МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Тувинский государственный университет»

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Подготовка школьников к ЕГЭ по математике по разделу «Тригонометрия»

Работа допущена к защите
Зав. кафедрой ____________
Танзы М.В., к.п.н., доцент____
(фамилия, и.о., уч.степень, звание)

Студента(ки)_5_курса_1_группы
направления подготовки 44.03.05
ПО (с двумя профилями подготовки)
профили «Математика» и «Информатика»
очной формы обучения

___Куулар Саглай Орлановна _________
(Ф. И. О.)

____
(подпись)

«__»________________________20___г.

Работа защищена «__»________20__г.
С оценкой ______________________
Председатель ГЭК ______________
(подпись)
Биче-оол И.Н. директор ГАОУ «Тувинский республиканский лицей-интернат»_

Члены комиссии _________________
____
____
(подписи)

Научный руководитель: _____________
(подпись)
_Власова Л.Н., старш. преподаватель
(фамилия, и. о., должность, уч.степень, звание)

Кызыл – 2020г.

Содержание

Введение

Тригонометрия—это раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их использование в математике. Термин впервые появился в 1595 г. под названием книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (1561—1613), а понятия из тригонометрии ещё в глубокой древности использовалась для расчётов в астрономии, архитектуре и геодезии.

Уже несколько десятилетий тригонометрия, как отдельная дисциплина школьного курса математики не существует, однако ее теория широко применяются не только в геометрии, но и в алгебре, в алгебре и началах математического анализа, а также и в других дисциплинах, не только школьного курса математики.

Тригонометрические знания сегодня используются практически во всех науках и отраслях точных знаний. Эти знания достаточно активно применяются в разных областях науки.

Тригонометрия занимает значительное место в школьном курсе математики, поэтому в заданиях ЕГЭ по математике за курс средней школы обязательным компонентом являются задания по тригонометрии.

Анализ результатов ЕГЭ показывает, что у школьников вызывают затруднения выполнения заданий по тригонометрии. Эти затруднения связаны, прежде всего, с большим количеством формул и умением их применять. Особая роль отводится тригонометрическим уравнениям, при решении которых можно проверить знания и умения по многим вопросам из теории и практики. Поэтому в работе больше уделяется материалу, посвященному тригонометрическим уравнениям.

Проблема исследования заключается в том, что при большом объеме содержания количество часов на изучение раздела «Тригонометрия», особенно в общеобразовательных классах, недостаточно. Для устранения этого несоответствия при подготовке учащихся к итоговой аттестации, а также дальнейшего обучения в вузе учителю необходимо иметь достаточное количество дополнительного материала для организации самостоятельной работы учащихся.

Цель данной работы: изучить, систематизировать и изложить теоретический и методический материал с подробным разбором задач.

Для достижения цели были поставлены **задачи:**

- проанализировать школьные учебники и методическую литературу по теме исследования;

- изучить методические рекомендации по решению тригонометрических функций, уравнений и неравенств в курсе математики старшей школы;

- разработать систему тренировочных упражнений для учащихся 10- 11 классов по подготовке к ЕГЭ.

- провести экспериментальное исследование эффективности разработок;

Гипотеза: если выделить основные умения необходимые при решении задач с использованием тригонометрических функций, то это будет способствовать качественной подготовке к итоговой аттестации и дальнейшему изучению математики в вузе.

Объект исследования: процесс изучения тригонометрии в школьном курсе математики.

Предмет исследования – методика изучения тригонометрических функций в курсе алгебры и начала анализа в 10-11 классе.

Структура работы. Работа состоит из двух глав, введения и заключения. Во введении подчеркнута актуальность изучения темы раздела «Тригонометрия».

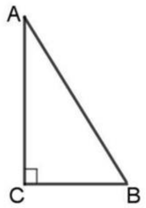
В первой главе рассмотрены теоретические сведения, связанные с тригонометрией в школьном курсе математики и приведены основные виды тригонометрических задач и методы их решения.

Вторая глава посвящена методике изучения тригонометрии в школьном курсе математики, разработке системы задач для учащихся 10- 11 классов по подготовке к ЕГЭ.

В заключении сделаны выводы по результатам работы над дипломным проектом.

Глава 1.Общие вопросы изучения тригонометрических функций в школе.

1.1 Отношения в прямоугольном треугольнике.



Пусть Δ ABC-прямоугольный, угол C-прямой, угол B-острый, a и b-катеты, c-гипотенуза. Синус угла B равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе: $sinB = \frac{b}{c}$. *Косинус* угла B равен отношению прилежащего катета к гипотенузе $cosB = \frac{a}{c}$, *тангенс* угла B равен отношению противолежащего и прилежащего катетов: $tgB = \frac{b}{a}$, *котангенс* угла B равен отношению прилежащего и противолежащего катетов: $ctgB = \frac{a}{b}$.

1.2 Тригонометрическая окружность.

Тригонометрическая (единичная) окружность- окружность радиусом, равным единице и с центром в начале координат (рисунок 1.2) . Луч OP_α получен поворотом против часовой стрелки луча OP_0 на угол α. Ордината точки P_α- синус угла α($sin\alpha$), абсцисса точки P_α- косинус угла α ($cos\alpha$). Отрезок [-1;1] на оси OY - линия синусов, отрезок [-1;1] на оси OX-линия косинусов. Величина $sec\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$ – секанс угла α. Косеканс угла α - $cosec\alpha = \frac{1}{sin\alpha}$. Тангенс угла α- это $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, котангенс угла α- $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$. Прямая *x=1 - линия (ось) тангенсов, y=1 - линия (ось) котангенсов.*

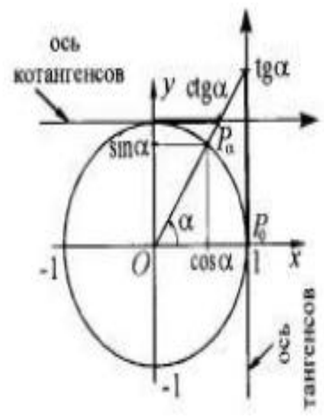


Рисунок 1.2. Тригонометрическая окружность

Угол α может измеряться в градусах и в радианах. Угол в один радиан - это центральный угол, длина дуги которого равен радиусу окружности 1 рад≈57°17′. Формула перевода градусной меры угла α в радианную $\alpha = \frac{\pi \cdot \alpha^0}{180^0}$, где α° - градусная мера угла.

Значения синуса, косинуса и тангенса периодически повторяются: $\sin(\alpha + 2\pi k) = sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2\pi k) = cos\alpha$, $\mathrm{tg}(\alpha + \pi k) = tg\alpha$, $\mathrm{ctg}(\alpha + \pi k) = ctg\alpha$, k∈Z.

1.2.1 Знаки значений функций.

Углы, полученные поворотом луча OP_0 (рис 1.2) против часовой стрелки принимаются положительными, по часовой стрелке - отрицательными. При этом $\sin(-\alpha) = -sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = cos\alpha$, $\mathrm{tg}(-\alpha) = -tg\alpha$, $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -ctg\alpha$.

Четверть	Угол α $(k \in Z)$	$sin\alpha$	$cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
I	$\alpha \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	+	+	+	+
II	$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$	+	-	-	-
III	$\alpha \in \left(\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	-	-	+	+
IV	$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k\right)$	-	+	-	-

1.2.2 Таблица значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса основных углов.

α^0	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**	**135**	**150**	**180**	**270**
α	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$sin\alpha$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**-1**
$cos\alpha$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	**-1**	**0**
$tg\alpha$	**0**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$\sqrt{3}$	**не сущ.***	$-\sqrt{3}$	**-1**	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	**0**	**не сущ.***
$ctg\alpha$	**не сущ.***	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**0**	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	**-1**	$-\sqrt{3}$	**не сущ.***	**0**

* **не сущ.** – не существует

1.3 Основные формулы тригонометрии. Формула приведения.

1) соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1;$	$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;$
$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha};$	$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha};$
$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha};$	$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}.$

2) формулы сложения

$sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha\, cos\beta \pm cos\alpha\, sin\beta;$	$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha\, cos\beta \mp sin\alpha\, sin\beta;$
$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta};$	$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}.$

3) формулы двойного аргумента

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$ $= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$
$tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \dfrac{2}{ctg\alpha - tg\alpha};$	$ctg 2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} = \dfrac{ctg\alpha - tg\alpha}{2}.$

4) формулы тройного аргумента

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$
$tg 3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha};$	$ctg 3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}.$

5) формулы половинного аргумента (для синуса и косинуса формулы понижения степени)

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2};$	$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2};$
$tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$	$ctg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

6) формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2};$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$	$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2};$
$tg\alpha \pm tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$	$ctg\alpha \pm ctg\beta = \dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}..$

7) формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$
$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$
$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}.$

Формулы приведения

Чтобы записать любую из формул приведения, можно руководствоваться следующими правилами:

1. в правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0 < \alpha > \frac{\pi}{2}$.

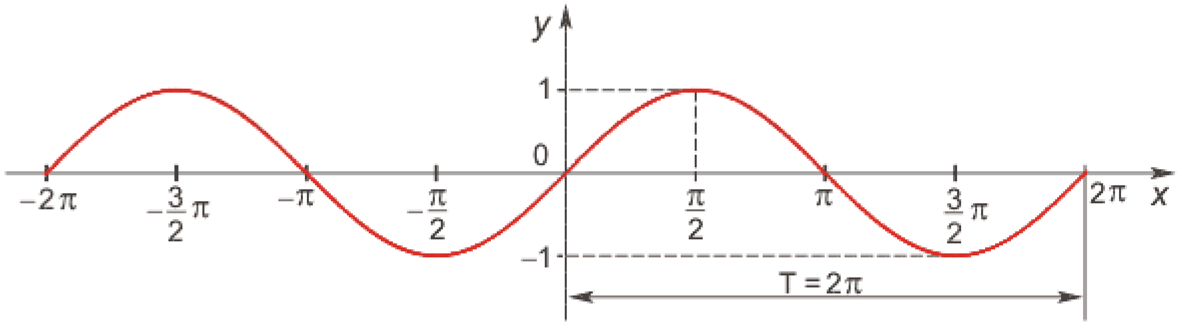
2. если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс-на котангенс и наоборот. Если угол равен π±α, то замены не происходит.

Название функции не изменяется				Название функции заменяется сходным			
	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$
	$\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z$				$\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$		
Название функции не изменяется				Название функции заменяется сходным			
ctg	$-ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$
	$\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$				$\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z$		

Например, покажем, как с помощью этих правил можно получить формулу приведения для $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$. По первому правилу в правой части формулы нужно поставить знак «-», так как если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi$, а косинус во второй четверти отрицателен. По второму правилу косинус нужно заменить на синус, следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -sin\alpha$.

1.4 Графики и свойства тригонометрических функций

1) Функция синус $\boldsymbol{y = sinx}$



Область определения функции - множество R всех действительных чисел.

Множество значений функции – отрезок [-1;1] , синус функция – ограниченная.

Функция нечетная: $\sin(-x) = -sinx$ для всех $x \in R$.

График функции симметричен относительно начала координат.

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π:

$\sin(x + 2\pi k) = sinx$, где $k \in Z$ для всех $x \in R$.

$\sin x = 0$ при x=π·k, k∈Z.

$\sin x > 0$ (положительная) для всех x$\in (2\pi k, \pi + 2\pi k), k \in Z$.

$\sin x < 0$ (отрицательная) для всех x$\in$ $(\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k,), k \in Z$.

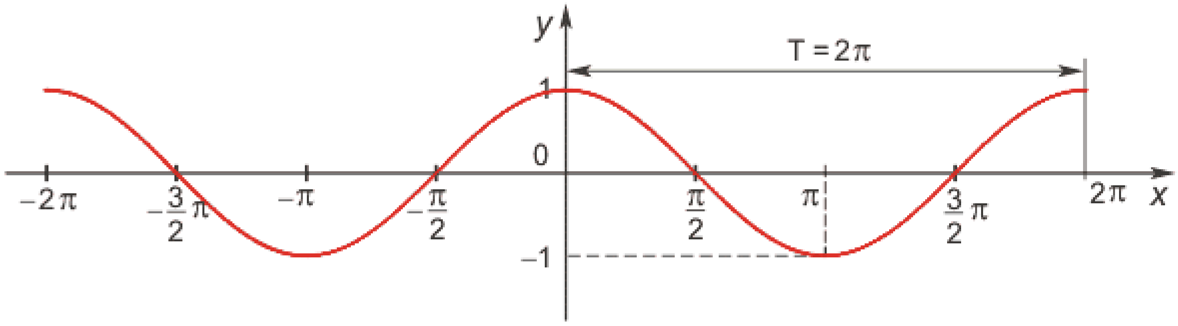
Функция возрастает от -1 до 1 на промежутках: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$.

Функция убывает от -1 до 1 на промежутках: $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$.

Наибольшее значение функции $\sin x = 1$ в точках: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Наименьшее значение функции $\sin x = -1$ в точках: $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

2) Функция косинус $\mathbf{y = \cos(x)}$



Область определения функции - множество R всех действительных чисел.

Множество значений функции – отрезок [-1;1] , косинус функция – ограниченная.

Функция четная: $\cos(-x) = cosx$ для всех $x \in R$.

График функции симметричен относительно оси OY.

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π:

$\cos(x + 2\pi k) = cosx$, где $k \in Z$ для всех $x \in R$.

$\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k, k \in Z.$

$\cos x > 0$ для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi k\right), k \in Z.$

$\cos x <$ для всех $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\right), k \in Z$.

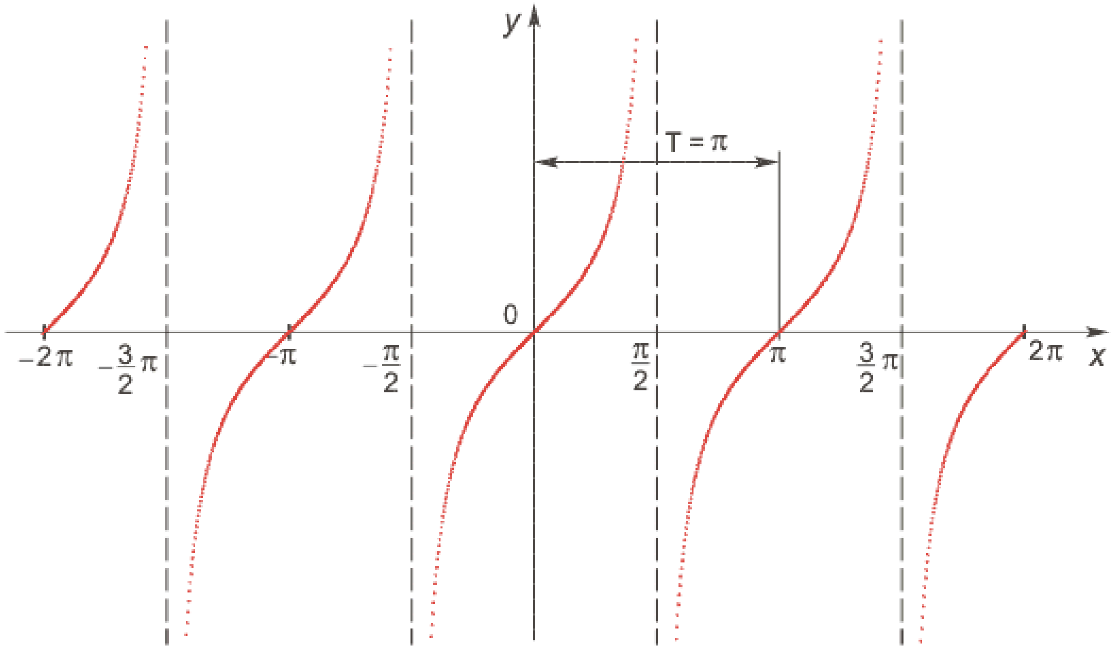
Функция возрастает от -1 до 1 на промежутках: $[-\pi + 2\pi k, 2\pi k\ ], k \in Z.$

Функция убывает от -1 до 1 на промежутках: $[2\pi k, \pi + 2\pi k\ ], k \in Z.$

Наибольшее значение функции $\cos x = 1$ в точках: $x = 2\pi k, k \in Z.$

Наименьшее значение функции $\cos x = -1$ в точках: $x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$

3) Функция тангенс $\boldsymbol{y = tgx}$



Область определения функции - множество R всех действительных чисел, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

Множество значений функции – вся числовая прямая, тангенс функция – неограниченная.

Функция нечетная: $tg(-x) = -tgx$ для всех x из области определения.

График функции симметричен относительно оси OY.

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом π:

$\mathrm{tg}(x + \pi k) = tgx,\ k \in Z$ для всех x из области определения.

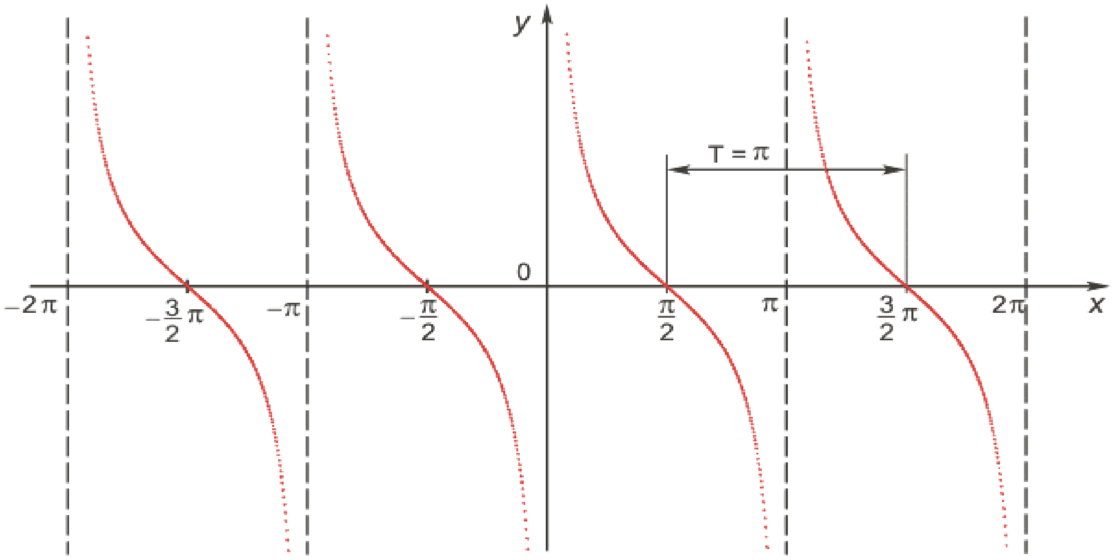
$\mathrm{tg}\, x = 0$ при $x = \pi \cdot k, k \in Z.$

$\mathrm{tg}\, x > 0$ для всех $x \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k, \right), k \in Z.$

$\operatorname{tg} x < 0$ для всех x∈ $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \pi k\right), k \in Z$.

