямой MN.

Задача 4. Дан произвольный треугольник ABC . Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны медианам треугольникаABC. [3]



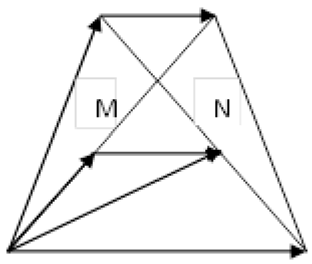
Решение: Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC (рис.7).

Тогда $AA_1 = \frac{1}{2}(AB + AC)$, $BB_1 = \frac{1}{2}(BC + BA)$, $CC_1 = \frac{1}{2}(CA + CB)$ (задача 2). Сложив эти равенства, получим:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = \frac{1}{2}((AB + BA) + (AC + CA) + (CB + BC)) = 0.$$

Отсюда следует, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны медианам треугольника ABC.

Задача 5. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям. [6]



Решение: Пусть M и N – середины диагоналей трапеции ABCD (рис.8). Покажем, что MN || AD. Для этого достаточно показать, что MN коллинеарен AD.

Так как M и N – середины отрезков AC и BD, то

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right), \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Следовательно,

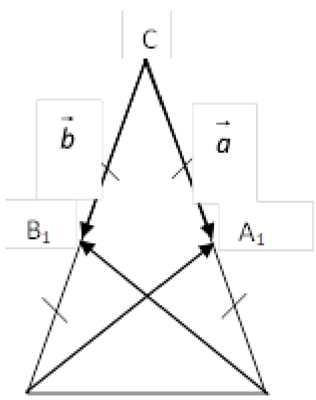
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right).$$

Но $\overrightarrow{BC}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AD}$, поэтому $\lambda \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$

λ- вещественное число.

Тогда $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \lambda \cdot \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}(1 - \lambda)\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{AD}$, т.е. $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$, что и требовалось доказать.

Задача 6. Найдите угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. [17]



Решение: Пусть ABC – равнобедренный треугольник с основанием AB и AA_1, BB_1- его медианы, проведенные к боковым сторонам (рис.9).

Введем обозначения $CA_1 = \vec{a}, CB_1 = \vec{b}, |CA_1| = |CB_1| =$

$|\vec{a}|$.

Тогда $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB} = \vec{b} - 2\vec{a}$, поэтому скалярное произведение

$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} - 2\vec{a}) = 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{b} \cdot \vec{b}$ (2)

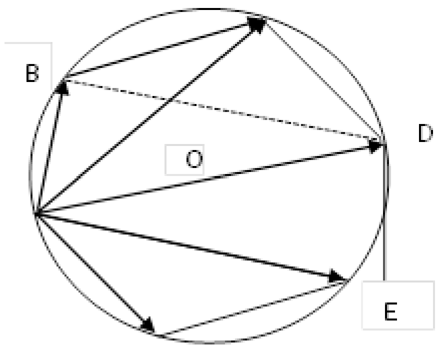
По условию задачи $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BB_1}$, и, следовательно, $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$.

Далее, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 cosC$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = a^2$, поэтому равенство (2)

Принимает вид $0 = 5a^2 cosC - 4a^2$. Отсюда получаем $cosC = \frac{4}{5}$, $\angle C = arccos\frac{4}{5}$.

Задача 7. ABCDEF – правильный шестиугольник. Доказать, что

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$. [19]



Решение: Пусть ABCDEF – правильный шестиугольник. Покажем, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.

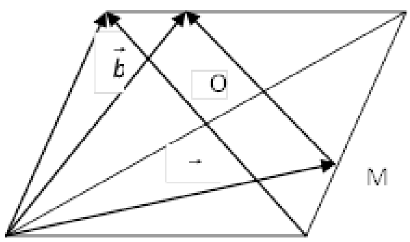
Заметим, что $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$.

Далее $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD}$.

Отсюда следует, что

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + AD = 3\overrightarrow{AD}$.

Задача 8. В параллелограмме ABCD дано: M$\in BC$ и $BM{:}MC = 1{:}2$; $N \in DC$, $DN : NC = 1{:}2$; $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{b}$. [2]



Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BD}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение: Пусть ABCD – параллелограмм (рис. 11), в котором M ϵ BC, BM : MC=1:2, N ϵ DC, DN:NC=1”2, $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{b}$.

Выразим $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BD}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$. $DO = OB, DB||MN => NO_1 = O_1M$.

Тогда $\overrightarrow{AO_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{O_1C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1C} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}, \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC} = \frac{3}{8}\vec{a} - \frac{1}{8}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NC} = \frac{9}{8}\vec{a} - \frac{3}{8}\overrightarrow{b}, \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC} = \frac{3}{8}\vec{b} - \frac{9}{8}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}, \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \frac{3}{8}\vec{b} - \frac{1}{8}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \frac{9}{8}\vec{b} - \frac{3}{8}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}.$$

2.6. Апробация

Данный элективный курс проходил апробацию на базе МБОУ Хандагайтинская СОШ в 9 «б» классе в рамках дополнительных часов консультаций. Класс состоит из 22 учеников. Классным руководителем является учитель математики Достай Светлана Кыргысовна.

