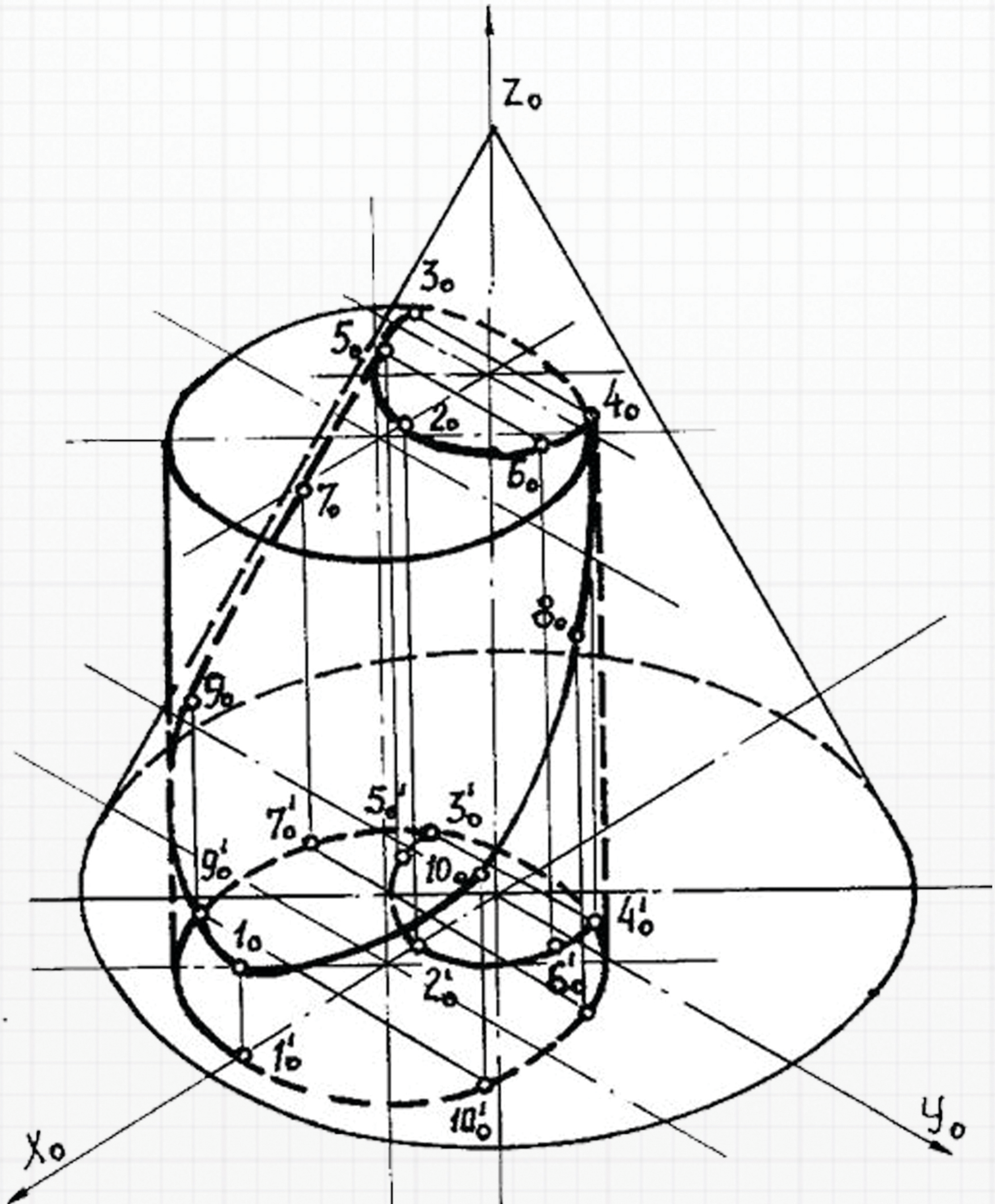
НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Кызыл
2017