Функция возрастает от -1 до 1 на промежутках:$\left(\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z.$

4) Функция котангенс $\boldsymbol{y = ctgx}$



Область определения функции - множество всех действительных чисел, кроме $x = \pi k, k \in Z.$

Множество значений функции – вся числовая прямая, котангенс функция – неограниченная.

Функция нечетная: $ctg(-x) = -ctgx$ для всех x из области определения.

График функции симметричен относительно оси OY.

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом π:

$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = ctgx, k{\in}Z$ для всех x из области определения.

$\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi{\cdot}k, k{\in}Z.$

$\operatorname{ctg} x > 0$ для всех x∈$\left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k,\right), k \in Z.$

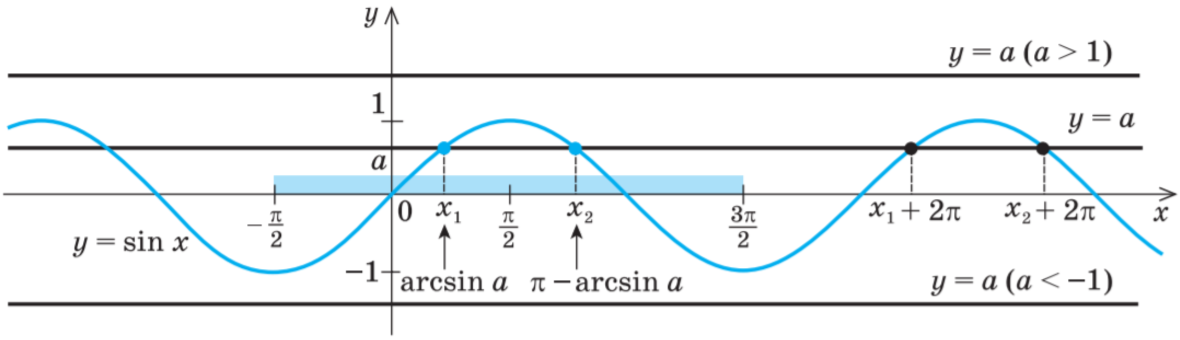
$c\,\mathrm{tg}\,x < 0$ для всех x∈ $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \pi k\right), k \in Z$. Функция убывает от -1 до 1 на промежутках:$(\pi k,\ \pi + \pi k), k \in Z.$

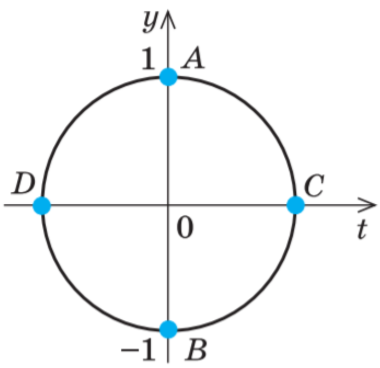
1.5 Виды тригонометрических задач и методы их решения.

Тригонометрические уравнения являются завершающей темой при изучении тригонометрии. Решая уравнения можно проверить практически все необходимые «знания» по теме. Применяя формулы, любое уравнение сводится к простейшему.

Простейшим тригонометрическим уравнением называется уравнение вида $sinx = a$, $cosx = a$, $tgx = b$, $ctgx = b, b\epsilon\ R$. Они имеют смысл при условии $-1 \leq a \leq 1$. Решаются они проще всего с помощью тригонометрического круга. Чтобы рассуждения по нахождению корней этих уравнений были более понятными и наглядными воспользуемся графиками соответствующих функций.

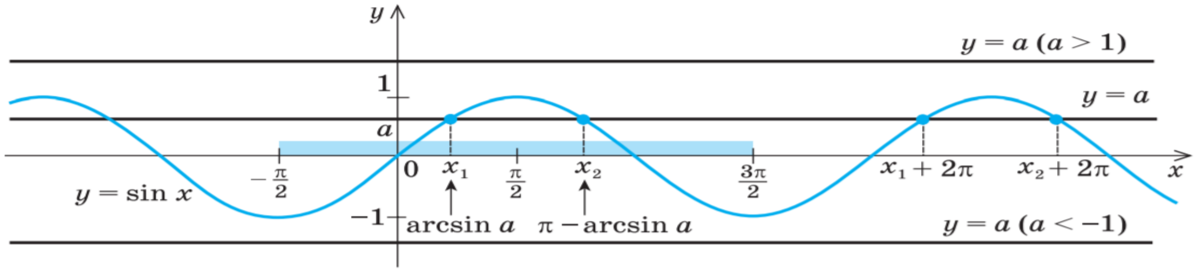
1. Уравнение $sinx = a$

1. Графическая иллюстрация и решение уравнения $\sin x = a$	
Графическая иллюстрация	
	
Решения	Примеры
$\boxed{\sin x = a}$ $\lvert a \rvert > 1$ → **Корней нет** $\lvert a \rvert \leqslant 1$ → $\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z}$	1. ▶ $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z.$ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$ ◁ 2. ▶ $\sin x = \sqrt{3}$. Корней нет, так как $\sqrt{3} > 1$. ◁

2. Частные случаи решения уравнения $\sin x = a$	
	$\sin x = 0 \quad x = \pi k,\ k \in Z$ $\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ $\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

Корни уравнения $sinx = a$

При $|a| > 1$ уравнение не имеет корней, поскольку $|sinx| \leq 1$ x.



(рис1)

Пусть $|a| \leq 1$. Тогда прямая у=а пересекает график функции $y = sinx$ (рис1). На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = sinx$ возрастает от -1 до 1. Но возрастающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения, поэтому уравнение $sinx = a$ имеет на этом промежутке только один корень, который по определению арксинуса равен $x_1 = arcsina.$

На промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = sinx$ убывает от 1 до -1. Но убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения, поэтому уравнение $sinx = a$ имеет на этом промежутке только один корень $x_2 = \pi - arcsina$ (рис.1).

Таким образом, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (длиной 2π) уравнение $sinx = a$ при $|a| \leq 1$ имеет только корни $x_1 = arcsina, x_2 = \pi - arcsina.$

Функция $y = sinx$ периодическая с периодом 2π, поэтому все остальные корни отличаются от найденных 2πk (k∈Z). Получаем следующие формулы корней уравнения $sinx = a$ при $|a| \leq 1$:

$$x = arcsina + 2\pi k, k\epsilon Z \ (1)$$

$$x = \pi - arcsina + 2\pi k, k\epsilon Z \ (2)$$

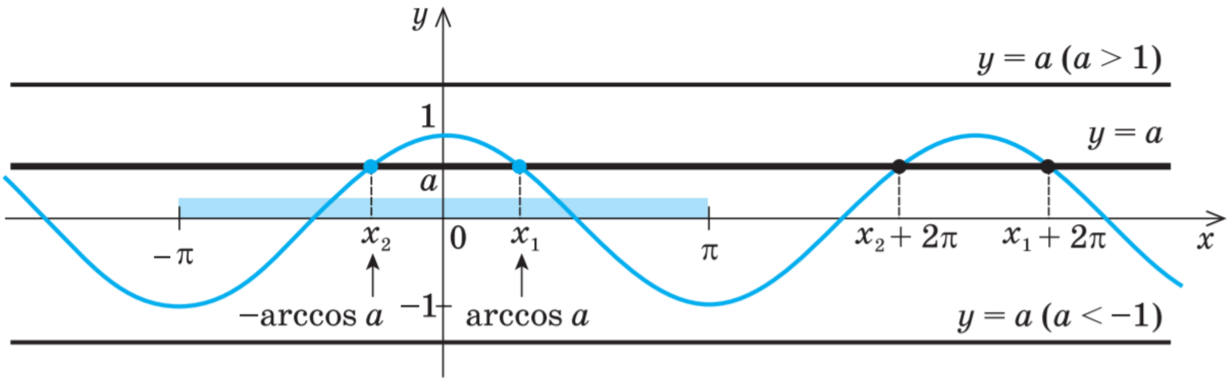
Все значения корней уравнения $sinx = a$ при $|a| \leq 1$, которые дают формулы (1) и (2), можно записать с помощью одной формулы:

$$x = (-1)^n arcsina + 2\pi k, k\epsilon Z$$

2. Уравнение $cos x = a$

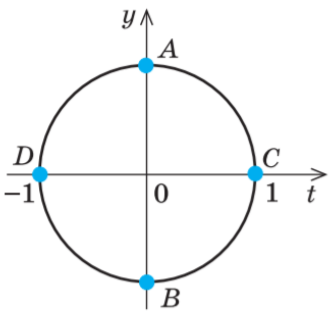
1. Графическая иллюстрация и решение уравнения $\cos x = a$

Графическая иллюстрация



Решения	Примеры
$\cos x = a$ $\lvert a \rvert > 1$: **Корней нет** $\lvert a \rvert \leqslant 1$: $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$	1. ▶ $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. ◁ 2. ▶ $\cos x = \sqrt{3}$. Корней нет, поскольку $\sqrt{3} > 1$. ◁

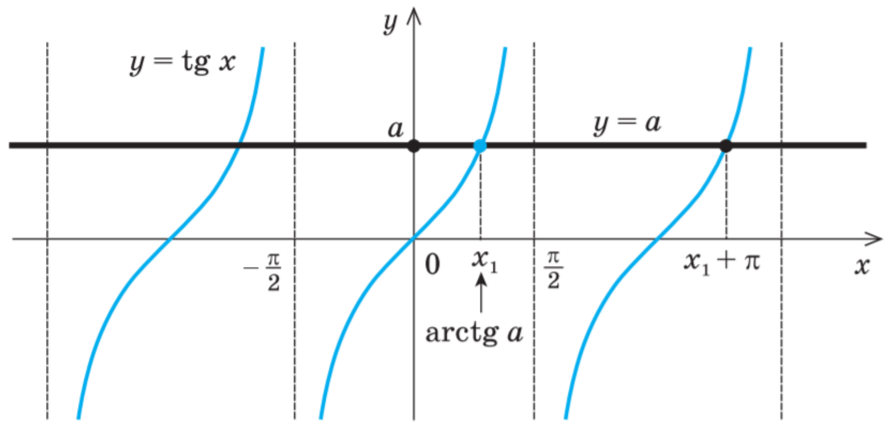
2. Частные случаи решения уравнения $\cos x = a$



$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi k,\ k \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

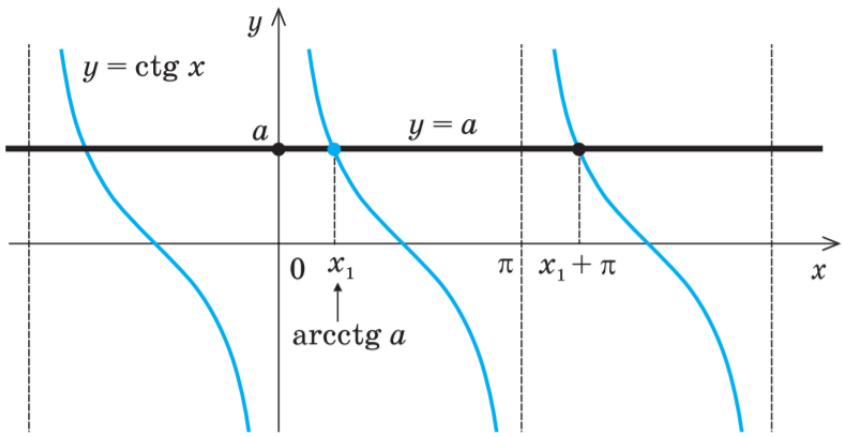
3. Уравнения $tgx = a$ и $ctgx = a$

1. Графическая иллюстрация и решения уравнения $\mathrm{tg}\, x = a$



Формула	Пример
$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} = \mathbf{arctg}\, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\pi n},\ \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}\end{array}}$ Частный случай $\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\pi n},\ \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}\end{array}}$	$\mathrm{tg}\, x = 1$ ▶ $x = \mathrm{arctg}\, 1 + \pi n,\ n \in Z.$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

2. Графическая иллюстрация и решения уравнения $\mathrm{ctg}\, x = a$



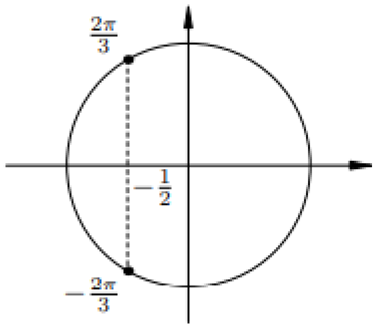
Формула	Пример
$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{ctg}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} = \mathbf{arcctg}\, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\pi n},\ \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}\end{array}}$ Частный случай $\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{ctg}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} = \frac{\pi}{2} + \boldsymbol{\pi n},\ n \in \boldsymbol{Z}\end{array}}$	$\mathrm{ctg}\, x = 7$ ▶ $x = \mathrm{arcctg}\, 7 + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

Некоторые примеры простейших уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $cosx = -\frac{1}{2}$.

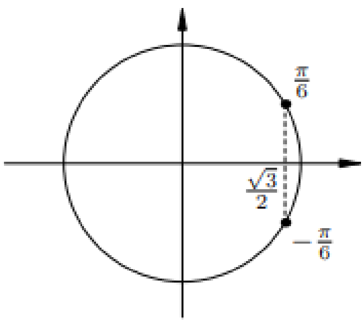
Решение. Поскольку $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ то данное уравнение вида можно найти по формуле $x = \pm arccosa + 2\pi n, n\epsilon\ Z$. $x = \pm arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n\epsilon Z$ Для вычисления $\arccos(-a) = \pi - arccosa$ можно воспользоваться формулой $arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\ x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon\ Z$. Этот же пример можно решить с помощью единичной окружности: $cosx = -\frac{1}{2}$



Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon\ Z$

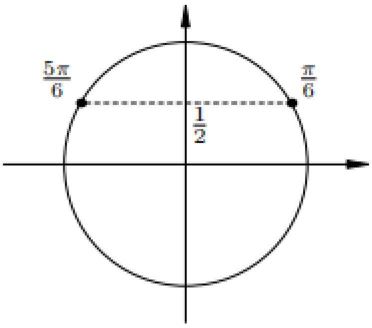
Пример 2. $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z.$

Пример 3. Решите уравнение $sinx = \frac{1}{2}$

Решение: Имеем горизонтальную пару точек с ординатой $\frac{1}{2}$:



Углы, отвечающие правой точке:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$$

Углы, отвечающие левой точке:

$$x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$$

Ответ можно записать в таком виде: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z \end{array}\right.$

Или использовать объединяющую формулу: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi n, n\epsilon Z.$

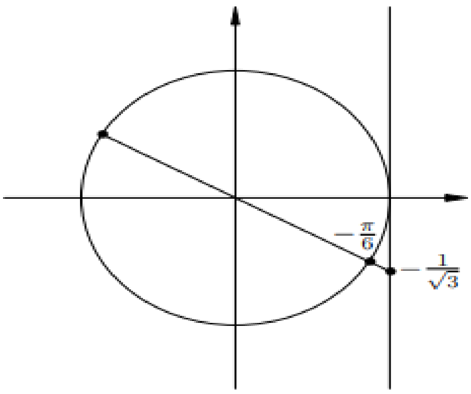
Пример 4. Решите уравнение $ctgx = -\sqrt{3}$

Решение: $x = arcctg(-\sqrt{3}) + \pi n, n\epsilon Z$

$$x = \pi - arcctg(\sqrt{3}) + \pi n, n\epsilon Z$$

Ответ: $x = \pi - \frac{\pi}{6} + \pi n = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n\epsilon Z$

Пример 5: Решите уравнение $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$



Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n\epsilon Z$

В данном разделе рассмотрим способы сведения тригонометрических уравнений к простейшим.

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся виды тригонометрических уравнений и способы их решения:

1. Квадратные тригонометрические уравнения. Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0$$

где $a \neq 0, f(x)$ — одна из функций $sin\ x, cos\ x, tg\ x, ctg\ x$, то такое уравнение с помощью замены $f(x) = t$ сводится к квадратному уравнению.

Часто при решении таких уравнений используются основные тождества:

$$sin^2\alpha\ +\ cos^2\ \alpha\ =\ 1$$

$$tg\ a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$1 + tg^2a = \frac{1}{cos^2a}$$

$$tg\ a * ctg\ a = 1$$

$$ctg\ a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$1 + ctg^2a = \frac{1}{sin^2a}$$

Также используются формулы двойного угла:

$$\sin 2a = 2 * \sin a * \cos a$$

$$\sin a * \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$$

$$\cos 2a = sin^2a - cos^2a$$

$$\cos 2a = 2\,cos^2a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2sin^2a$$

$$tg\ 2a = \frac{2tg\ a}{1 - tg^2a}$$

$$ctg\ 2a = \frac{ctg^2a-1}{2ctg\ a}\mathrm{ctg}$$

Пример 1. Решить уравнение

$$6cos^2x - 13\sin x - 13 = 0$$

С помощью формулы $cos^2a = 1 - sin^2a$ уравнение сводится к виду:

$$6sin^2x + 13\sin x + 7 = 0$$

Сделаем замену $t = sin\,x$, т.к. область значений синуса $sin\,x \in [-1; 1]$, то $t \in [-1; 1]$. Получим уравнение:

$$6t^2 + 13\,\mathrm{t} + 7 = 0$$

Корни данного уравнения $t_1 = -\frac{7}{6}$, $t_2 = -1$.

Таким образом, корень t_1 не подходит. Сделаем обратную замену

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathrm{Z}$$

Пример 2. Решить уравнение $5\sin 2x = \cos 4x - 3$

С помощью формулы двойного угла для косинуса $\cos 2a = 1 - 2sin^2a$ имеем: $\cos 4x = 1 - 2sin^2 2x$

Сделаем эту подстановку и получим:

$$2sin^2 2x + 5\sin 2x + 2 = 0$$

Сделаем замену $t = \sin 2x$, т.к. область значений синуса $sin\,x \in [-1; 1]$, то $t \in [-1; 1]$. Получим уравнение:

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

Корни данного уравнения $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = -2$.

Таким образом, корень t_2 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{12} + \pi n, x_2 = -\frac{5\pi}{12} + \pi n\ n \in \mathrm{Z}$$

2. Кубические тригонометрические уравнения. Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^3(x) + bf^2(x) + cf(x) + d = 0$$

где $a \neq 0, f(x)$ — одна из функций $\sin x, \cos x, tg\,x, ctg\,x$, то такое уравнение с помощью замены $f(x) = t$ сводится к кубическому уравнению.

Часто при решении таких уравнений в дополнение к предыдущим формулам используются формулы тройного угла:

$\sin 3a = 3\sin a - 4sin^3 a$ и $\cos 3a = 4cos^3 a - 3\cos a$

Пример 3. Решить уравнение

$$11\cos 2x - 3 = 3\sin 3x - 11\sin x$$

При помощи формул $\sin 3x = 3\sin x - 4sin^3 x$ и $\cos 2x = 1 - 2sin^2 x$ можно свести уравнение к уравнению только с sin

$$12sin^3 x - 9\sin x + 11\sin x - 3 + 11 - 22sin^2 x = 0$$

Сделаем замену $sin\, x = t$, то $t \in [-1; 1]$:

$$6t^3 - 11t^2 + t + 4 = 0$$

Подбором находим, что один из корней равен $t_1 = 1$. Выполнив деление в столбик многочлена $6t^3 - 11t^2 + t + 4$ на $(t-1)$, получим: $(t-1)(2t+1)(3t-4) = 0$ корнями являются $t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{1}{2},\ t_3 = \frac{4}{3}$.