Для учащихся было проведено 10 занятий, на первом занятии – рассмотрели понятие вектора и равенство векторов, на втором – отложение вектора от данной точки. В третьем занятии – сложение векторов, законы сложения векторов и правило параллелограмма, в четвертом – сумма нескольких векторов, в пятом – вычитание векторов. Шестое занятие – умножение вектора на число, седьмое занятие – средняя линия трапеции, восьмое занятие – скалярное произведение векторов, девятое занятие – применение векторов к решению задач. Последнее, десятое занятие - контрольная работа по изученной теме.

Задания для контрольной работы подобраны таким образом, чтобы проверить у учащихся освоение векторного метода при решении задач. Результат контрольной работы показал, что учащиеся овладели равносильными переходами при решении предложенных задач.

На занятиях были проведены две самостоятельные работы и итоговая контрольная работа.

Результат самостоятельных и контрольных работ.

№	ФИО учащегося	Сам. раб. №1	Сам. раб. №2	Контрольная работа
		Оценки		
1	Будегечи Снежана	3	4	4
2	Донгак Ендан	4	4	5

3	Донгак Милана	4	4	4
4	Донгак Начын	4	4	5
5	Кара-Сал Яна	3	3	4
6	Куулар Айслана	5	5	5
7	Куулар Чимит	3	4	4
8	Кыргыс Ангыр	4	4	4
9	Лопсан Сухбат	5	5	5
10	Монгуш Айдаш	4	5	5
11	Монгуш Аланды	4	3	4
12	Монгуш Ачыты	4	3	4
13	Монгуш Аялга	4	4	4
14	Монгуш Чыжыргана	5	4	5
15	Монгуш Яна	4	5	5
16	Ондар Начын	4	5	5
17	Ооржак Угулза	3	4	3
18	Саая Аюш	4	4	4
19	Седен-оол Самира	4	5	4
20	Тойбу Вилория	3	3	4
21	Хертек Аяс	4	4	4
22	Хертек Батый	4	4	3

По таблице видно, что после прохождения элективного курса у оставшихся учащихся есть успех, хоть и незначительный, но все же есть.

В завершении своего элективного курса пришла к выводу, что он повысил знания по векторам, научил учащихся решать задачи векторным методом на сознательной основе, и его можно использовать в учебном процессе в школе. Все это подтвердило гипотезу исследования: организация обучения теме «Векторы» по разработанной нами элективному курсу способствует эффективному усвоению учащимися материала по этой теме и формированию у них умений и навыков решения задач векторным методом.

Заключение

Данная выпускная квалификационная работа посвящена методике изучения темы «Векторы» в школьном курсе геометрии.

Была выдвинута следующая **гипотеза** исследования: Организация обучения теме «Векторы» по разработанной нами элективному курсу способствует эффективному усвоению учащимися материала по этой теме и формированию у них умений и навыков решения задач векторным методом.

В первой главе изложены методологические основы изучения темы «Векторы» в школьном курсе геометрии. Здесь определены роль и место темы «Векторы» в школьном курсе геометрии, сделан сравнительный анализ темы «Векторы» в школьных учебниках геометрии.

Во второй главе нами разработана методика изучения темы «Векторы» по темам. Методику изучения темы мы дали согласно учебникам А.В. Погорелова и Л.С. Атанасяна и др. Основную часть главы составляет разработанный нами элективный курс по теме «Векторы» для учащихся 9 классов.

Во время создания данного элективного курса мы детально рассмотрели векторы и их применение при решении геометрических задач, подробно изучили векторный метод решения задач и доказательства теорем.

В процессе работы мы познакомились с рядом методической и научной литературы, систематизировали и углубили знания об операциях над векторами, коллинеарных и компланарных векторах.

В ходе работы нами были решены следующие задачи:

- Изучить учебную, методическую, психолого-педагогическую литературу по данной теме;
- Изучить ФГОС и программы по геометрии для основного общего образования;
- Разработать методику изучения темы «Векторы» по темам;

- Разработать элективный курс по теме «Векторы» для учащихся 9 классов;
- Провести апробацию исследования.

Решение перечисленных задач и апробация разработанного элективного курса привели к достижению поставленной цели исследования.

Апробация была проведена в 9«а» классе МБОУ Хандагайтинская СОШ во время педагогической практики. Результаты апробации подтвердили гипотезу исследования: организация элективного курса по теме «Векторы» для 9 класса способствует эффективному усвоению учащимися материала по данной теме и формированию у них умений и навыков решения задач векторным методом.

Таким образом, можно сделать вывод что, эта работа может быть полезна учащимся школ, учителям для проведения уроков.