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего
образования «Тувинский государственный университет»
Инженерно-технический факультет

Начертательная геометрия

Учебно-методическое пособие

Кызыл
2017

УДК 514.18
ББК 22.151.
Н36

Печатается по решению учебно-методического совета
Тувинского государственного университета

Рецензенты:
1. Сандан А.С. - к.т.н., доцент кафедры ОИД ИТФ ТувГУ.
2. Канков В.В. - главный специалист архитектуры и градостроительства мэрии г. Кызыла

Начертательная геометрия: учебно-методическое пособие для самостоятельного выполнения расчетно-графических работ по дисциплине «Начертательная геометрия» для студентов всех направлений подготовки инженерно-технических специальностей очной и заочной формы обучения / сост. А.П. Очур-оол – Кызыл: Изд-во ТувГУ, 2017. – 136 с.

В методическом пособии рассмотрены следующие темы курса начертательной геометрии: комплексные чертежи фигур; позиционные задачи; метрические задачи; развертки поверхностей; ортогональная аксонометрия. Приведены примеры решения основных задач и даны условия задач, расчетно-графические работы, для самостоятельного решения.

Методическое пособие предназначено для студентов всех направлений подготовки инженерно-технических специальностей очной и заочной формы обучения инженерно-технических специальностей.

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия входит в число дисциплин, составляющих основу инженерного образования. Методы начертательной геометрии находят широкое применение в науке и технике. Изучение данной дисциплины способствует развитию пространственного воображения и навыков логического мышления, необходимых инженеру любой специальности.

Начертательная геометрия – это раздел геометрии, в котором пространственные фигуры изучаются с помощью их изображений на плоскости (чертежей). Разработка методов построения и чтения чертежей, решения геометрических и технических задач является предметом изучения начертательной геометрии. В начертательной геометрии используются графические методы решения задач, поэтому к чертежам предъявляются особые требования – обратимость, точность, наглядность и другие.

Правила построения изображений фигур основано на методе проецирования. Наиболее распространенными в начертательной геометрии являются чертежи, полученные при проецировании фигур на две плоскости – комплексные чертежи в системе двух плоскостей проекций. Под фигурой будем понимать любое множество точек. Изображением точки, которая является элементом фигуры, является пара точек – две связанные между собой проекции точки. Каждой точке пространства соответствует единственная пара точек плоскости чертежа и каждой паре точек плоскости чертежа соответствует единственная точка пространства. Пара точек плоскости чертежа является геометрической моделью точки пространства. Изображения фигур пространства, получаемые методами начертательной геометрии, являются геометрическими моделями этих фигур на плоскости. Между фигурой и ее изображением устанавливается строгая геометрическая связь, что позволяет судить о форме и размерах фигуры по ее изображению.

Задачи в начертательной геометрии обычно делятся на позиционные (задачи на определение общих элементов заданных фигур), метрические (задачи на определение значений геометрических величин – длин отрезков, размеров углов и т.д.) и конструктивные (задачи на построение фигур, удовлетворяющих заданным условиям). Знание элементарной геометрии, методов решения позиционных и метрических задач дает возможность решать и конструктивные задачи.

В данном методическом указании рассмотрены основные темы учебного курса начертательной геометрии: комплексные чертежи фигур; преобразования комплексного чертежа; позиционные и метрические задачи; развертки поверхностей; аксонометрические проекции.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА

A, B, C, D, E … или 1, 2, 3, 4, 5 … – точки в пространстве;

a, b, c, d, e, … – прямые и кривые линии в пространстве;

Δ, Φ, Γ, P, Σ … – плоскости и поверхности в пространстве;

Oxyz – система координат в пространстве;

Ox, Oy, Oz – оси координат;

= – равенство, совпадение;

$\cap$ – пересечение ($b \cap \Sigma = A$ – прямая b пересекает плоскость Σ в точке A, аналогичная запись будет для кривой и поверхности, однако по тексту понятно, о каких фигурах идет речь);

// – параллельность (b // d – прямая b параллельна прямой d);