Таким образом, корень t_3 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x_3 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}$$

3. Однородные тригонометрические уравнения второй степени:

$$a\sin^2 x + bsin\, x\cos x + c\, cos^2\, x = 0, \qquad a \neq 0, c \neq 0$$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x, при которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: а $\sin^2 x = 0$, откуда следует, что и $\sin x = 0$.

Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, т.к. оно говорит о том, что если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.

Аналогично и $\sin x = 0$ не является решением такого уравнения.

Значит, данное уравнение можно делить на $\sin^2$ или на cos^2. Разделим, например, на cos^2:

$$a\frac{\sin^2 x}{cos^2 x}+b\frac{sin\ x\cos}{cos^2 x}+c\ \frac{cos^2 x}{cos^2 x}=0 \Leftrightarrow atg^2x+btg\ x+c=0$$

Таким образом, данное уравнение при помощи деления на cos^2 и замены $tg\ x=t$ сводится к квадратному уравнению: $at^2+bt+c=0$, способ решения которого вам известен.

Уравнения вида $a\sin^2 x+bsin\ x\cos x+c\ cos^2\ x=d,\ a\neq 0, c\neq 0$ с легкостью сводятся к уравнению вида I с помощью использования основного тригонометрического тождества:

$$d=d\cdot 1=d\cdot(sin^2x+cos^2x)$$

Заметим, что благодаря формуле $\sin 2x=2\sin x\cos x$ однородное уравнение можно записать в виде $a\sin^2 x+bsin\ 2x+c\ cos^2=0$

Пример 4. Решить уравнение

$$2\ sin^2x+3\sin x\cos x=3cos^2x+1$$

Подставим вместо $1=sin^2\alpha\ +\ cos^2\ \alpha$ и получим: $sin^2x+3\sin x\cos x-4cos^2x=0$. Разделим данное уравнение на cos^2x:

$$tg^2x+3tgx-4=0$$

и сделаем замену$t=tgx, t\in R$. Уравнение примет вид: $t^2+3t-4=0$

Корнями являются $t_1=-4, t_2=1$. Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} tg\ x=-4 \\ tg\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-arctg\ 4+\pi n\ n\in \mathrm{Z} \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n\ n\in \mathrm{Z} \end{cases}$$

4. Однородные тригонометрические уравнения первой степени:

$$\mathrm{a}\sin x+b\cos x=0, a\neq 0, b\neq 0$$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x, при которых $\cos x=0$ или $\sin x=0$. Действительно, если $\cos x=0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $\mathrm{a}\sin x=0$, откуда следует, что и $\sin x=0$.

Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, т.к. оно говорит о том, что если $\cos x=0$, то $\sin x=\pm 1$.

Аналогично и $\sin x=0$ не является решением такого уравнения.

Значит, данное уравнение можно делить на $\sin x$ или на $\cos x$. Разделим, например, на $\cos x$: а $\frac{\sin x}{\cos x} + b\frac{\cos x}{\cos x} = 0$, откуда имеем $a\,tg\,x + b = 0 \Rightarrow tg\,x = -\frac{b}{a}$

Пример 5. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x = 0$$

Разделим правую и левую части уравнения на $\sin x$:

$$1 + ctg\,x = 0 \Rightarrow ctg\,x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n\; n \in \mathrm{Z}$$

4. Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени:

$$\mathrm{a}\sin x + b\cos x = c, a \neq 0, b \neq 0$$

Существует несколько способов решения подобных уравнений. Рассмотрим те из них, которые можно использовать для любого такого уравнения:

1 способ: при помощи формул двойного угла для синуса и косинуса и основного тригонометрического тождества:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \cos x = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}, c = c * (sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2})$$

данное уравнение сведется к уравнению *l*:

Пример 6. Решить уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = -1$$

Распишем:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \cos 2x = sin^2 x - cos^2 x, -1 = -sin^2 x - cos^2 x$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\left(1 + \sqrt{3}\right)sin^2 x + 2\sin x\cos x + \left(1 - \sqrt{3}\right)cos^2 x = 0$$

Это уравнение с помощью деления на $cos^2 x$ и замены $tgx = t$ сводится к: $\left(1 + \sqrt{3}\right)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$

Корнями этого уравнения являются $t_1 = -1, t_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$. Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} tg\ x = 2-\sqrt{3} \\ tg\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -arctg\ (2-\sqrt{3}) + \pi n, n \in Z \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \end{cases}$$

2 способ: при помощи формул выражения функций через тангенс половинного угла:

$$\sin a = \frac{2tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}} \qquad \cos a = \frac{1-tg^2\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$$

уравнение сведется к квадратному уравнению относительно $tg\frac{x}{2}$.

Пример 7. Решить то же уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = -1$$

Сделаем подстановку $\sin 2x = \frac{2tgx}{1+tg^2x}$ $\cos a = \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$ и замену $tgx = t$:

$$\frac{(\sqrt{3}+1)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3}}{1+t^2} = 0 \Rightarrow (\sqrt{3}+1)t^2 + 2t + 1 - \sqrt{3} = 0$$

(т.к. $1+t^2 \geq 1$ при всех t, то есть всегда $\neq 0$)

Таким образом, мы получили то же уравнение, что и, решая первым способом.

3 способ: при помощи формулы вспомогательного угла.

$$a\sin x + bcos\ x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)\,, cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Для использования данной формулы нам понадобятся формулы сложения углов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Пример 8. Решить то же уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = -1$$

Т.к. мы решаем уравнение, то можно не преобразовывать левую часть, а просто разделить обе части уравнения на

$$\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ получились табличные. Можно, например, взять за $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$. Тогда уравнение примет вид: $\sin 2x \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

Решениями данного уравнения являются:

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \quad n \in \mathrm{Z}$$

Заметим, что при решении уравнения третьим способом мы добились «более красивого» ответа (хотя ответы естественно одинаковы), чем при решении первым или вторым способом (которые, по сути, приводят уравнение к одному и тому же виду).

Таким образом, н е стоит пренебрегать третьим способом решения данного уравнения.

Если тригонометрическое уравнение можно свести к виду $a(\sin x \pm \cos x) + b\sin x \cos x + c = 0,\ \ a \neq 0,\ b \neq 0$, то с помощью формулы $(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2\sin x\cos x\ \ (*)$ данное уравнение можно свести к квадратному.

Для этого необходимо сделать замен у $t = \sin x \pm \cos x$, тогда $\sin x \cos x\ = \pm\frac{t^2-1}{2}$.

Заметим, что формула (*) есть нечто иное, как формула сокращенного умножения $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$при подстановке в нее $A = \sin x,\ B = \cos x$.

Пример 9. Решить уравнение

$$3\sin 2x + 3\cos 2x = 16\sin x\, cos^3 x - 8\sin x\, cos\, x$$

Вынесем общий множитель за скобки в правой части:

$$3\sin 2x + 3\cos 2x = 8\sin x\, cos\, x\,(2\,cos^2 x - 1)$$

По формулам двойного угла имеем:

$$3\,(\sin 2x + \cos 2x) = 4 \sin 2x\, cos\, 2x$$

Заметим, что полученное уравнение как раз записано в необходимом нам виде. Сделаем замену $t = \sin 2x + \cos 2x$, тогда $\sin 2x\, cos\, 2x = \frac{t^2-1}{2}$. Тогда уравнение примет вид:

$$3t = 2t^2 - 2 \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0$$

Корнями данного уравнения являются $t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{2}$.

По формулам вспомогательного аргумента

$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$, следовательно, сделав обратную замену:

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2 \\ \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Первое уравнение корней не имеет, т.к. область значений синуса находится в пределах от -1 до 1. Значит:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{4} = -\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi n \\ 2x + \dfrac{\pi}{4} = \pi + \arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi n \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{\pi}{8} + \pi n \\ x = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \pi n \end{array}\right. \quad n \in \mathrm{Z}$$

5. Формулы сокращенного умножения в тригонометрическом варианте:

1. Квадрат суммы или разности $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$:

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = sin^2x \pm 2\sin x\cos x + cos\,^2x = (sin^2x + cos\,^2x) \pm 2\sin x\cos x = 1 \pm \sin 2x$$

2. Разность квадратов $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$:

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = cos\,^2x - sin^2x = \cos 2x$$

3. Сумма или разность кубов

$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$$

$$sin^3x \pm cos^3x = (\sin x \pm \cos x)(sin^2x \mp \sin x\cos x + cos\,^2x) = (\sin x \pm \cos x)(1 \mp \sin x\cos x) = (\sin x \pm \cos x)(1 \mp \frac{1}{2}\sin 2x)$$

4. Куб суммы или разности

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm B^3 \pm 3AB(A \pm B)$$

$$(\sin x \pm \cos x)^3 = (\sin x \pm \cos x)\,(\sin x \ \pm \cos x)^2 = (\sin x \pm \cos x)\,(1 \pm \sin 2x)$$

Таким образом, основными видами тригонометрических задач являются: квадратные уравнения, кубические уравнения, однородные уравнения первой и второй степени, неоднородные уравнения первой и второй степени, формулы сокращенного умножения в тригонометрическом варианте.

Глава 2. Подготовка школьников к ЕГЭ по разделу «Тригонометрия»

2.1 Изучение методических рекомендаций по решению тригонометрических функций, уравнений и неравенств в курсе математики старшей школы.

В методической литературе существуют различные трактовки понятия «умения». Например, Петровский А.В. под «умениями» понимает способность использовать имеющиеся данные, знания или понятия, оперировать ими для выявления существенных свойств вещей и успешного решения определенных теоретических или практических задач. [22]

По мнению Булыгиной Т.Б. «умения – это способность осознанно выполнять определенное действие». [12]

По мнению Булыгиной Т.Б. «умения – это способность осознанно выполнять определенное действие». [12]

Матюхина М.В. дает следующее определение: «умение – сочетание знаний и навыков, которое обеспечивает успешное выполнение деятельности». Навыки – это автоматизированные способы выполнения действий. Знания – это разновидность субъективных образов в сознании. Понятие – это форма знания, которая отражает единичное и особенное, являющееся одновременно и всеобщим. [6]

Рассмотрим следующее понятие – «формирование умений». Под ним понимается деятельность учителя, связанная с организацией усвоения определенного элемента социального опыта учеником.

Формирование умений – это овладение всей сложной системой операций по выявлению и переработке информации, содержащейся в знаниях и получаемой от предмета, по сопоставлению и соотнесению информации с действиями.

Формирование умений выступает, прежде всего, как продукт все углубляющихся знаний. Умения формируются н а основе освоения понятий о различных сторонах и свойствах изучаемых объектов. Главный путь формирования умений – это приучение учащихся видеть различные стороны в объекте, применять к нему разнообразные понятия, формулировать в понятиях многообразные отношения этого объекта. Учащихся надо научить преобразовывать объект с помощью синтеза через анализ. Применяемые преобразования зависят от того, какие отношения и зависимости требуется установить. Схема таких преобразований и есть план решения задачи.

Научение умениям может осуществляться разными путями. Один из них заключается в том, что учащемуся сообщают необходимые знания, затем перед ним ставят задачи на их применение. И учащийся сам ищет решения, обнаруживая путем проб и ошибок соответствующие ориентиры, способы переработки информации и приемы деятельности. Этот путь называют проблемным обучением. Другой путь заключается в том, что учащихся обучают признакам, по которым можно однозначно распознать тип задач и требуемые для ее решения операции. Этот путь называют алгоритмизированным обучением или обучением на полной ориентировочной основе. Наконец, третий путь заключается в том, что учащегося обучают самой психической деятельности, необходимой для применения знаний. В этом случае педагог не только знакомит учащегося с ориентирами отбора признаков и операций, но и организует деятельность учащегося по переработке и использованию полученной информации для решения поставленных задач. Это достигается систематическим проведением учащегося через все этапы деятельности, требующей ориентировки на признаки, которые закреплены в изучаемом понятии. На первом этапе эти ориентиры (существенные признаки) предмета предъявляются ученику в готовом, материализованном виде, в виде схем, символа, предметов, а операции по выделению ориентиров осуществляются в форме предметных действий. На втором этапе ориентиры и предметные операции заменяются речевыми обозначениями и действиями. На третьем этапе отпадают и словесные действия, их заменяют мыслительные операции, которые протекают по все более свернутой схеме. Эту концепцию называют методикой поэтапного формирования умственных действий. [6]

Фактически эти этапы проходит каждый человек при формировании новых понятий. Однако при обычном обучении эти этапы не организуются сознательно. Поэтому ученик вынужден сам искать и обнаруживать нужные существенные или логические признаки, а главное – сам подбирать для этого действия. Неизбежно возникают ошибки. Понятия формируются не всегда полные и верные. Традиционное обучение, основанное на «самостоятельном» осмысливании и корректировке через результаты, является следствием неполноты ориентировочной деятельности ученика.

Причем, деятельность ученика не должна сводиться к созданию понятий, нахождению их признаков, а к тому, чтобы наполнить сообщаемые понятия значением. То есть усвоить способы их использования, - это деятельность не по самостоятельному отыскиванию существенных признаков вещей, закрепленных в понятиях, а по применению этих признаков. Чтобы понятия формировались полно и безошибочно, соответствующая деятельность ученика должна строиться на полной ориентировочной основе. Иначе говоря, учитель должен давать ученику готовыми все существенные признаки объектов и обучать ребенка тем операциям, каких требует каждый из признаков для его выявления и воспроизведения. [30]

Говор я об умениях решать тригонометрические уравнения и неравенства, нужно иметь в виду, что эти умения образуют целый комплекс, в который среди прочих входят следующие:

- умения отыскать на числовой окружности точки, соответствующие заданным числам, выраженных в долях числа π ($\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$ и т.д.) и не выраженных в долях числа π (M(2), M(-7), M(6) и т.д.);

- умение изображать числа точкой числовой окружности и надписывать точки (имеется в виду определять все числа, которые соответствуют данной точке);

- умение изображать числа на числовой окружности по значению одной из тригонометрических функций;

- составлять двойные неравенства для дуг числовой окружности;

- умение провести анализ предложенного уравнения или неравенства с целью получения оснований для отнесения уравнения к одному из известных видов;

- умение осуществить обоснованный выбор приема решения;

- умение решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства и иллюстрировать решение с помощью графика, тригонометрического круга;

- умение применять свойства тригонометрических функций при решении уравнений и неравенств;

- умение выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений, которое, в свою очередь, предполагает умение применять приемы преобразований алгебраических выражений и соответствующие тригонометрические формулы;

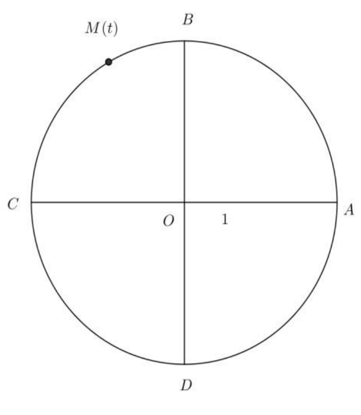
- умение решать алгебраические уравнения определенных видов (линейные, квадратные, дробно-рациональные, однородные, сводящиеся к совокупностям алгебраических уравнений указанных видов) и другие . [28]

Перечисленные умения формируются в течение длительного времени, рядом из них учащиеся должны владеть, приступая к изучению тригонометрических уравнений. Но рассмотрение приемов решения тригонометрических уравнений или неравенств предполагает своего рода перенос этих умений на новое содержание.

Анализ программ по математике для средней школы, учет целей изучения тригонометрических задач, а также обязательных результатов обучения, связанных с рассматриваемой темой, приводит к выводу, что указанные умения должны быть усвоены, по крайней мере, на уровне применения «в ситуации по образцу».

2.2 Типы задач с числовой окружностью.

Пусть дана окружность радиусом 1 и пусть на ней отмечена точка – правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:



(рис.1)

1) Если $t>0$, то, двигаясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь длиной *t*; конец этого пути и будет искомой точкой *M* (рис.1);

2) если $t<0$, то, двигаясь из точки A в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь длиной $|t|$; конец этого пути и будет искомой точкой M;

3) числу $t=0$ поставим в соответствие точку A.

Единичную окружность с установленным соответствием назовем *числовой окружностью*.

Это вторая геометрическая модель для множества действительных чисел. Первую модель - числовую прямую - учащиеся уже знают. Есть аналогия: для числовой прямой правило соответствия (от числа к точке) почти дословно такое же. Но есть и принципиальное отличие – источник основных трудностей в работе с числовой окружностью: на прямой каждая точка соответствует единственному число у, на окружности это не так. Если точка M окружности соответствует числу t, то она соответствует и всем числам вида $t + 2\pi k$, где 2π – длина единичной окружности, а k – целое число, показывающее количество полных обходов окружности в ту или иную сторону.

Этот момент труден для учащихся. Следует предложить им для понимания сути дела реальную задачу:

Беговая дорожка стадиона имеет длин у 400 м, бегун находится в 100 м от места ста та. Какой путь он пробежал? Если он только начал бег, то пробежал 100 м; если успел пробежать один круг, то – (100+400*1)*м=500м, два круга –(100+400*2)м=900 м.; если успел пробежать* k кругов, то путь составит (100+400*k) м. Вот теперь можно сопоставить полученный результат с выражением t+$2\pi k$.

Пример 1. Каким числам соответствует точка B числовой окружности (рис.1)?

Решение. Так как длина всей окружности 2π, то длина четверти АВ равна $\overline{2}$, а потому – всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Аналогично устанавливается, каким числам соответствуют точки C, D, A на рис.2: $C - \pi + 2\pi k$; $D - \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; $A - 2\pi k$;

Дуги AB,BC,CD,DA называют соответственно первой, второй, третьей, четвертой четвертями числовой окружности.

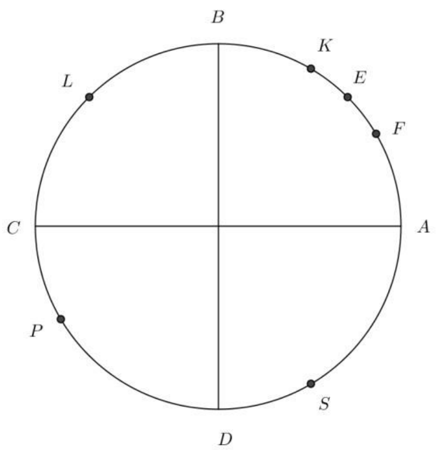
Вся школьная тригонометрия строится на модели числовой окружности. Как говорят многие учителя математики, что недоработки сэтой моделью, слишком поспешное введение тригонометричкеских функций не позволяют создать надежный фундамент для успешного усвоения материала. С ледовательно, не нужно торопиться, а отвести некоторое время на рассмотение следующих пяти различных типов задач с числовой окружностью.

Первый тип задач. Отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, выраженным в долях числа π.