Список литературы

1. Атанасян, Л.С. Геометрия 7-9 классы: учебник для общеобразовательных организаций / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.] −3-е издание. – г. Москва.: Просвещение, 2017. −384 с.- Текст: непосредственный.
2. Атанасян, Л.С. Геометрия, ч. I. Учеб. пособие для студентов физ.- мат. фак-тов пед. ин-тов. – г. Москва.: Просвещение, 2001 .– 480 с. https://drive.google.com/file/d/1R5G0Us_a5rduZQ09JXuBM7b6HrRK6Y8t/view. (дата обращения 10.04.2020г.) – Текст: электронный.
3. Атанасян, Л.С. Изучение геометрии в 7-9 классах. Пособие для учителей /[Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Глазков Ю.А. и др.].−7-е изд. – г. Москва.: Просвещение, 2009.– 255 с. https://nsportal.ru/sites/default/files/2019/02/06/geometrija_9_klass_metodicheskie_rekomendacii.pdf (дата обращения 10.04.2020г.) - Текст: электронный.
4. Болодурин, В.С. Координатно-векторный метод решения геометрических задач. Методическое пособие для учителей математики, студентов физико-математических факультетов педагогических вузов и колледжей, учащихся старших классов средней школы / Оренбург, 2015. https://search.rsl.ru/ru/record/01007912153 (дата обращения 10.04.2020г.) - Текст: электронный.
5. Бурмистрова, Т.А. Геометрия. 7-9 класс: Программы общеобразовательных учреждений.– г. Москва.: Просвещение, 2010. – 126 с. http://bosh.bip31.ru/wp-content/uploads/2015/11/geometriya-7-9-klass.pdf (дата обращения 10.04.2020г.) - Текст: электронный.
6. Гаврилова, Н.Ф. Поурочные разработки по геометрии – г. Москва.: Изд-во Вако, 2005. https://uch-lit.ru/izbrannoe/gavrilova-n-f-pourochnyie-razrabotki-po (дата обращения 15.05.2020г.)- Текст: электронный.
7. Гусев, В.А., Орлов В.Д., Панчищина В.А. и др. Методика обучения

геометрии: Учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений. /Под ред. В.А. Гусева.г.Москва.: Academia, 2004. - 368 с.- Текст: непосредственный.

8. Данилюк, А.Я., Кондаков А.М., Тишков В.А.. Концепция духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России. – г.Москва.: Просвещение, 2012. – 24 с.- Текст: непосредственный.

9. Исаева, М.А. Векторный метод решения планиметрических задач в школьном курсе геометрии / Новая наука. Теоретический и практический взгляд. 2016. № 3-2 (69). С.74-78.- Текст: непосредственный.

10. Клековник, Г.А. Решение геометрических задач векторным методом: учебное пособие для учащихся 10-11 классов. – г. Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2016.– 180 с. http://samara.mgpu.ru/files/library_elektron/VM_INF/Klekovkin_reshenie_geom_zadach.pdf (дата обращения 15.05.2020г.) - Текст: электронный.

11. Кушнир, А.И. Векторные методы решения задач. – Киев: Оберig, 2004. – 207с. https://may.alleng.org/d/math/math423.htm (дата обращения 15.05.2020г.) - Текст: электронный.

12. Мерзляк, А.Г. Геометрия: учебник для 9 классов общеобраоват. учеб. заведений с обуч. на русс. яз.: пер.сукр./[А.Г. Мерзляк, В.Б. Полынский, М.С. Якир]. –Х.: Гимназия, 2017.–240 с.- Текст: непосредственный.

13. Мишин, В.И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учебное пособие для студентов пед. институтов по физ.-мат специальности /[А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.].– Москва.: Просвещение, 1997.– 416 с.- Текст: непосредственный.

14. Новгородова, О.И. Методика изучения понятия «Вектор» и его свойств в основной школе. [Электронный ресурс]: – Электр. текст.дан. – Режим доступа: nauka_pedaqoqika.com. – Текст: электронный.

15. Погорелов, А.В. Геометрия 7-9 классы: учеб. для общеобразоват.

организаций. –2-е изд. – г,Москва.: Просвещение, 2014. –240 с.- Текст: непосредстенный.

16. Потоскуев, Е.В. Векторы и координаты как аппарат решения геометрических задач: учебное пособие / Е.В.Потоскуев. – г. Москва.: Изд-во Дрофа, 2008. – 173с.- Текст: непосредственный.
17. Прояева, И.В., Колобов А.Н. Об изучении векторной геометрии в современной школе. / Мир науки, культуры, образования. 2017. № 4(65). С.199-203. https://cyberleninka.ru/article/n/ob-izuchenii-vektornoy-geometrii-v-sovremennoy-shkole (дата обращения 15.05.2020г.)- Текст: электронный.
18. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе: Учебное пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов и университетов М.: Просвещение, 2002. - 224с.- Текст: непосредственный.
19. Саранцев, Г. И. Обучение математическим доказательствам в школе. г.Москва.: Просвещение, 2000. - 231 с. https://www.mathedu.ru/text/sarantsev_obuchenie_matematicheskim_dokazatelstvam_v_shkole_2000/p0/ (дата обращения 09.06.2020г.)- Текст: электронный.
20. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / [Министерство образования и науки РФ]. – г.Москва.: Просвещение, 2015. – 48 с.- Текст: непосредственный.