·/ – скрещиваемость (m ·/ n – прямые m и n скрещиваются);

$\perp$ – перпендикулярность ($e \perp \Sigma$ – прямая e перпендикулярна плоскости Σ);

$\in$ – принадлежность элемента множества данному множеству ($A \in b$ – точка A принадлежит линии b);

$\subset$ – принадлежность подмножества множеству ($n \subset \Sigma$ – линия принадлежит поверхности);

$\neq$, $\notin$, $\not\subset$, … – знаки, обозначающие отрицание указанных выше отношений;

$\rightarrow$ – отображение ($A \rightarrow A_1$ – точка A отображается в точку A_1);

$\Rightarrow$ – знак логического следствия;

Π_1– горизонтальная плоскость проекций (Oxy);

Π_2– фронтальная плоскость проекций (Oxz);

Π_3– профильная плоскость проекций (Oyz);

h – горизонталь (прямая, параллельная плоскости Π_1)

f – фронталь (прямая, параллельная плоскости Π_2);

p – профильная прямая (прямая, параллельная профильной плоскости Π_3);

A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 … или 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1 … – проекции точек на Π_1;

A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 … или 1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2 … – проекции точек на Π_2;

A_3, B_3, C_3, D_3, E_3 … или 1_3, 2_3, 3_3, 4_3, 5_3 … – проекции точек на $П_3$;

a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, … – проекции прямых или кривых линий на $П_1$;

a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, … – проекции прямых или кривых линий на $П_2$;

a_3, b_3, c_3, d_3, e_3, … – проекции прямых или кривых линий на $П_3$;

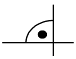
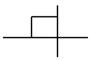
Δ_1, $Ф_1$, $Г_1$, P_1, Σ_1 … – проекции плоскостей и поверхностей на $П_1$;

Δ_2, $Ф_2$, $Г_2$, P_2, Σ_2 … – проекции плоскостей и поверхностей на $П_2$;

Δ_3, $Ф_3$, $Г_3$, P_3, Σ_3 … – проекции плоскостей и поверхностей на $П_3$;

$П_4$, $П_5$, $П_6$, … – новые (дополнительные) плоскости проекций;

x_{14}, x_{25}, … – новые оси ($x_{14} = П_1 \cap П_4$, $x_{25} = П_2 \cap П_5$) или x_1, x_2, x_3, …, если принадлежность осей плоскостям проекций не вызывает сомнений;

 или  – возможные варианты графического обозначения прямого угла на чертеже.

ПОРЯДОК ИЗУЧЕНИЯ КУРСА

При изучении курса начертательной геометрии следует придерживаться следующих общих указаний:

1. Начертательную геометрию нужно изучать строго последовательно и систематически.

2. Студент должен разобраться в теоретическом материале и уметь применять его как общую схему к решению конкретных задач. Свои знания студент должен проверить ответами на вопросы и самостоятельным решением задач.

3. Помощь в изучении курса оказывает конспект лекций, рекомендованная литература и методические указания. Перечень тем дисциплины, рассматриваемых на лекциях и

практических занятиях и необходимых для выполнения заданий контрольной работы, с указанием литературы.

4. Решению задач должно быть уделено особое внимание, так как это наилучшее средство более глубокого и всестороннего изучения основных положений теории. Прежде чем приступить к решению той или иной геометрической задачи, нужно понять ее условие, определить положение в пространстве заданных геометрических образов и составить план решения.

5. Если в процессе изучения курса начертательной геометрии у студента возникли трудности, он обращается за консультацией к преподавателю на кафедру архитектуры, градостроительства и графики ЮЗГУ.

6. К экзамену допускаются студенты, сдавшие контрольную работу и получившие по ней «зачет».

7. В экзаменационном билете студенту предлагается решить две задачи и ответить на один теоретический вопрос. На экзамене необходимо иметь формат А3 чертежной бумаги, карандаши, чертежные инструменты.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Введение. Центральные и параллельные проекции

Краткий исторический очерк. Метод проецирования. Метод центрального проецирования и метод параллельного проецирования, их свойства. Пространственная модель координатных плоскостей проекций. Комплексный чертеж. Обратимость чертежа.