Пример 2. Найти на числовой окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$.

Решение. Разделим дугу *AB* пополам точкой *E* на три равные части – точками *F* и *K*. Тогда $\cup AF = \frac{\pi}{6}; \cup AE = \frac{\pi}{4}; \cup AK = \frac{\pi}{3}$. Значит, числу $\frac{\pi}{6}$ соответствует точка *F*, числу $\frac{\pi}{4}$-точка *E*, числу $\frac{\pi}{3}$ – точка *K*.

Пример 3. Найти на числовой окружности точки, соответствующие числам: а) $-\frac{5\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{6}$; в) $\frac{5\pi}{3}$



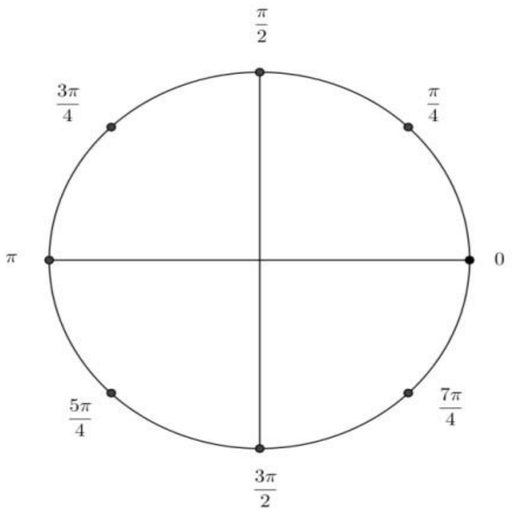
Решение. Построения будем проводить н а рис. 2.

а) Отложив дугу (ее длин а $\frac{\pi}{4}$) пять раз от точки А в отрицательн ом направлении, получим точку L – середину дуги BC. Она и будет соответствовать числу $-\frac{5\pi}{4}$.

б) Отложив дугу AF (ее длин а $\frac{\pi}{6}$) семь раз от точки A в положительном направлении, получим точку P, отделяющую третью часть дуги CD. Она и будет соответствовать числу $\frac{7\pi}{6}$.

в) Отложив дугу AK (ее длина $\frac{\pi}{3}$) пять раз от точки A в положительном направлении, получим точку S, отделяющую третью часть дуги DA. Она и будет соответствовать числу $\frac{5\pi}{3}$ (опыт показывает, что лучше откладывать не пять раз по $\frac{\pi}{3}$, а 10 раз по $\frac{\pi}{6}$).

После этого примера уместно привести два главных макета числовой окружности: на первом из них (рис.3) все четверти разделены пополам, на втором (рис.4) – на три равные части. Эти макеты полезно иметь в кабинете математики.



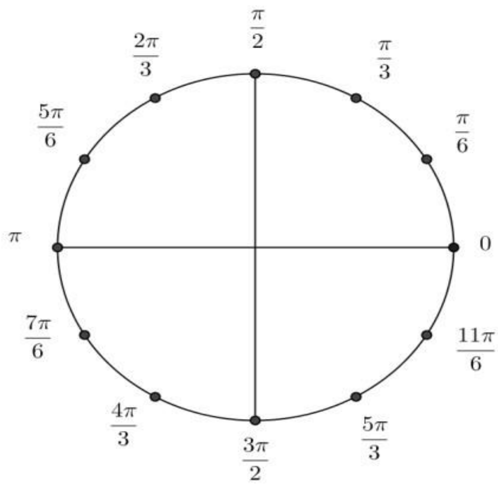
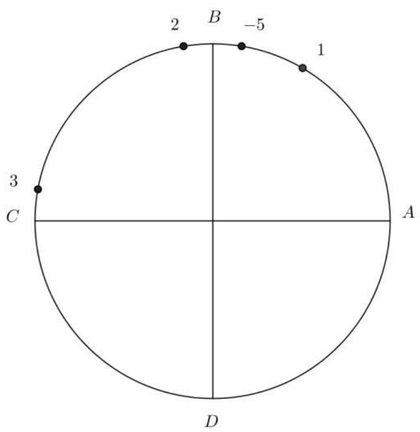


Рис. 3 **Рис. 4**

Обязательно следует обсудить с учащимися вопрос: что будет, если по каждому из макетов двигаться не в положительном, а в отрицательном направлении? На первом макете выделенным точкам придется присвоить другие «имена»: соответственно $-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{4}$ и т. д.; на втором макете: $-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{2\pi}{3}$ и т. д.



Второй тип задач. Отыскание на числовой окружности точек, соответствующих заданным числам, не выраженным в долях числа π. **Пример 4.** Найти на числовой окружности точки, соответствующие числам 1;2; 3; -5.

Решение.

Здесь придется опираться на то, что $\pi \approx 3{,}14$, $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5$. Поэтому точка 1 располагается на дуге АВ ближе к точке В, точки 2 и 3 – на дуге ВС, первая – ближе к В, вторая – ближе к С (рис.5). Несколько подробнее остановимся на отыскании точки, соответствующей числу – 5. Двигаться надо из точки А в отрицательном направлении, т.е. по часовой стрелке. Если пройти в этом направлении до точки В, получим$-\frac{3\pi}{2}$ т.е. -3*1, 57≈-4,7. Значит, точка, соответствующая числу – 5, расположена чуть правее точки В (см. рис.5).

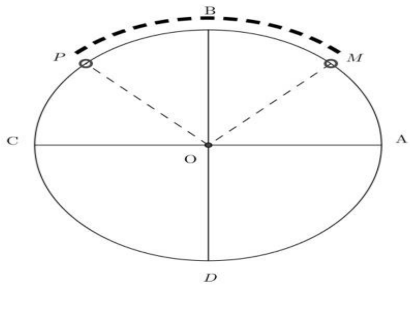
Третий тип задач. Составление аналитических записей (двойных неравенств) для дуг числовой окружности.

Фактически мы действуем по тому же плану, который использовался в 5-8 классах для изучения числовой прямой: сначала по числу находят точку, затем по точке – число, потом используют двойные неравенства для записи промежутков на числовой прямой.

Рассмотрим для примера открытую дугу МР, где М – середина первой

четверти числовой окружности, а Р – середина ее второй четверти (рис.6).

(рис.5)



Неравенства, характеризующие дугу, т.е. представляющие собой аналитическую модель дуги, предлагается составлять в два этапа. На первом этапе составляют ядро *аналитической записи* (это главное, чему следует научить школьников); для заданной дуги MP получим $\frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$. На втором этапе составляют общую запись: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$

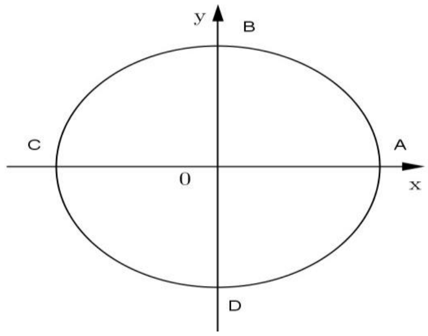
Если же речь идет о дуге PM, то при записи ядра нужно учесть, что точка $A(0)$ лежит внутри дуги, а потому к началу дуги приходится двигаться в отрицательном направлении. Значит, ядро аналитической записи дуги PM имеет вид $-\frac{5\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$, а общая запись имеет вид $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$

Термины «ядро аналитической записи дуги», «аналитическая запись дуги» не являются общепринятыми, они введены из чисто методических соображений.

Четвертый тип задач.

Отыскание декартовых координат точек числовой окружности, центр которой совмещен с началом системы координат.

Рис. 7



Сначала рассмотрим один достаточно тонкий момент, до сих пор практически не упоминавшийся в действующих школьных учебниках.

Приступая к изучению модели «числовая окружность на координатной плоскости», учителя должны отчетливо осознавать, какие трудности ждут здесь учащихся. Эти трудности связаны с тем, что при изучении указанной модели от школьников требуется достаточно высокий уровень математической культуры. Ученикам приходится работать одновременно в двух системах координат – в «криволинейной», когда ин формация о положении точки снимается по окружности (числу t соответствует н а окружности точка $M(t)$; t – «криволинейная координата» точки M). И в декартовой прямоугольной системе координат (у точки M, как у всякой точки координатной плоскости, есть абсцисса и ордината). Задача учителя – помочь школьникам в преодолении этих естественных трудностей. К сожалению, обычно в школьных учебниках на это не обращают внимания и с самых первых уроков используют записи *sin x*, *cosx* не учитывая, что буква x в сознании школьника четко ассоциируется с абсциссой в декартовой прямоугольной системе координат, а не с длиной пройденного по числовой окружности пути. Поэтому при работе с числовой окружностью не следует использовать символы $sinx,\ cosx,\ tgx,\ ctgx,$ лучше $sint,\ cost,\ tgt,\ ctgt.$

Верн емся к четвертому типу задач. Речь идет о переходе от записи *M(t)* к записи *M(x;y)*, т.е. от криволинейных координат к декартовым координатам.

Совместим числовую окружность с декартовой прямоугольной системой координат так, как показано на рис. 7. Тогда точки *A,B.C,D* будут иметь

следующие координаты: *A(1;0), B(0;1), C(-1;0), D(0;-1)*. Очень важно научить школьников определять координаты всех тех точек, которые отмечены на двух основных макетах (см. рис.3,4). Для точки $\frac{\pi}{4}$ все сводится к рассмотрению равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 1. Его катеты равны $\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}$, значит, координаты точки $\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Аналогично обстоит дело с точками $\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}$, но разница лишь в том, что надо учитывать знаки абсциссы и ординаты.
Конкретно: $\frac{3\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\frac{5\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\frac{7\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Что следует запомнить учащимся? Только то, что модули абсциссы и ординаты у середин всех четвертей равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а знаки они должны уметь определять для каждой точки непосредственно по чертежу.

Для точки $\frac{\pi}{6}$ все сводится к рассмотрению прямоугольного треугольника с гипотенузой 1 и углом 30° (рис.8). Тогда катет, противолежащий углу 30°, будет равен $\frac{1}{2}$, а прилежащий катет равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, координаты таковы:$\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$. Аналогично обстоит дело с точкой $\frac{\pi}{3}$, только катеты «меняются местами», а потому получаем $\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$. Именно значения $\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}$ (с точностью до знаков) и будут «обслуживать» все точки второго макета (см. рис.4), кроме точек $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$, в качестве абсцисс и ординат.

Предлагаемый способ запоминания: «где короче $\frac{1}{2}$, там; где длиннее, там $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ».

Пример 5. Найти координаты точки $\frac{4\pi}{3}$ (см. рис.4).

Решение. Точка $\frac{4\pi}{3}$ расположена ближе к вертикальной оси, чем к горизонтальной, т.е. модуль ее абсциссы меньше, чем модуль ее ординаты. Значит, модуль абсциссы равен $\frac{1}{2}$, модуль ординаты равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знаки в обоих случаях отрицательны (третья четверть). Вывод: точка $\frac{4\pi}{3}$ имеет координаты

$\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

В четвертом типе задач отыскиваются декартовы координаты всех точек, представленных на первом и втором макетах, о которых упоминалось выше.

Фактически в курсе данного типа задач мы готовим учащихся к вычислению значений тригонометрических функций. Если все здесь будет отработано достаточно надежно, то переход на новую ступень абстракции (ордината – синус, абсцисса – косинус) окажется менее болезненным, чем обычно.

Четвертый тип включает в себя задания такого типа: для точки *M(5)* найти знаки декартовых координат *M(x;y)*.

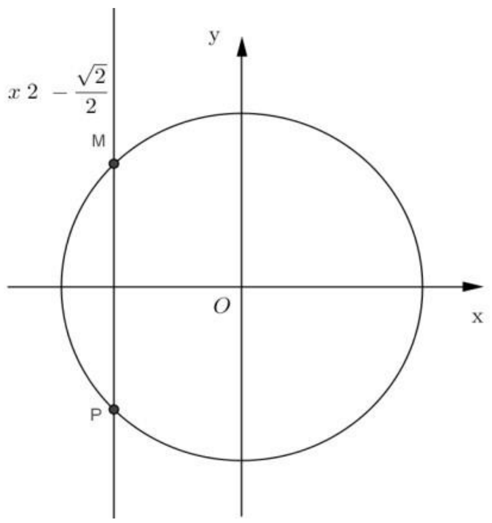
Решение не должно вызывать трудности у учащихся: числу $t=5$ соответствует точка M четвертой четверти, значит, $x>0$, $y<0$.

Пятый тип задач. Отыскание на числовой окружности точек по заданным координатам.

Пример 6. Найти на числовой окружности точки с ординатой $\frac{1}{2}$ и записать, каким числам они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и

N (рис.11). С помощью второго макета (см. рис.4) устанавливаем, что точка



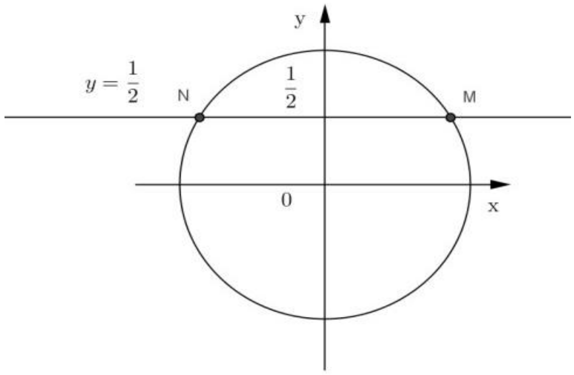
M соответствует числу $\frac{\pi}{6}$, значит, она соответствует всем числам вида $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$;

точка N соответствует $\frac{5\pi}{6}$, а значит, и всем числам вида $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Рис.10

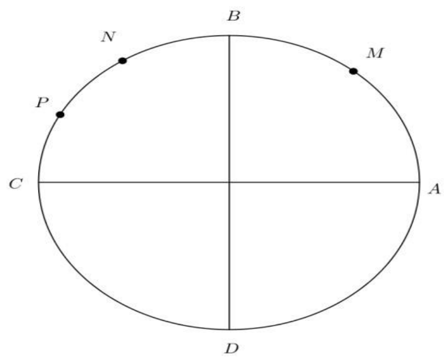
Пример 7. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам они соответствуют.



Решение. Прямая $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M *и* P – серединах второй и третьей четвертей (рис.10). С помощью первого макета устанавливаем, что точка соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$, а значит, всем числам вида $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,$ точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{4}$, а значит, всем числам вида $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k.$

Надо обязательно показать второй вариант записи *ответа,* к *примеру* 7. Ведь *точка P соответствует и числу*$-\frac{3\pi}{4}$, *т.е. всем числам вида* $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$. Тогда *получаем:* $t=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k.$



Подчеркнем неоспоримую важность пятого типа задач. Фактически мы приучаем школьников к решению простейших тригонометрических уравнений: в примере 6 речь идет об уравнении $sint=\frac{1}{2}$, а в примере 7 – об уравнении $cost=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Для понимания сути дела важно научить школьников решать уравнения видов $sint=a, cost=a$ по числовой окружности. Не торопясь переходить к формулам $t=(-1)^n arcsina+\pi n$ или $t=\pm arccosa+2\pi n$. Опыт показывает, что если первая стадия (работа на числовой окружности) не отработана достаточно надежно, то вторая стадия (работа по формулам) воспринимается школьниками формально, что, естественно, надо преодолевать.

Аналогично примерам 6 и 7 следует найти на числовой окружности точки со всеми «главными» ординатами и абсциссами$\left(\pm\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. В качестве особых сюжетов уместно выделить следующие: $y = 0(t = \pi k)$; $y = 1\left(t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ $y = -1\left(t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$; $x = 0\left(t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$; $x = 1(t = 2\pi k); x = -1(t = \pi + 2\pi k)$.

Замечание 1. В пропедевтическом плане полезна подготовительная работа к теме «Длина окружности» в курсе геометрии 9-го класса. Важный совет: в систему упражнений следует включить задания типа предложенного ниже. Единичная окружность разделена на четыре равные части точками A, B,C,D дуга AB разделена точкой M пополам, а дуга BC разделена точками P, N на три равные части (рис.12). Чему равны длины дуг MP,PD,NM,PB (считается, что обход окружности осуществляется в положительном направлении)? [17]

Пятый тип задач включает в себя и работу с условиями типа $x > \frac{1}{2}, y < -\frac{1}{2}$. Это означает, что к решению простейших тригонометрических неравенств мы также «подбираемся» постепенно.

Весь изложенный выше материал рекомендуется изучать в течение пяти уроков и лишь на шестом уроке следует ввести определения синуса и косинуса как координат точки числовой окружности. При этом целесообразно снова порешать все типы задач со школьниками, но уже с использованием введенных обозначений. Предлагать выполнить такие, например, задания: вычислить $sin\frac{\pi}{4}$, решить уравнение$cost = -\frac{1}{2}$, решить неравенство $sint < 0{,}5$ и т.д. Подчеркнем, что на первых уроках тригонометрии простейшие тригонометрические уравнения и неравенства являются не *целью* обучения, а используются в качестве *средства* для усвоения главного – определений синуса и косинуса как координат точек числовой окружности.

2.3 Содержание и анализ материала по тригонометрии в различных школьных учебниках.

Сегодня, когда стали понимать, что основная задача учителя математики – развитие умственных способностей ребенка, а не заполнение ячеек его памяти формулами (в реальной жизни подавляющее большинство школьных формул людям не нужно), настало время пересмотреть тригонометрические методические традиции. В связи с этим А.Г. Мордкович в своей статье “Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе” выделяет три основных тезиса, которыми следует руководствоваться при изучении тригонометрии.

1. Основное внимание в начале изучения раздела надо уделить модели “числовая окружность на координатной плоскости”.
2. Собственно тригонометрические уравнения в школе практически не изучаются – вместо них идет постоянная возня с тригонометрическими преобразованиями.
3. Тригонометрическими формулами следует заняться после того, как учащийся овладеет двумя “китами”, на которых базируется курс тригонометрии: числовой окружностью и простейшими уравнениями.

Если посмотреть на эти три тезиса, то возникает вопрос: как же можно изучать тригонометрические уравнения, не зная тригонометрических формул? Собственно именно такой вопрос и задают учителя, когда слышат о том, что тригонометрическими формулами следует заняться после того, как учащийся узнает, что такое числовая окружность и простейшие тригонометрические уравнения.

Предположим, что на этот вопрос мы ответили и учителя согласились с такой структурой изложения материала, тогда перед нами встает другой вопрос: каким образом осуществить знакомство учащихся с простейшими тригонометрическими уравнениями и как вывести формулы для решения таких уравнений. При выводе формул для решения простейших тригонометрических уравнений мы сталкиваемся с рядом трудностей (рассмотрим данные трудности на примере уравнения $\sin x = a$):

1. неизвестно откуда взялся $\arcsin a$;
2. в формуле для решения тригонометрического уравнения $\sin x = a$ появляется множитель вида $(-1)^n$;
3. тригонометрические уравнения имеют не конечное число корней, как привыкли учащиеся, а бесконечное число корней.

Таким образом, при изложении темы “Решение тригонометрических уравнений” мы должны учитывать все вышеизложенные трудности.

В данном разделе мы остановимся подробно лишь на анализе школьных учебников, которые используются учителями при изложении темы “Решение тригонометрических уравнений и неравенств”.

Мы будем использовать материал следующих учебников по алгебре и началам анализа (имеется в виду базовый уровень изложения учебного материала): *А.Г. Мордкович* "Алгебра и начала анализа 10–11”, *Ю.М. Колягин* и др. “Алгебра и начала анализа 10 кл.”, *А.Н. Колмогоров* и др. “Алгебра и начала анализа 10–11 кл.”, *М.И. Башмаков* “Алгебра и начала анализа 10–11 кл.”, *Ш.А. Алимов* “Алгебра и начала анализа 10–11 кл”. Анализ учебников будет осуществляться по следующим параметрам:

1. Количество часов, отводимых на изложение темы.
2. Содержание материала.
3. Соответствие обязательному минимуму обучения, зафиксированному в программе по математике.
4. Соответствие материала возрасту учащихся (доступность материала).
5. Понятность излагаемого материла.

1. А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд “Алгебра и начала анализа 10–11 класс”.

На изложение темы “Тригонометрические уравнения” здесь отводится 14 часов. Рассмотрим содержание материала.

Арксинус, арккосинус и арктангенс числа. Простейшие тригонометрические уравнения. Решение тригонометрических уравнений, систем уравнений.

Основная цель – сформировать у учащихся умение решать простейшие тригонометрические уравнения и ознакомить с основными приемами решения тригонометрических уравнений.

Введению понятий арксинуса, арккосинуса и арктангенса предшествует рассмотрение теоремы о корне. Основное внимание здесь нужно уделить разъяснению смысла указанных выше понятий, а также формированию умения находить табличные значения, что необходимо для безошибочного решения тригонометрических уравнений.

Вывод формул корней простейших тригонометрических уравнений основывается на изученных свойствах соответствующих функций.

Материал, представленный в учебнике, соответствует обязательному минимуму обучения, однако для учащихся 10 класса материал, представленный в учебнике, является достаточно трудным для понимания, т.к. здесь мы имеем чересчур сжатое изложение.

Более того, в данном учебнике мы сталкиваемся с достаточно известной схемой изложения материала по тригонометрии – сначала в головы учеников пытаются “вбить” все известные формулы курса тригонометрии, а потом научить решать тригонометрические уравнения. В результате мы получаем достаточно банальную ситуацию: тригонометрические уравнения и преобразования тригонометрических выражений так и остаются в голове учащихся на разных берегах реки. Получается, что, пользуясь схемой изложения материала, предложенной в данном учебнике, мы изучаем с учащимися формулы ради формул. Мы получаем обучение без развития. Для ученика 10 класса так и остаются невыясненными (после изучения материала по данному учебнику) следующие факты:

1. Что же все-таки это такое – арксинус, арккосинус и арктангенс числа?
2. Почему раньше при решении уравнения мы получали конечное число корней, а теперь – бесконечное?
3. Откуда в записи корней тригонометрического уравнения появился "хвост" πn или 2πn. Распространенная ошибка учащихся при записи корней уравнения $sin\, x = a$ – ошибка следующего вида: $x = (-1)^n arcsina + 2\pi n, n \in Z$, что вполне очевидно, ведь $y = sin\, x$ – функция периодическая и период этой функции равен $2\pi n$.
4. Что такое (-1)^n в записи корней уравнения $sin\, x = a$ и почему его нет при записи корней уравнения $cos\, x = a$, а вместо этой "страшной" конструкции при решении уравнения $cos\, x = a$ получаем $x = \pm arccosa + 2\pi n, n \in Z$.
5. Наконец, возникают ситуации, когда при решении тригонометрического уравнения нам необходимо осуществить отбор корней, а вот эти ситуации не рассматриваются в предложенном учебнике.

Стоит отметить, что учебник содержит достаточно много дидактических материалов, как простых, так и более сложных. Это естественно обеспечивает учителю возможность варьировать задания для учащихся.

С точки зрения изложения теоретического материала нельзя сказать, что учебник идеально подходит для самостоятельного изучения.

2. С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин "Алгебра и начала анализа 10 класс"

На изучение темы "Тригонометрические уравнения" отводится 7 часов.

Простейшие тригонометрические уравнения (2 часа). Уравнения, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного (2 часа), Применение основных тригонометрических формул для решения уравнений (1час), Однородные уравнения (1 час).

Невооруженным глазом можно видеть, что на изучение тригонометрических уравнений отводится недостаточное количество времени, более того, простейшим тригонометрическим уравнениям не уделяется должного внимания, хотя основой для решения любого тригонометрического уравнения служит умение решать именно простейшие тригонометрические уравнения.

Отметим также, что в данном учебнике совсем не рассматриваются задачи, в которых требуется осуществить отбор корней.

Большое внимание уделяется понятиям арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс, но, к сожалению, авторы не поясняют учащимся, с какой целью они вводят данные понятия.

3. Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин “Алгебра и начала анализа 10–11 класс”.

На изучение темы отводится 18 часов.

Уравнение $cos\,x = a, sin\,x = a$. Уравнение $tgx = a$. Решение тригонометрических уравнений. Примеры решения простейших тригонометрических неравенств.

Основная цель – сформировать умение решать простейшие тригонометрические уравнения, познакомить учащихся с некоторыми приемами решения тригонометрических уравнений.

Изучение темы начинается с рассмотрения конкретных простейших уравнений, решение которых иллюстрируется на единичной окружности, что хорошо подготовлено материалом главы “Тригонометрические формулы”.

Понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса вводятся до знакомства с обратными тригонометрическими функциями (тригонометрические функции изучаются в 11 классе) и иллюстрируются также на единичной окружности. В дальнейшем не следует уделять много внимания упражнениям на нахождение значений и использование свойств арксинуса, арккосинуса, арктангенса: все это будет закрепляться в ходе решения уравнений. При решении уравнений полезно иллюстрировать нахождение корней на единичной окружности: это позволит осознанно применять формулы корней.

Решение более сложных тригонометрических уравнений рассматривается на примерах уравнений, сводящихся к квадратным, уравнений вида $a sin x + b cos x = c$, уравнений, решаемых разложением левой части на множители.

Материал в учебнике соответствует обязательному минимуму обучения, весьма доступен для учащихся 10 класса. Можно даже заметить, что авторы при решении уравнений предлагают иллюстрировать нахождение корней на единичной окружности, в дальнейшем это позволит избежать вопросов о количестве корней тригонометрического уравнения и частично ликвидирует трудность в восприятии учащимися таких элементов, как

$(-1)^n \arcsin a + \ldots$ и $\pm \arccos a + \ldots$. Однако у ученика 10 класса так и остаются невыясненными вопросы, связанные с понятием арксинуса, арккосинуса и арктангенса, с появлением периода в записи ответа к тригонометрическому уравнению, с появлением множителя $(-1)^n$ и, наконец, проблема отбора корней так и остается открытой.

Т.е. мы видим, что в учебнике Ш.А. Алимова и др. решенным является вопрос учеников о количестве корней тригонометрического уравнения, но при изложении материала по тригонометрии мы снова сталкиваемся с известной схемой изложения материала “функция – преобразования – уравнения”. Т.е. снова формулы выведены на первое место, а простейшим уравнениям внимания уделено недостаточно.

4. Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.Ю. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин “Алгебра и начала анализа 10 класс”.

Количество часов, отведенных на тему “Тригонометрические уравнения”, совпадает с количеством часов, отведенных на данную тему в учебнике Ш.А. Алимова и др. Рассмотрим содержание учебного материала.

Уравнения $cos\ x\ =\ a, sin\ x\ =\ a$. Уравнения $tgx\ =\ a, ctgx\ =\ a$. Решение тригонометрических уравнений. Различные приемы решения тригонометрических уравнений. Уравнения, содержащие корни и модули. Системы тригонометрических уравнений. Появление посторонних корней и потеря корней тригонометрических уравнений.

Структура изложения материала по теме “Тригонометрические уравнения” в данном учебнике во многом совпадает с учебником Ш.А. Алимова, поэтому подробно останавливаться на анализе этого учебника мы не будем. Отметим только то, что в данном учебнике частично есть ответ на вопрос учащихся об отборе корней. Также здесь до понимания учащихся доведен тот момент, что корни уравнения $cos\ x\ =\ a$ находятся по формуле $x = \pm arccosa + 2\pi n, n \in Z$. Значит, у нас остаются невыясненными только те моменты, которые связаны с множителем $(-1)^n$ и с добавлением периода при записи корней тригонометрического уравнения.

5. М.И. Башмаков “Алгебра и начала анализа 10–11 класс”.

Отметим, что в этом учебнике тема “Тригонометрические уравнения” отдельно не выделена и тригонометрические уравнения изучаются в контексте темы “Тригонометрические функции и тригонометрические уравнения”. Поэтому здесь мы будем рассматривать содержание учебного материала по теме “Тригонометрические функции и тригонометрические уравнения”.

На изучение всей темы здесь отводится 40 часов.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс; их свойства и графики. Периодичность функций. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Простейшие тригонометрические уравнения. Решение тригонометрических уравнений.

Основная цель: – изучить свойства и графики тригонометрических функций, научиться решать простейшие тригонометрические уравнения и познакомить учащихся с некоторыми приемами решения тригонометрических уравнений.

Таким образом, мы снова видим схему “функция – преобразования – уравнения”. Более того, в этом учебнике не решается проблема осуществления отбора корней уравнения, но зато до понимания учащихся доводится смысл записи $(-1)^n$.

Кроме всего прочего, в данном учебнике представлен незначительный объем задач по теме “Тригонометрические уравнения” и нет возможности осуществления дифференцированного подхода к учащимся.

Таким образом, мы видим, что ни один из представленных учебников в полной мере не решает основных трудностей, возникающих при изучении темы “Тригонометрические уравнения”. Почему? Может быть потому, что при изложении материала в этих учебниках не реализован один из основных дидактических принципов – “от простого к сложному”.

Для учебника, который будет представлен, характерна следующая схема построения материала – “функция – уравнения – преобразования”. При изучении тригонометрии эта схема вызывает у учителей множество возражений, одно из которых заключается в том, что изучать тригонометрические уравнения, если учащиеся не знают формул тригонометрии, невозможно. А.Г. Мордкович отвечая на это возражение, говорит, что целесообразнее сначала изучить “простые модели” (таковыми в математике являются основные элементарные функции), а уж потом переходить к изучению “сложных моделей” (таковыми в математике являются сложные выражения, которые надо упрощать, используя формульный аппарат). А как обстоит дело в тригонометрических уравнениях? Примерно так же: сначала надо разобраться с “элементарными моделями”, т.е. с простейшими тригонометрическими уравнениями и уравнениями, которые сводятся к простейшим с помощью алгебраических приемов, и только потом переходить к “сложным моделям”, т.е. уравнениям, которые надо сначала долго и упорно “раскручивать”, используя рутинный аппарат формул. Обычная методическая ошибка в изучении тригонометрии в школе в последние годы заключается в следующем: школьникам не дают возможности разобраться со спецификой собственно тригонометрических уравнений – простейших уравнений типа $sinx = \frac{1}{2}, cosx = -\frac{1}{2}, tg\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

А ведь в этих уравнениях заложено много новых дидактических компонентов, каждый из которых требует внимания, уважения, а значит, и времени. Перечислим эти компоненты.

1. До сих пор при решении уравнений школьникам встречался лишь случай конечного множества корней. Теперь же уравнение имеет бесконечно много корней. Надо это пережить, прочувствовать? Безусловно.
2. Странный (для школьников) “хвост” в записи корней: то πn , то $2\pi n$; более того, само наличие параметра n уже должно насторожить и учителя, и ученика.
3. Требуют специального внимания входящие в состав формул корней обратные тригонометрические функции. Это тоже отдельный дидактический компонент.
4. Привыкнуть надо и к записи $(-1)^n$ – это для учащихся далеко не просто.
5. Научив школьников решать уравнения вида $sin\ t = a, cos\ t = a,$ надо учесть, как тяжело даются им уравнения типа $sin^2 t = a, cos =$

$\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = a$. Этим тоже надо специально заниматься и формулы тригонометрии тут ни причем.

6. Весьма трудным в методическом плане является вопрос об отборе корней тригонометрических уравнений. Самый простой выход из положения – не предлагать учащимся подобные примеры. Но это ослабит развивающую линию курса, заложенную в специфике тригонометрических уравнений. Иногда учителя говорят: мы учим отбору корней, но только в конце изучения раздела, посвященного тригонометрическим уравнениям. Это, на наш взгляд, методическая ошибка. Учить отбору корней надо именно на простейших уравнениях, заложив соответствующие сюжеты в систему упражнений. Ведь необходимо осознать структуру формулы корней, понять роль параметра в формуле корней. При этом полезно показать школьникам оба известных приема: перебор по параметру и решение двойного неравенства.

Учебник А.Г. Мордковича предлагает нам иную схему построения материала. Попробуем проанализировать и этот учебник.

6. А.Г. Мордкович Алгебра и начала анализа ч.1 учебник, А.Г. Мордкович и др. Алгебра и начала анализа, ч.2. Задачник.

Отдельно изучается тема “Тригонометрические функции” – 23 часа. На изучение темы “Тригонометрические уравнения” отводится 10 часов и 16 часов – на тему “Преобразование тригонометрических выражений”. Будем рассматривать методические особенности учебника в контексте этих двух последних тем, т.к. обучение решению тригонометрических уравнений имеет место и в теме “преобразования тригонометрических выражений”.

Тема “Тригонометрические уравнения”. Первые представления о решении простейших тригонометрических уравнений. Арккосинус и решение уравнения $cos\ x = a$. Арксинус и решение уравнения $sin\ x = a$.

Арктангенс и решение уравнения $tgx = a$, арккотангенс и решение уравнения $ctgx = a$. Тригонометрические уравнения (два основных метода решения тригонометрических уравнений: разложение на множители и введение новой переменной, решение однородных уравнений).

Тема “Преобразование тригонометрических выражений”. Синус и косинус суммы аргументов. Синус и косинус разности аргументов. Тангенс суммы и разности аргументов. Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение. Преобразование произведений тригонометрических функций в сумму. Преобразование выражения вида $A \sin x + B \cos x$ к виду $C \cdot \sin(x + t)$.

При изучении темы “Тригонометрические уравнения” автор учебника дает возможность школьнику прочувствовать специфику тригонометрических уравнений. Перечень основных уравнений здесь составляют уравнения простейшие уравнения, при решении которых применяется метод введения новой переменной: однородные уравнения и уравнения, сводящиеся к квадратным с помощью основного тригонометрического тождества. Также перед тем, как выводить формулы для решения простейших тригонометрических уравнений, автор напоминает учащимся, что они уже знают, как решать уравнения с помощью числовой окружности, и только после этого вводит их в проблемную ситуацию, связанную с решением уравнений типа $cost = \frac{2}{5}, sint = -0{,}3$.

Только после того, как ввел учащихся в проблемную ситуацию, он вводит новые для них понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Тем самым, при такой схеме изложения выделяются два обстоятельства.

1. При такой схеме изложения реализуется метод проблемного изложения материала. Учащийся попадает в нештатную ситуацию, для описания которой недостаточно тех средств, которые имеются в его математическом языке. Становится очевидна необходимость введения

нового термина, нового понятия, новой математической модели и нового обозначения.

2. При изложении материала не употребляется термин “обратные тригонометрические функции”. Тем самым реализуется принцип доступности изложения учебного материала.

Кроме того, отличительной особенностью именно этого учебника является то, что для решения простейших тригонометрических уравнений (как и для решения однородных уравнений) в учебнике фактически используется алгоритм:

1. составить общую формулу;
2. вычислить значение арксинуса (арккосинуса и т.д.);
3. подставить найденное значение в общую формулу.

При изучении темы “тригонометрические уравнения” рассматриваются также примеры на отбор корней в тригонометрических уравнениях, причем, весь этот материал изучается до введения преобразований тригонометрических выражений.

После темы “Тригонометрические уравнения” изучается тема “Преобразования тригонометрических выражений”, где приводятся уже специальные методы решения тригонометрических уравнений.

Можно отметить также, что в задачнике представлен широкий набор задач разного уровня сложности по теме “Тригонометрические уравнения”, что позволяет проводить дифференцированную работу с учащимися на уроке.

Главное отличие учебника А.Г. Мордковича от остальных рассмотренных здесь учебников, как было уже сказано выше, состоит в новой схеме изложения материала: “функция – уравнения – преобразования”. Данная схема построения материала позволяет в соответствии с уровнем развития учащихся, не перегружая его память большим количеством формул, научить ученика решать тригонометрические уравнения, причем, делать это вполне осознанно, т.е. с пониманием всей сути того, что он делает.

С точки зрения применения учебник Мордковича удобен для самостоятельного изучения учащимися, так как он содержит сильную теоретическую базу. Изложение теоретического материала ведётся очень подробно. В условиях острой нехватки часов для проведения занятий в классе возрастает значение самостоятельной работы учеников с книгой. Опираясь на учебник, учитель прекрасно разберётся в том, что надо рассказать учащимся на уроке, что заставить их запомнить, а что предложить им просто прочесть дома.

К недостаткам можно отнести не очень большое количество упражнений по этой теме в самом учебнике.

Анализ содержания набора задач в теме «Тригонометрические уравнения» приводит к следующим выводам:

1) преобладающими являются простейшие тригонометрические уравнения, решение которых основано на определениях соответствующих функций в понятиях арксинуса, арккосинуса, арктангенса числа;

2) фактически отсутствуют тригонометрические уравнения, способ решения которых основан на свойстве ограниченности синуса и косинуса;

3) если говорить о связях приемов решения тригонометрических уравнений с приемами тождественных преобразований тригонометрических и алгебраических выражений, то следует отметить, что эти приемы в учебном пособии представлены бедно и однообразно. Рассматриваются приемы тождественных преобразований:

а) тригонометрические выражения:

- прием использования основного тригонометрического тождества;

- прием использования формул двойного и половинного аргументы;

- прием преобразования суммы тригонометрических выражений в произведение;

б) алгебраических выражений:

- прием разложения на множители;

- прием преобразования тригонометрического выражения, представляющего собой однородный многочлен относительно синуса и косинуса.

Использование указанных приемов приводит к тригонометрическим уравнениям, которые условно можно разделить на следующие виды:

а) сводящиеся к квадратным относительно тригонометрической функции;

б) сводящиеся к дробно-рациональным относительно тригонометрической функции;

в) сводящиеся к однородным;

г) сводящиеся к виду $(f_1(x)-a_1)(f_2(x)-a_2)...(f_n(x)-a_n)=0$, где $f_i(x)$ - тригонометрическая функция $a_i \in R$.

2.4 Роль и место тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

Тригонометрия традиционно является одной из важнейших составных частей школьного курса математики. И этот курс предполагает задачи, решить которые, как правило, можно, пройдя целенаправленную специальную подготовку.

Анализ школьных учебников по математике в полной степени определяет место тригонометрических уравнений и неравенств в линии изучения уравнений и линии изучения неравенств.

Изучению темы «Решение тригонометрических уравнений» часто предшествует изучение таких тем как «Преобразование тригонометрических выражений» и «Основные свойства и графики тригонометрических функций». В разделе «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» мы знакомим учащихся с понятиями арксинус, арккосинус, арктангенс.

Опыт преподавания математики показывает, что осознание важности изучаемого материала приходит к ученикам не в процессе его изучения, а в процессе его применения при решении других заданий. То есть тогда, когда он становится средством для решения других задач.

Так, например, решение уравнение $cos2xcosx + sin2xsinx = 1$, сводится к простейшему уравнению $cosx = 1$. Причём частному виду простейшего, после элементарного преобразования выражения, стоящего в левой части уравнения по формулам сложения косинуса. Аналогичная ситуация может возникнуть и при решении тригонометрических неравенств. Неравенства вида $tgx < \frac{tg\frac{\pi}{15}+tg\frac{4\pi}{15}}{1-tg\frac{\pi}{15}tg\frac{4\pi}{15}}$, в принципе становится решаемым только после преобразования выражения стоящего в правой части неравенства. Получим, $tgx < tg\frac{\pi}{3}$, а затем с помощью таблицы значений основных тригонометрических функций имеем простое неравенство $tgx < \sqrt{3}$, решение которого не должно вызвать затруднений у учащихся.

Мы видим, что именно здесь школьники могут наблюдать пользу от изучения формул тригонометрии. С их помощью нерешаемое на первый взгляд уравнение или неравенство принимает достаточно простой и, главное знакомый вид. Примерно то же самое происходит и при решении тригонометрических неравенств.

При таком подходе изучения тригонометрии, когда уравнения и неравенства изучаются после формул преобразования тригонометрических выражений, место тригонометрических уравнений и неравенств определяется через систематизацию знаний по темам: «Преобразование тригонометрических выражений» и «Основные свойства и графики тригонометрических функций».

Если же тригонометрические уравнения и неравенства изучаются до темы «Преобразование тригонометрических выражений», то здесь место их изучения определяется совершенно противоположным образом. Здесь на изучение тригонометрических уравнений отводится больше времени: как только появляется новая формула, она сразу же используется для решения уравнений или неравенств. То есть, в данном случае не формула преобразования является средством для решения тригонометрического уравнения или неравенства, а уравнение выступает как средство закрепления тригонометрических формул.

Таким образом, при любом подходе к изучению тригонометрии, роль изучения уравнений и неравенств неизмеримо велика, не зависимо от места их изучения. Ну и как следствие из этого велико и неизмеримо место изучения методов решения и тригонометрических уравнений и тригонометрических неравенств.

2.5 Разработка системы тренировочных упражнений для учащихся 10-11 классов по подготовке к ЕГЭ.

В работе нами сделан анализ тригонометрических типов задач ЕГЭ, из чего разработана система тренировочных упражнений для учащихся 10-11 классов по подготовке к ЕГЭ.

Тренировочные задания по тригонометрии для подготовки к ЕГЭ (10-11 класс).

Базовый уровень:

1. Найдите значение выражения: sin(180° − β), если sinβ = –0,24.

2. Найдите значение выражения: cos(β – 270°), если sinβ = 0,59.

3. Найдите 5sinα, если α=$\frac{2\sqrt{6}}{5}$ и α∈($\frac{3\pi}{3}$; 2π).

4. Вычислите: 16ctg110°sin105°tg70°cos105°.

5. Вычислите: 16cos20°cos40°cos80°.

6. Найдите значение выражения 81(sin3α + cos3α), если sin α + cosα = 1

7. Вычислите: tg390° + ctg(−300°)

8. Решите:

$\cos \pi x = 1$	$\sin \pi x = 0$	$tg\ \pi x = 1$
$\cos 2\pi x = -1$	$\sin 2\pi x = 1$	$tg\ 2\pi x = -1$
$\cos \frac{1}{2} x = 0$	$\sin 2x = -1$	$tg\ 2x = 0$
$\cos 2x = \frac{1}{2}$	$\sin 3x = -\frac{1}{2}$	$tg\ \frac{x}{2} = 1$

$\cos\frac{\pi}{2}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\frac{3\pi}{2}x = \frac{1}{2}$	$tg\ \frac{\pi x}{2} = -1$
$\cos(\frac{\pi}{3} + x) = 1$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$	$ctg\ (\frac{\pi}{2} + x) = 0$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{2}$	$\sin(2\pi - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$ctg\ (\frac{3\pi}{2} - x) = 1$

Профильный уровень:

1. Простейшие тригонометрические уравнения (Задание № 5).

1. Найдите корни уравнения: $cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

2. Решите уравнение: $tg\frac{\pi x}{4} = -1$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

3. Решите уравнение: $sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5$. В ответ запишите наименьший положительный корень

4.Найдите наименьший положительный корень уравнения cos(2*x*) = 0,5.
 Ответ запишите в градусах.

5. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения 2 $\sqrt{3}$ tg*x* –6 = 0.
 Ответ запишите в градусах.

3. Вычисление значений тригонометрических выражений.

1. Найдите $tg\alpha$, если $cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

2. Найдите $3cos\alpha$, если $sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

3. Найдите $26\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$, если $cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

4. *Найдите* $tg^2\alpha$, если $5sin^2\alpha + 13cos^2\alpha = 6$

5. Найдите $\frac{10cos\alpha+4sin\alpha+15}{2sin\alpha+5cos\alpha+3}$, если $tg\alpha = -2{,}5$

6. Найдите $tg\alpha$, если $\frac{7\sin\alpha+13\cos\alpha}{5sin\alpha-17cos\alpha} = 3$

7. Найдите значение выражения $5\sin(\alpha - 7\pi) - 11\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$, если $\sin\alpha = -0{,}25$

8. Найдите $-47\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}2$

9. Найдите значение выражения $\frac{59}{cos^2 14° + 3 + cos^2 76°}$

10. Найдите значение выражения $\sqrt{50}cos^2\frac{9\pi}{8} - \sqrt{50sin^2}\frac{9\pi}{8}$ 3.

Тригонометрические задачи с прикладным содержанием (Задание № 10).

1. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v^2}{g} sin2\alpha$ (м), где $v=20$ м/с – начальная скор ость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте g=10 м/с). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

2. Трактор тащит сан и с силой F=80 кН , направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной S=50 м вычисляется по формуле $A=FS\cos\alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

3. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закон у $v(t)=5\sin\pi t$ (см/с), где t – время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения была не менее 2,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

4. Скейтбордист прыгает на стоящую н а рельсах платформу, со скоростью v=3 м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} vcos\alpha$ (м/с), где m=80 кг – масса скейтбордиста со скейтом, а M=400 кг – масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,25 м/с?

5. Катер должен пересечь реку шириной L=100 м и со скоростью течения u=0,5 м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, п и этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u} ctg\alpha$, где α – острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было н е больше 200 с.?

4. Наибольшее и наименьшее значение тригонометрических функций (Задание № 12).

1. Найдите наименьшее значение функции $y = 3 + \frac{5\pi}{4} - 5x - 5\sqrt{2}cosx$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

2. Найдите наименьшее значение функции $y = 5cosx - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

3. Найдите наибольшее значение функции $y = 7sinx - 8x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

4. Найдите наибольшее значение функции $y = 10sinx - \frac{36}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$

5. Найдите наименьшее значение функции $y = 5tgx - 5x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

6. Найдите наибольшее значение функции $y = 14x - 7tgx - 3{,}5\pi + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

7. Найдите наименьшее значение функции $y = 13x - 9sinx + 9$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

8. Найдите наибольшее значение функции $y = -2tgx + 4x - \pi - 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

9. Найдите точку минимума функции $y = (0{,}5 - x)cosx + sinx$ принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

10. Найдите наименьшее значение функции $y = -14x + 7tgx + \frac{7\pi}{2} + 11$ н а отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

5. Тригонометрические уравнения (Задание № 13).

1. а) Решите уравнение $cos2x - 5\sqrt{2}\cos x - 5 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

2. а) Решите уравнение $\frac{1}{sin^2x} - \frac{3}{sinx} + 2 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

3. а) Решите уравнение $\frac{26cos^2x - 23cosx + 5}{13sinx - 12} = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

4. а) Решите уравнение $\frac{2}{1+tg^2x} = 1 + sinx$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

5. а) Решите уравнение $tg^2x + (1 + \sqrt{3})tgx + \sqrt{3} = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

6. а) Решите уравнение $cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

7. а) Решите уравнение $|cosx + sinx| = \sqrt{2}sin2x$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3;\ 5]$.

8. а) Решите уравнение $8sin^2\left(\frac{7\pi}{12} + x\right) - 2\sqrt{3}cos2x = 5$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

9. а) Решите уравнение $sin2x + \sqrt{2cosx - 2cos^3x} = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; -\frac{\pi}{6}\right]$.

10. а) Решите уравнение $\frac{4^{sin2x} - 2^{2\sqrt{3}sinx}}{\sqrt{7sinx}} = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2};\ -5\pi\right]$

Апробация

Апробация проводилась в 11 классе в МБОУ СОШ с. Теве-Хая во время практики. Среди учащихся 11 класса были и хорошо успевающие, но преимущественно отстающие ученики. Ученики занимаются по учебнику Колмогоров А.Н. «Алгебра и начала математического анализа». Раздел «Тригонометрия» изучался учащимися в первом полугодии 10 класса. Многие понятия и формулы уже забыты. Поэтому необходимо было повторить теоретический материал и научить решать задачи, следуя от простейших к более сложным.

Мною были разработаны тренировочные упражнения, которые направлены на помощь ученикам систематизировать пройденный материал, устранить пробелы в знаниях, подготовиться к ЕГЭ и дальнейшему обучению в других учебных заведениях.

Занятия с учениками проводились в рамках дополнительных уроков подготовки к ЕГЭ. Всего было проведено 6 занятий. На первом занятии повторили все основные понятия, связанные с тригонометрическим кругом, для закрепления были даны задания для домашней самостоятельной работы. Для проверки усвоения проводились самостоятельные работы, анализировались ошибки, допускаемые учащимися при решении этих задач и пути их устранения. Занятия проводились в лекционно-семинарской форме.

Результаты апробации.

Контрольная работа № 1 направлена на определение остаточных знаний у учащихся по основным понятиям.

Контрольная работа № 2 проведена после 2 уроков.

Контрольная работа № 3 после совместного решения тренировочных упражнений.

Основная задача контрольных работ заключалась в определении уровни подготовки, знаний и умений по математике по теме «Тригонометрия».

№	Ф.И ученика	Оценка контрольной работы № 1	Оценка контрольной работы № 2	Оценка контрольной работы № 3
1	Аракчаа Арина	3	3	4
2	Байыр Аюна	3	3	4
3	Грачева Гульчана	3	4	4
4	Донгак Чечена	2	3	4
5	Куулар Айзаана	3	4	4
6	Монгуш Начын	2	3	4
7	Ондар Монгун-Сай	4	4	4
8	Идам-Сюрюн Долаан	2	2	3
9	Санаа Найыр	2	2	3
10	Сат Ромашка	4	4	5
11	Тюлюш Долаана	2	3	4
12	Хертек Аялга	2	2	3

По результатам контрольных работ можно сказать, система упражнений для подготовки к ЕГЭ помогает ученикам запоминать, закреплять знания.

Контрольная работа №1.

1. В треугольнике ABC угол C равен 90^0, sinB= 0,5. Найти AC.
2. Найти $\mathrm{tg}\beta$, если $\sin\beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\beta \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$.
3. Найти значение выражения $5\cos(\pi+\beta) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$, если $\cos\beta = -\frac{1}{2}$

4. Определить знак выражения $\sin\frac{17\pi}{2} \cdot \cos 3\pi \cdot \cos 2$.

5. Найти значение выражения $\frac{4 \cdot \sin 84^0}{\cos 42^0 \cdot \cos 48^0}$

Контрольная работа №2.

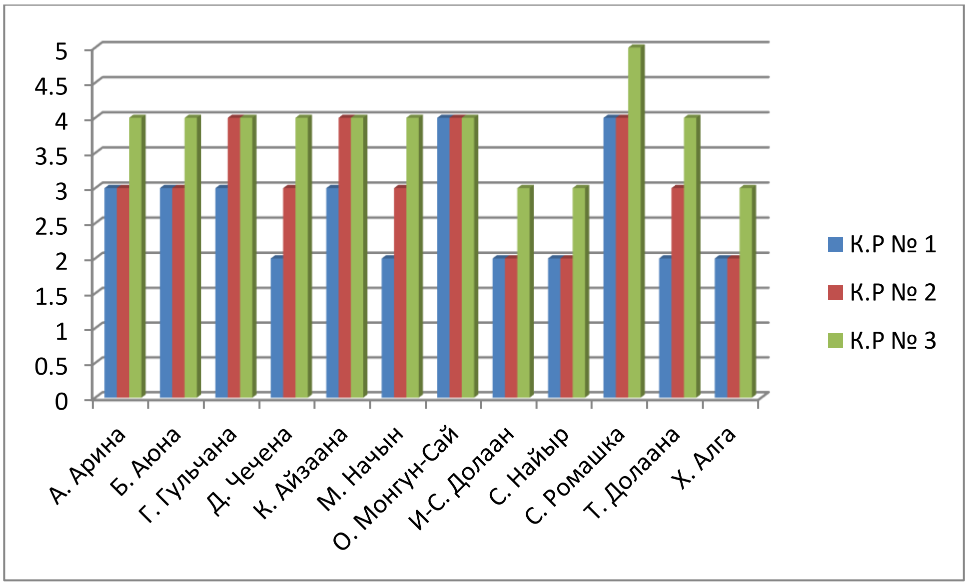
1. . Найдите $tg\alpha$, если $\frac{7\sin\alpha + 13\cos\alpha}{5sin\alpha - 17cos\alpha} = 3$
2. Решите уравнение: $tg\frac{\pi x}{4} = -1$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.
3. Решите уравнение: $sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5$. В ответ запишите наименьший положительный корень
4. Найдите значение выражения 81(sin3α + cos3α), если sin α + cos α = 1
5. Найти наибольшее значение функции $y = -3tgx + 6x - 1{,}5\pi + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

Контрольная работа №3. (проверка элементарных навыков)

1. Найдите $26\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$, если $cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
2. Найдите $tg^2\alpha$, если $5sin^2\alpha + 13cos^2\alpha = 6$
3. Найдите $\frac{10cos\alpha + 4sin\alpha + 15}{2sin\alpha + 5cos\alpha + 3}$, если $tg\alpha = -2{,}5$
4. Решите уравнение: $sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5$. В ответ запишите наименьший положительный корень
5.) Решите уравнение $\frac{2}{1 + tg^2x} = 1 + sinx$

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Результаты контрольных работ предоставлены в диаграмме.



Следующую контрольную работу можно предложить учащимся как итоговую по подготовке к решению задачи №13 ЕГЭ.

Контрольная работа №4.

1. Решить уравнение: $12sin^2\text{x} + 4cosx - 11 = 0$
2. Решите уравнение $cos2x - 5\sqrt{2}\cos x - 5 = 0$

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.
3. а) Решите уравнение $cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.
4. а) Решите уравнение $tg^2x + (1 + \sqrt{3})tgx + \sqrt{3} = 0$

   б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.
5. Решите уравнение $(4\,cos^2x - 12\,cosx + 5) \cdot \sqrt{-sinx}$=0

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При большом объеме содержания количество часов на изучение раздела «Тригонометрия», особенно в общеобразовательных классах, недостаточно. При том, что этот раздел математики имеет большое практическое применение, не только в математике, но и во всех науках и отраслях точных знаний. Поэтому потребность хороших знаний раздела «Тригонометрии» у учащихся имеет большое значение. С целью обобщения знаний по данной теме мною была выполнена данная дипломная работа.

В первой главе рассмотрены теоретические сведения, связанные с тригонометрией в школьном курсе математики и сравнительный анализ действующих учебников по алгебре и математическому анализу.

Вторая глава посвящена методике изучения тригонометрии в школьном курсе математики, разработке системы задач для учащихся 10- 11 классов по подготовке к ЕГЭ.

В результате поставленных задач были проанализированы школьные учебники и методическая литература по теме «Тригонометрия».

Не во всех действующих школьных учебниках в достаточной мере представлен материал темы. И даже если материала достаточно для освоения курса, но учебники содержат ограниченное количество практических задач, которых недостаточно для подготовки к ЕГЭ.

Учителю необходимо иметь дополнительные материалы для проведения уроков и различных внеурочных занятий, для подготовки учеников к экзаменам.

Мною были проработаны контрольно-измерительные материалы, предлагаемые на ЕГЭ, за последние пять лет. В результате составлен перечень задач, входящих в материалы экзаменов, как базового уровня, так и профильного. Понятия из тригонометрии входят и в геометрические задачи, но я ограничилась только применением тригонометрии в алгебре и математическом анализе.

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы решены следующие задачи:

- проведен сравнительный анализ содержания раздела «Тригонометрия» в действующих школьных учебниках;

- изучены методические рекомендации обучения разделу «Тригонометрия» в старшей школе;

- подобрана система тренировочных упражнений для учащихся 10- 11 классов по подготовке к ЕГЭ.

- проведено экспериментальное исследование эффективности разработок.

Материалы данной работы могут дополняться и использоваться при подготовке к ЕГЭ или проведения факультативных занятий по алгебре в общеобразовательных школах.

Библиографический список

1. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала анализа 10-11 / Ш.А. Алимов. – Москва: Просвещение, 2001. – 96 с. – Текст: непосредственный.
2. Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа. 10-11: учебное пособие для 10 – 11 классов средней школы/ М.И. Башмаков.- Москва: Просвещение, 2015. – 335 с. - Текст: непосредственный.
3. Вавилов, В.В. Задачи по математике / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник. – Москва: Наука, 2007г. – 328 с. – Текст: непосредственный.
4. Гусак, А. А. Основы высшей математики: пособие для студентов вузов / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2012. – 205 с. – URL: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=111939 – Текст: электронный.
5. Гельфанд, И.М. Тригонометрия./ С.М. Львовский, А.Л Тоом.- Москва: МЦНМО, 2002.-199 с. – Текст: непосредственный.
6. Гилемханов, Р.Г. О преподавании тригонометрии в 10 классе по курсу В/ Р.Г. Гилемханов. - Математика в школе. 2001-№ 6 -с. 26-28. Текст: непосредственный.
7. Громов, Ю.Ю. Тригонометрия: учебное пособие/ Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, О.Г. Иванова и другие: Тамбов: 2003.-104 с. – URL: https://bookree.org/reader?file=550157&pg=4 - Текст: электронный.
8. Дюженкова, Л. И. Практикум по высшей математике. Часть 2: учебное пособие / Л. И. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. А. Михалин. – Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2012. – 469 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/6523 (дата обращения: 04.04.2020 г). – Текст: электронный.
9. Ивлев, Б. И. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса / Б. М. Ивлев, С. М. Саакян, С. И. Шварцбурд. – Москва: Просвещение, 2007. – 176 с. - Текст: электронный.
10. Карасев, В.А. 12 уроков по тригонометрии./ В.А. Карасев, Г.Д. Лёвшина.-2013- 200с. Текст: электронный.

11. Кожухов, И.Б. Универсальный справочник по математике/ И.Б. Кожухов. – Москва: ЛистНью, 2015г. – 327 с. - Текст: электронный.

12. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 10 – 11 класс средней школы./А.Н. Колмогоров. - Москва: Просвещение, 2017. – 335 с. - Текст: непосредственный.

13. Локоть, В.В. Задачи с параметрами и их решение. Тригонометрия: уравнения, неравенства, системы. 10 класс / В.В. Локоть. – Москва: АРКТИ, 2014г. – 49 с. - Текст: непосредственный.

14. Литвиненко, В. Н. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия: учебное пособие для студентов.- 2-е издание, переработано и дополнено/ В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович.– Москва: Просвещение, 1991.-352 с. - Текст: непосредственный.

15. Лурье, М. В. Тригонометрия. Техника решения задач: учебное пособие/М. В. Лурье.- Москва: УНЦДО. 2004-160 с. – Текст: непосредственный.

16. Мерзляк, А.Г. Алгебра и начала математического анализа: 10 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций ФГОС/А.Г. Мерзляк, В.М Поляков. - Москва: 2017.- 480с. – Текст: электронный.

17. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений./А. Г. Мордкович – Москва: Мнемозина, 2000. – 336с. - Текст: непосредственный.

18. Новиков, А.И. Тригонометрические функции, уравнения и нераве ства. Рязанская государственная радиотехническая академия/ А. И. Новиков. - Рязань, 2005. - 288 с. Текст: электронный.

19. Потапов, М.К. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции:- учебное пособие. Под редакцией В.А. Садовничего/ М.К. Потапов, В.В. Александров, П.И. Пасиченко. - Москва: 2001.-735 с. Текст: непосредственный.

20. Садовничий, Ю.В. Математика. Профильный уровень. Тригонометрические уравнения / Ю.В. Садовничий.– Москва: Экзамен, 2019г. – 78 с. Текст: н непосредственный.

21. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня. URL: https://ege.sdamgia.ru/

22. Сергеев, И. Н . ЕГЭ 1000 задач математика. Все задания части 2./ Сергеев И.Н ., Панферов В.С.-Москва: Экзамен , 2015.-301 с. Текст - непосредственный.

23. Суворова, М.В. Повторительно-обобщающие уроки в курсе математики (на примере изучения темы «Тригонометрические уравнения» //Математика в школе). 2015. № 4. С.12-13. Текст: электронный.

24. Фомин а, Е.А. Тригонометрия: Учебное пособие для студентов 1 курса/ Е.А. Фомин а. – Волхов: 2016. - 42 с. – Текст: непосредственный.

25. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Режим доступа: http://www.edu.ru/db/portal/obschee/ , дата обращения: 10.03.2020. Текст – электронный.

26. Филатов, В.Г. О потере корней при решении тригонометрических уравнений //Математика в школе. 2017. №2. С.57-59. Текст – непосредственный.

27. Шабашова, О.В. Приемы отбора корней в тригонометрических уравнениях //Математика в школе. 2004. №1. С.20-24.

28. Яковлев, И.В. Материалы по математике. Простейшие тригонометрические уравнения. 2012г. Режим доступа: https://mathus.ru/math/trigeqprost.pdf . Текст - электронный.

29. Якимовская, И.С. Знания и мышление школьников. Москва: Просвещение, 2016г. – Текст: непосредственный.

30. Ященко, И.В. ЕГЭ математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты./ И.В. Ященко- 2017.-272с. – Текст: непосредственный.

Приложение 1.

Урок-обобщение. Тема**: «**Общие методы решения тригонометрических уравнений**».**

Цель: образовательные**,** развивающие, воспитательные.

Задачи: развивать умение обобщать, систематизировать, делать вывод;

активизация самостоятельной деятельности;
развивать познавательный интерес;
формирование умения рационально, аккуратно оформлять задание на доске и в тетради.

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний

Методы обучения: частично-поисковый, проверка уровня знаний, самопроверка, системные обобщения

Формы организации: индивидуальная, фронтальная

Приемы: обобщения; сравнения; создание проблемной ситуации; самопроверки;

Ход урока:

1.Организационный момент (обеспечить внешнюю обстановку для работы на уроке, психологически настроить учащихся к общению)

Учитель: Здравствуйте, садитесь! Сегодня мы проводим урок-обобщение по теме «Общие методы решения тригонометрических уравнений».

1.2. Проверка готовности учащихся к уроку.

Учитель: Ребята, кто сегодня отсутствует? Все готовы к уроку? Сконцентрируйтесь, начинаем нашу работу!

1.3. Озвучивание целей урока и плана его проведения.

Учитель: Тема нашего урока – решение тригонометрических уравнений.

Цель урока сегодня - рассмотреть общие подходы решения тригонометрических уравнений; закрепить навыки и проверить умение решать тригонометрические уравнения разными способами.

В начале урока мы вспомним основные формулы тригонометрии и их применение для упрощения выражений.

Далее работа будет чередоваться: вспомним формулы решения простейших тригонометрических уравнений, и на их основе посмотрим как происходит выборка корней при решении заданий ЕГЭ в части С1. Вспомним виды тригонометрических уравнений. Решим тригонометрические уравнения по известным алгоритмам, однородные тригонометрические уравнения первого и второго порядка, а также неоднородные уравнения первого порядка. Проведём разноуровневую проверочную работу, задания которой вы будете выбирать самостоятельно, учитывая свои знания, умения и навыки. Проверим решения, и вы выставите себе оценку.

Затем получите домашнее задание и подведем итоги урока. Итак, приступаем.

2. Устная работа.

Учитель: Задание – используя основные формулы тригонометрии, упростите выражение:

А) (sin a – 1) (sin a + 1) $\qquad$ - $\cos^2$ a

Б) $\sin^2$ a – 1 + $\cos^2$ a $\qquad$ 0

В) $\sin^2 a + \text{tg } a \text{ ctg } a + \cos^2 a$ 2

Г) $\sqrt{1-2tgx+tg^2x}$ |1- tg x|

2. Основная часть урока (чередование фронтальной и индивидуальной форм работы с последующей проверкой задания).

2.1 **Учитель**: Тригонометрические уравнения вызывают наибольшие затруднения в ЕГЭ, в частности, в задании С1, необходимо не только решить уравнение, но и правильно выбрать корни.

Задание №1: Решить уравнение, указать корни, принадлежащие промежутку (-4;4)

$$sinx = -\frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$$

**Один из учеников записывает решение уравнения на закрытой доске, отбор корней идет совместно с объяснениями учителя:*

$$n = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{6} \approx -0{,}52 \ \in (-4; 4)$$

$$n = 1$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \approx 3{,}66 \ \ \in (-4; 4)$$

$$n = 2$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \approx 5{,}76 \ \ \in (-4; 4)$$

$$n = -1$$

$$x = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6} \approx 2{,}66 \ \ \in (-4; 4)$$

$$n = -2$$

$$x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6} \approx \frac{13 \cdot 3}{6} = \frac{39}{6} = 6{,}5 \ \ \in (-4; 4)$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}$.

2.2 Учитель: Ребята, а теперь вспомним основные методы решения тригонометрических уравнений.

**На экране проецируются основные виды тригонометрических уравнений, методы их решений*

1. Введение новой переменной.	$2\sin^2x - 5\sin x + 2 = 0$.	Пусть $\sin x = t$, $\|t\| \leq 1$, Имеем: $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Получаем и решаем $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$,
2. Разложение на множители	$2\sin x \cos 5x - \cos 5x = 0$;	$\cos 5x\,(2\sin x - 1) = 0$. Имеем: $\begin{cases} \cos 5x = 0, \\ 2\sin x - 1 = 0; \ldots \end{cases}$
3. Однородные тригонометрические уравнения.	**I степени** $a\sin x + b\cos x = 0$, $(a,b \neq 0)$.	Разделим на $\cos x \neq 0$. Получаем ии решаем: $a\operatorname{tg}x + b = 0$; …
	II степени $a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = 0$.	1) если $a \neq 0$, разделим на $\cos^2x \neq 0$ имеем: $a\operatorname{tg}^2x + b\operatorname{tg}x + c = 0$. 2) если $a = 0$, то имеем: $b\sin x\cos x + c\cos^2x = 0$; разделим на $\cos^2x \neq 0$

		получаем и решаем b tgx + c = 0
4. Неоднородные тригонометрические уравнения.	Уравнения вида: asinx + bcosx = c где *a*, *b*, *c* – коэффициенты; *x* – неизвестное.	*Введение вспомогательного угла* Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$ (корректно ли это?) : $\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi}\sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{C}$, $\cos\varphi\cdot\sin x + \sin\varphi\cdot\cos x = C$, или $\sin(x+\varphi) = C$, и его решение: $x = (-1)^k\cdot\arcsin C - \varphi + \pi k$, где $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Заметим, что введённые обозначения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

2.3 Учитель: Вспомнив теорию, давайте решим несколько тригонометрических уравнений по известным алгоритмам.

**Задания можно выводить на экран, у меня они были подготовлены на листах формата А3 и крепились к доске на магнитах. Каждое задание выполняется по одному ученику на доске, с объяснением. Первым двоим, не рядом сидящим, при правильном решении и оформлении ставится оценка.*

Задание №1.

Решить уравнение $\sin^2 x + 5\sin x - 6 = 0$.

Учащиеся решают уравнение, вводят замену

$\sin x = z, |z| \leq 1$,

решая квадратное уравнение

$z^2 + 5z - 6 = 0$, *находят* $z_1 = 1$, $z_2 = -6$ *(не удовлетворяет условию* $|z| \leq 1$*)*

Решением уравнения $\sin x = 1$ *является* $x = \pi/2 + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $\pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z$.

Учитель: Продолжим решать тригонометрические уравнения, применяя нужный метод.

Задание №2

Решите уравнение $2 \sin x + 3 \cos x = 0$.

Учащиеся решают уравнение.

$2 \sin x + 3 \cos x = 0 \mid : \cos x \neq 0$

$2\, tg\, x + 3 = 0$

$tg\, x = -1{,}5$

$x = arctg\,(-1{,}5) + \pi k,\ k \in Z$

$x = -\, arctg\, 1{,}5 + \pi k,\ k \in Z$

Ответ: $-\, arctg\, 1{,}5 + \pi k,\ k \in Z$.

Задание №3

Решите уравнение $2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0$

Учащиеся решают уравнение

$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0$

$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0 \mid : \cos^2 x \neq 0$

$2\, tg^2 x - 3\, tg\, x - 5 = 0$

замена $tg\, x = t$

$2t^2 - 3t - 5 = 0$

$t_1 = -1;\ t_2 = 2{,}5$

Выполняем обратную замену и решаем уравнения

1) tg x = -1

x = -π/2 + πk , k ∈ Z.

2) tg x = 2,5

x = arctg 2,5+ πn, n ∈ Z.

Ответ: -π/2 + πk , arctg 2,5+ πn, n, k ∈ Z.

Задание №4.

Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

Учащиеся решают уравнение

$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \quad \Big| \ :2$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{2}$$
$$\sin(\frac{\pi}{6} + x) = \frac{1}{2}$$
$$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

3. Самостоятельная работа учащихся с последующей проверкой результатов работы

Учитель: А теперь выберите два уравнения и самостоятельно решите их.

На экране проецируется задание.

На	1 вариант	2 вариант

оценку		
«3» «4» «5»	$3 \sin x + 5 \cos x = 0$ $5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$ $3 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 0$ $5 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$ $2 \sin x - 5 \cos x = 3$ $1 - 4 \sin 2x + 6 \cos^2 x = 0$	$2 \cos x + 3 \sin x = 0$ $6 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ $2 \sin^2 x - \sin x \cos x = 0$ $4 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 1$ $2 \sin x - 3 \cos x = 4$ $2 \sin^2 x - 2 \sin 2x + 1 = 0$

Учитель: Ребята, проверьте свое решение с ответами и поставьте оценку.

**Ответы записываются на доске с обратной стороны, пока учащиеся работают. После того, как собраны работы, проводится самопроверка, и учащиеся выставляют себе предварительную оценку.*

	1 вариант	2 вариант
«3» «4» «5»	$-\operatorname{arctg} 5/3 + \pi k,\ k \in Z.$ $\pi/4 + \pi k;\ -\operatorname{arctg} 0{,}4 + \pi n,\ k, n \in Z.$ $\pi/2 + \pi k;\ -\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi n,\ k, n \in Z.$ $\pi/4 + \pi k;\ -\operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi n,\ k, n \in Z.$ $\operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{5}) + \pi k,\ k \in Z.$	$-\operatorname{arctg} 2/3 + \pi k,\ k \in Z.$ $\operatorname{arctg} 1/3 + \pi k;\ \operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi n,\ k, n \in Z.$ $\pi k;\ \operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi n,\ k, n \in Z.$ $-\pi/4 + \pi k;\ -\operatorname{arctg} 5/3 + \pi n,\ k, n \in Z.$ $\operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{11}) + \pi k,\ k \in Z.$

	π/4 + πk; arctg 7 + πn, k, n ∈ Z.	π/4 + πk; arctg 1/3 + πn, k, n ∈ Z.

4. Учитель: Для закрепления навыков решения тригонометрических уравнений я предлагаю вам выполнить домашнее задание дифференцированного содержания:

Решите уравнения

Оценка «3»:

1. $cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$
2. $2\,cos^2 x - sin^2 x = -1$
3. $2\,cos^2 x + 5\,sin\,x - 4 = 0$

Оценка «4»:

4. $2sin^2 x + cos^2 x + 3\,sin\,x\,cos\,x = 3$
5. $4\,sin\,x + cos\,x = 4$

Оценка «5»:

6. $cos\frac{5x}{2} + cos3x = 2$
7. *Найдите наибольший отрицательный корень уравнения*

   $2sin^2 x - 5sinxcosx - 5\,cos^2 x = 2$

5. Учитель: Подведем итоги урока. Сегодня на уроке мы вспомнили числовые значения тригонометрических функций, вспомнили формулы решения простейших тригонометрических уравнений, рассмотрели общие подходы решения тригонометрических уравнений, закрепили навыки и проверили умения решать тригонометрические уравнения, познакомились со способом отбора корней при решении тригонометрических уравнений.

Я уверена, что у вас сложилось более полное представление о тригонометрических уравнениях и разнообразии способов их решения, и с решением тригонометрических уравнений большинство из вас справится.

- Что нового узнали на уроке?

- Испытывали ли вы затруднения при выполнении самостоятельной работы?

- Испытывали ли вы затруднения при выборе самостоятельной работы?

- Какие проблемы у вас возникли по окончании урока?

Учитель: Спасибо вам за насыщенную работу на уроке. Я благодарю всех, кто принял активное участие в работе. Урок окончен. До свидания!

Приложение 2.

План урока.

Тема: Числовая окружность на координатной плоскости.

Цель: а) образовательная – повторить понятие радиан, определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла, научиться определять значения тригонометрических функций различных углов с помощью единичной тригонометрической окружности;

б) развивающая – развитие логического мышления;

в) воспитательная – воспитание аккуратности при построении чертежей.

Тип урока: повторение и закрепление знаний.

Методы: словесный, наглядный

Оборудование: плакаты «Единичная окружность», «Тригонометрическая», таблица «Значения тригонометрических функций некоторых углов».

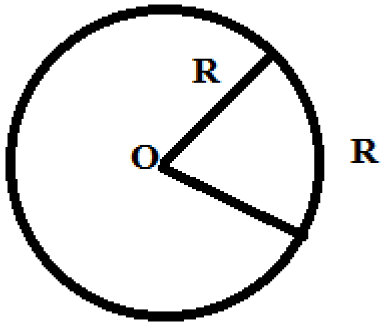
Ход занятия

I Организационный момент

Дома: §11-13, № 13.3

II Актуализация знаний

1) Радианная мера угла. Вы уже знакомы с радианной мерой углов. Угол в 1 радиан – это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности



2) Значения тригонометрических функций некоторых углов можно определить с помощью таблицы:

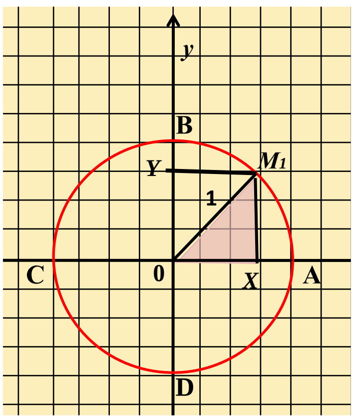
Значение тригонометрических функций некоторых углов

α									
	в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Можно ли определить с помощью таблицы значение например синус, скажем, 300°, или - 45°?
Глядя на тригонометрический круг, легко можно ответить на такие вопросы. И вы скоро будете знать как!

Знакомство с тригонометрическим кругом

Давайте по порядку.
Сначала вспомним определения четырёх тригонометрических функций:



$Sin\alpha = y \quad Cos\alpha = x \quad tg\alpha = \frac{y}{x} \quad ctg\alpha = \frac{x}{y}$

Синусом угла α назавается *ордината* точки – конца подвижного радиуса единичной тригонометрической окружности, повёрнутого на угол α.

Косинусом угла α назавается *абсцисса* точки – конца подвижного радиуса единичной тригонометрической окружности, повёрнутого на угол α.

Тангенсом угла α называется отношение *ординаты к абсциссе* точки – конца подвижного радиуса единичной тригонометрической окружности, повёрнутого на угол α.

Котангенсом угла α называется отношение *абсциссы к ординате* точки – конца подвижного радиуса единичной тригонометрической окружности, повёрнутого на угол α.

Теперь выпишем вот такой ряд чисел: 0, 1, 2, 3, 4

А теперь такой: $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$

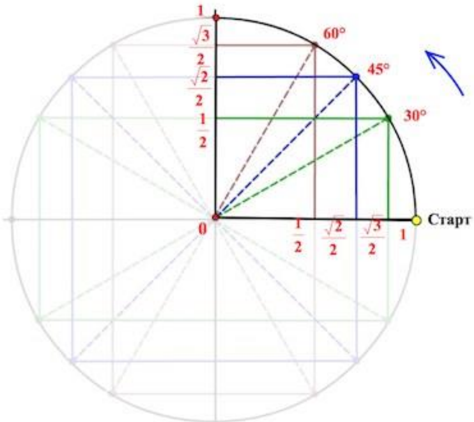
И, наконец, такой: $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$,

Конечно, понятно, что, на самом-то деле, на первом месте стоит 0, на втором месте стоит $\frac{1}{2}$, а на последнем – 1. То есть нас будет больше интересовать цепочка 0, $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$.

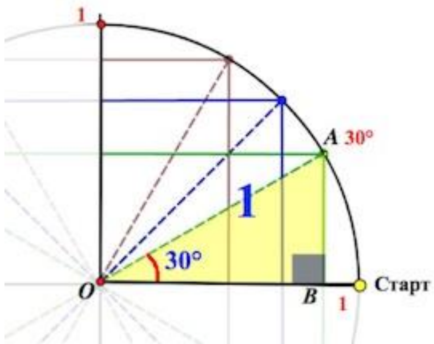
Эта цепочка — и есть основные значения синуса и косинуса в первой четверти.

Начертим в прямоугольной системе координат круг единичного радиуса (то есть радиус-то по длине берем любой, а его длину объявляем единичной).

От луча «0-Старт» откладываем в направлении стрелки (см. рис.) углы $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.



Получаем соответствующие точки на круге.
Так вот если спроецировать точки на каждую из осей, то мы выйдем как раз на значения из указанной выше цепочки.
Почему?
Рассмотрим **принцип**, который позволит справиться и с другими, аналогичными ситуациями.



Треугольник AOB – прямоугольный, в нем $\angle \boldsymbol{O} = 30^\circ$. А мы знаем, что против угла в 30° лежит катет вдвое меньший гипотенузы (гипотенуза у нас = радиусу круга, то есть 1). Значит, AB= $\frac{1}{2}$ (а следовательно, и OM= $\frac{1}{2}$). А по теореме Пифагора $OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Наконец, что такое **<u>синус, косинус в прямоугольном треугольнике</u>?**

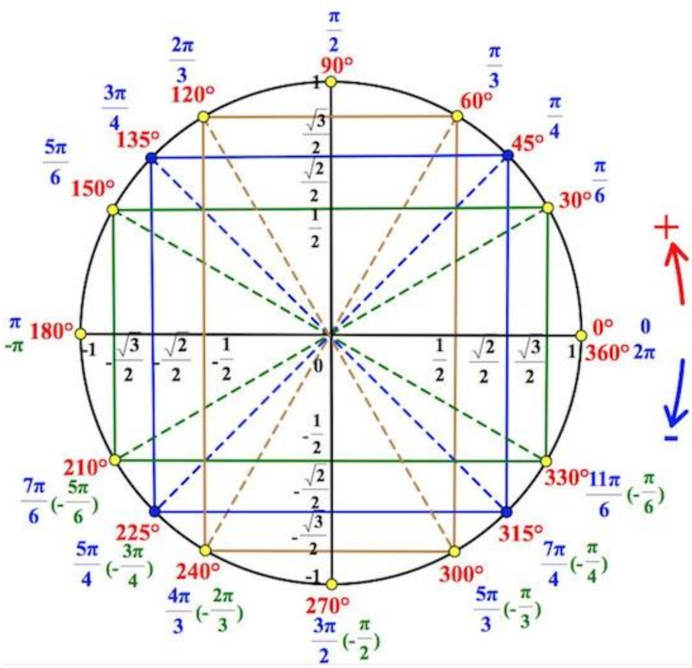
$Sin\angle AOB = \frac{AB}{OA} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$,

$Cos\angle AOB = \frac{OB}{OA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так вот точка В и будет соответствовать значению $Cos30^{\circ}$, а точка М — значению $Sin30^{\circ}$.
Аналогично с остальными значениями первой четверти.
Как вы понимаете, привычная нам ось (ох) будет **осью косинусов**, а ось (оу) — **осью синусов**.
Слева от нуля по оси косинусов (ниже нуля по оси синусов) будут, конечно, отрицательные значения.

III Новыйматериал

Перевод радиан в градусы и градусы в радианы



Все знают, что π радиан – это 180°.

Так вот, например, $\frac{\pi}{3} = \frac{180^{\circ}}{3} = 60^{\circ}$,а $\frac{11\pi}{6} = \frac{11 \cdot 180^{\circ}}{6} = 330^{\circ}$.

Переведите из радиан в градусы:

$\frac{\pi}{4} = \frac{180^{\circ}}{4} = 45^{\circ}$ $\frac{\pi}{5} = \frac{180^{\circ}}{5} = 36^{\circ}$

$\frac{\pi}{9} = \frac{180^{\circ}}{9} = 20^{\circ}$

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180^{\circ}}{3} = 120^{\circ}$ $\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180^{\circ}}{4} = 135^{\circ}$ $\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180^{\circ}}{6} = 150^{\circ}$.

Так, мы **научились переводить радианы в углы**.

Теперь наоборот, **давайте переводить градусы в радианы**.
Допустим, нам надо перевести 80° в радианы. Нам поможет пропорция.
Поступаем следующим образом:
Так как, 180°=π радиан, то заполним таблицу:

	градусы	радианы
1.	180	π
2.	80	?

Откуда $80^{\circ} = \frac{80\pi}{180} = \frac{4\pi}{9}$

Тренируемся находить значения синуса и косинуса по кругу

Давайте еще уточним следующее.

Ну хорошо, если нас просят вычислить, скажем, $Sin\ 30^{\circ}$, – здесь обычно путаницы не возникает – все начинают первым делом искать 30° на круге. А если просят вычислить, например, $Sin\ 0^{\circ}$. Где искать этот ноль? Часто ищут его в начале координат. Почему?

Чтобы не ошибаться, нужно помнить следующее:

1) То, что стоит после Sin или Cos – это аргумент=угол, а **углы у нас располагаются на круге, не ищите их на осях!** (Просто отдельные точки попадают и на круг, и на ось…) А сами значения синусов и косинусов — ищем на осях.

2) Если мы от точки «старт» отправляемся **против часовой стрелки** (основное направление обхода тригонометрического круга), **то мы откладываем положительные значения углов**, значения углов растут при движении в этом направлении.

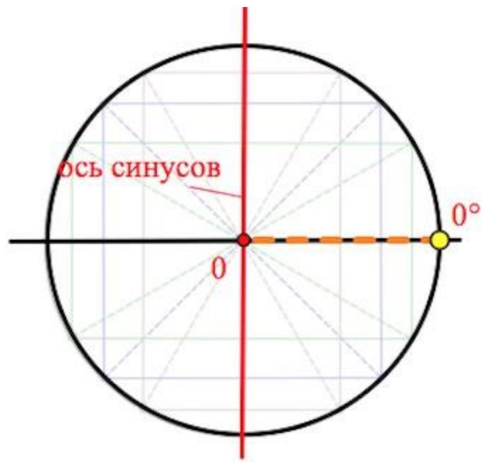
Если же мы от точки «старт» отправляемся **по часовой стрелке, то мы откладываем отрицательные значения углов.**

Пример 1.

Найти значение . $Sin\ 0^{\circ}$

Решение:

Находим на круге 0° . Проецируем точку на ось синусов (то есть проводим перпендикуляр из точки 0°к оси синусов (оy)).



Приходим в 0. Значит, . $Sin\ 0^{\circ} = 0$

Пример 2.

Найти значение $Sin\ 270^{\circ}$.

Решение:

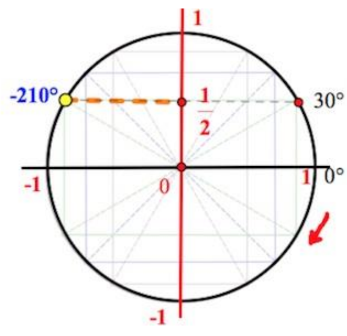
Находим на круге 270° (проходим против часовой стрелки 180° и еще 90°). Проецируем точку на ось синусов (а она **уже** лежит на оси синусов).

Попадаем в -1 по оси синусов. Значит, $Sin\ 270^{\circ} = -1$.
Заметим, за точкой $27\ 0^{\circ}$ «скрываются» такие точки, как -90° (мы могли бы пойти в точку, помеченную как $27\ 0^{\circ}$, по часовой стрелке, а значит появляется знак минус), $270^{\circ} + 360^{\circ}$и бесконечно много других.
Можно привести такую аналогию:

Представим тригонометрический круг как беговую дорожку стадиона.

Вы ведь можете оказаться в точке «Флажок», отправляюсь со старта против часовой стрелки, пробежав, допустим, 300 м. Или пробежав, скажем, 100м по часовой стрелке (считаем длину дорожки 400 м).
А также вы можете оказаться в точке «Флажок» (после «старт»), пробежав, скажем, 700 м, 1100 м, 1500 м и т. д. против часовой стрелки. Вы можете оказаться в точке «Флажок», пробежав 500 м или 900 м и т. д. по часовой стрелке от «старт».
Разверните мысленно беговую дорожку стадиона в числовую прямую. Представьте, где на этой прямой будут, например, значения 300, 700, 1100, 1500 и т.д. Мы увидим точки на числовой прямой, равноотстоящие друг от друга. Свернем обратно в круг. Точки «слепятся» в одну.
Так и с тригонометрическим кругом. За каждой точкой скрыто бесконечно много других.
Скажем, углы30°, 390°, 750°, -330° и т.д. изображаются одной точкой.
И значения синуса, косинуса в них, конечно же, совпадают. (Вы заметили, что мы прибавляли/вычитали 360° или 2π? Это период для функции синус и косинус.)

Пример 3.



Найти значение $Sin(-\frac{7\pi}{6})$.

Решение:

Переведем для простоты $-\frac{7\pi}{6}$ в градусы (позже, когда вы привыкнете к тригонометрическому кругу, вам не потребуется переводить радианы в градусы):

$$-\frac{7\pi}{6} = -210^{\circ}$$

Двигаться будем по часовой стрелке от точки 0°. Пройдем полкруга (180°) и еще 30°.

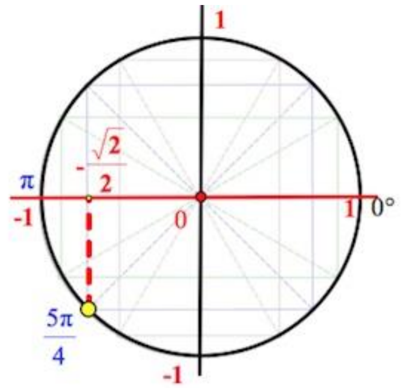
Понимаем, что значение синуса -210° совпадает со значением синуса 30° и равняется $\frac{1}{2}$

$Sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Заметим, если б мы взяли, например, 150°или 510° и т.д., то мы получили бы все тоже значение синуса.

Пример 4.

Найти значение $Cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.



Решение:

Все же, не будем переводить радианы в градусы, как в предыдущем примере.

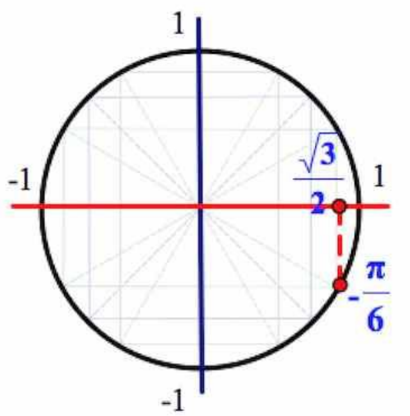
. $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

То есть нам надо пройти против часовой стрелки полкруга и еще четверть полкруга и спроецировать полученную точку на ось косинусов (горизонтальная ось).

$$Cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Пример 5.

Найти значение $Cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$.



Решение:

Как отложить на тригонометрическом круге $-\frac{25\pi}{6}$?

$$-\frac{25\pi}{6} = -(\frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = -(4\pi + \frac{\pi}{6})$$

Если мы пройдем 4π или -4π, да хоть 2014π, мы все равно окажемся в точке, которую мы обозначили как «старт». Поэтому, можно сразу пройти в точку на круге $-\frac{\pi}{6}$

Пример 6.

Найти значение $Cos(-1500^{\circ})$.

Решение:

$-1500^{\circ} = -(60^{\circ} + 4 \cdot 360^{\circ})$.

Мы окажемся в точке -60° ($4 \cdot 360^\circ$ приведет нас все равно в точку ноль). Проецируем точку круга -60° на ось косинусов (смотри тригонометрический круг), попадаем в $\frac{1}{2}$. То есть $Cos(-1500^\circ) = 0{,}5$.

IV Закрепление

№№ 12.1, 12.2, 12.3, 13.1, 13.2.

V Итог урока

Приложение 3.

Упражнения для подготовки к ЕГЭ по разделу «Тригонометрия»

1. Найдите значение выражения $\frac{1}{sin^2 38^0 + sin^2 128^0}$.

2. Найдите значение выражения $\cos^2\frac{31\pi}{50} + \sin^2\frac{31\pi}{50}$.

3. Найти значение $25 sin^2\alpha \cdot cos\alpha$, если $tg\alpha = \frac{3}{4}; 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Найдите значение выражения $\frac{-sin^2\alpha - cos^2\alpha}{2sin^4\alpha} + 1$.

Найдите значение выражения $\frac{8 \cdot cos10° \cdot cos20° \cdot cos80°}{sin80°}$.

Задания для самостоятельного решения

Базовый уровень

1) Упростите выражение $\frac{6sin^2x}{3(1-cos^2x)}$.
2) Упростите выражение $(sin\alpha + cos\alpha)^2 - 1$.
3) Упростите выражение $4sin^2\alpha - 5 + 4cos^2\alpha$.
4) Упростите $\frac{sinx}{2tgx}$.
5) Вычислите без калькулятора $cos^2 45° - sin^2 45°$
6) Вычислите без калькулятора $sin\pi - cos60°$.
7) Упростите выражение $\frac{1 - sin2\alpha}{(cos\alpha - sin\alpha)^2}$.
8) Упростите выражение $cosx + tgx \cdot sinx$.
9) Упростите $\frac{\left(sin\frac{\alpha}{2} + cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 + sin\alpha}$.
10) Упростите выражение $\frac{2sin^2\alpha - 1}{1 - 2cos^2\alpha}$.
11) Найдите $tg^2x + ctg^2x$, если $tgx + ctgx = 2$.
12) Найдите значение выражения 2,5sin2x, если $cosx = \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{\pi}{2} < x < 0$.

13) Вычислите $\frac{cos105°-cos15°}{cos315°}$.

14) Упростите выражение $sin(2\alpha-\pi)+2cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\cdot sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

15) Найдите $sin\ 390°$.

16) Найдите значение выражения $2sin^2\alpha+4-3cos^2\alpha$ если $4sin^2\alpha=1$.

17) Упростить выражение $sin78°\cdot sin48°+cos78°\cdot cos48°$.

18) Упростить выражение $tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot sin(2\pi-\alpha)$.

19) Вычислить $\cos(-\pi)+\sin(-\pi)+tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+ctg\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

20) Упростить $ctg(-\alpha)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(2\pi-\alpha)\cdot\sin(-\alpha)$.

21) Упростить $\sin(\alpha-270°)\cdot tg(180°-\alpha)+\sin(-\alpha)$.

22) Вычислить: а) $\frac{1}{2}tg870°\cdot cos330°+sin^2(-330°)$;

b)$\cos(-600°)+sin300°\cdot ctg510°$;

23) Найти значение выражения $\frac{2-2sin^2x}{2-cos2x}+tgx\cdot ctgx$ при $x=\frac{3\pi}{2}$.

24) Найти значение выражения $\frac{sin2\alpha+\cos(\pi+\alpha)}{sin^2\alpha+\sin(\pi+\alpha)+1-cos^2\alpha}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

25) Вычислить $sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $sin2\alpha=-0{,}2$.

26) Вычислить $\frac{1+cos\frac{\alpha}{2}-sin\frac{\alpha}{2}}{1-cos\frac{\alpha}{2}-sin\frac{\alpha}{2}}$ если $tg\frac{\alpha}{4}=-\frac{1}{2}$.

27) Найти $tg\alpha$ если $\frac{2sin\alpha+3cos\alpha}{sin\alpha-cos\alpha}=4$.

28) Вычислить $2sin\alpha+3cos\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$.

29) Найти решение уравнения $cos\frac{3x}{5}=0$, принадлежащие интервалу $80°<x<270°$

30) Решите уравнение $\sin(x-30°)\cdot cos2x=\sin(x-30°)$.

31) Решите уравнение $sinx\cdot(2sinx-\sqrt{2})$ и найдите сумму его решений на отрезке [0;4].

32) Найдите корни уравнения $sin^2x-cosx=1$ из промежутка [0;2π].

33) Решите уравнение $\frac{cosx}{sinx-1}=0$.

34) Решите уравнение $cos\ 5x - cos\ 3x = sin\ 4x$.

35) Решите уравнение $sin\frac{x}{2}+1=0$.

36) Решите уравнение $\sin(\pi-x)-cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}$.

37) Решите уравнение $sin^2 3x=\frac{3}{4}$.

38) Решите уравнение $cos2x + sinx + 1 = 0$.

39) Решите уравнение $\frac{sin2x}{1+cos2x}=0$.

40) Вычислите $cos\left(arcsin\frac{1}{3}\right)$.

41) Найдите значение выражения $arcsin\left(sin\frac{\pi}{3}\right)+arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

42) Вычислить:

a) $sin\left(\frac{\pi}{2} - arcsin\frac{1}{4}\right)$; b) $cos\left(\pi + arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;

c) $arcctg0 - arcctg(-1) - arctg(-1)$.

43) Вычислить:

a) $sin\left(2arcsin\frac{12}{13}\right)$; b) $cos\left(2arccos\frac{3}{5}\right)$;

c) $cos\left(2arcsin\frac{4}{5}\right)$; d) $sin\left(arctg\frac{2}{3}\right)$.

44) Вычислить:

a) $arcsin\left(sin\frac{71\pi}{4}\right)$; b) $arccos\left(cos\frac{35\pi}{4}\right)$; c) $arctg\left(tg\frac{29\pi}{4}\right)$.

Повышенный уровень

45) Упростить $sin^2\alpha \cdot (cos^4\alpha + sin^4\alpha + tg^2\alpha + 2sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha)$.

46) Упростите $\frac{3sin\alpha - sin3\alpha}{4}$.

47) Найдите значение выражения $\frac{1-cos^2\frac{5\pi}{8}}{sin^2 75° - 1}$.

48) Вычислить $\frac{sin91° - sin1°}{9\sqrt{2}cos46° + \sqrt{2}sin44°}$.

49) $tg\alpha = \frac{4}{5}$, $tg\beta = \frac{1}{9}$, где 180°<α+β<360° . Найти α+β.

50) Вычислите $ctg585° - 2cos1440° + \sqrt{2}sin1125°$.

51) Решите уравнение $tg^3x = \frac{1}{cos^2x} - tgx$.

52) Найти все решения уравнения $2cosx + 1 = \frac{1}{sin^2x} + 1 - ctg^2x$.

53) Найдите наименьший положительный корень уравнения $4cos\ 6x\ cos\ 2x + 2sin24x - 4 = 0$.

54) Сколько корней имеет уравнение $\left(2cos^2\frac{x}{2} - 1\right) \cdot \sqrt{25 - 4x^2} = 0$?

55) Сколько решений имеет уравнение $5sin^2x + \sqrt{3} \cdot sinx \cdot cosx + 6cos^2x = 5$ на промежутке (-3π; 3π) ?

56) Решите уравнение $(x2 - 4x + 1) \cdot arccosx = 0$.

57) Решите уравнение $arcsinx^2 + \arccos(2x + 3) = \frac{\pi}{2}$.

58) Решите уравнение $arcsin(1 - cos2x) = x$.