Точка, прямая, плоскость

Ортогональное проецирование точки на две и три плоскости проекций. Прямая. Задание и изображение на чертеже. Положение относительно плоскостей проекций. Следы прямой. Взаимное положение двух прямых.

Плоскость. Задание плоскости на чертеже. Положение относительно плоскостей проекций. Точка и прямая в плоскости. Взаимное положение прямой и плоскости. Взаимное положение двух плоскостей. Главные л инии плоскости. Следы плоскостей. Способ замены плоскостей проекций.

Поверхности

Определение, задание и изображение на чертеже. Классификация. Понятие об определителе и очерке поверхности. Точки и линии на поверхности. Гранные поверхности. Поверхности вращения. Винтовые поверхности. Взаимное пересечение поверхностей. Взаимное пересечение двух поверхностей вращения. Пересечение гранного тела с кривой поверхностью. Частные случаи пересечения поверхностей. Метод сфер (концентрическая и эксцентрическая).

Аксонометрические проекции

Прямоугольная аксонометрия (прямоугольная изометрия и диметрическая изометрия). Косоугольная аксонометрия (фронтальная косоугольная диметрия, фронтальная косоугольная изометрия, горизонтальная косоугольная изометрия)

ОСНОВНАЯ, ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА И РЕСУРСЫ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ»

Основная литература:

1. ГОСТы – Единая система конструкторской документации. М.: Издательство стандартов, 1978 – 1983 гг.
2. Локтев О.В. Краткий курс начертательной геометрии: Учебник. - 4-е изд., стер. - М.: Высшая школа, 2001. - 136 с.
3. Лызлов, А.Н. Начертательная геометрия. Задачи и решения [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Н. Лызлов, М.В. Ракитская, Тихонов-Д.Е. Бугров. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2011. — 88 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=701 - Загл. с экрана.

Дополнительная литература:

1. Талалай, П.Г. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Интернет-тестирование базовых знаний [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2010. — 256 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=615 - Загл. с экрана.

2. Тарасов Б. Ф. Начертательная геометрия [Электронный ресурс] : учебник / Тарасов Б. Ф., Дудкина Л. А., Немолотов С. О. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2012. — 256 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/ books/ element.php? pl1_id=3735 - Загл. с экрана.

3. Корниенко, В.В. Начертательная геометрия [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.В. Корниенко, В.В. Дергач, А.К. Толстихин [и др.]. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2013. — 191 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com /books/element.php?pl1_id=12960 - Загл. с экрана.

4. Очур-оол А.П. Инженерная графика (геометрическое и проекционное черчение): Учебное пособие – Кызыл.: ТывГУ, 2009.-51 с.

5. Фролов, С.А. Сборник задач по начертательной геометрии [Электронный ресурс] – учебное пособие – Электрон. дан. – СПб. – Лань, 2008 – 177 с.с – Режим доступа: http://e.lanbook.com/ books/element. php?pl1_id=556 – Загл. с экрана.

Справочная литература и периодические издания:

1. Левицкий В.С. Машиностроительное черчение и автоматизация выполнения чертежа: Учебник. - 4-е изд., испр. - М.: Высшая школа, 2000. - 422 с.

2. Чекмарев А.А., Осипов В.К. Справочник по машиностроительному черчению. – М.: Высшая школа, 1995. - 671с.

Интернет-ресурсы:

Интернет-источники i-exam.ru, edu.ru и т.д.

ГЛАВА 1. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Аппарат проецирования включает в себя проецирующие лучи, проецируемый объект и плоскость, на которой получается изображение оригинала. Изображение точки **A** на плоскости **П'** - точка **A'** получается в пересечении проецирующего луча, проходящего через точку **A**, с плоскостью **П'**. Все лучи проецирующие геометрическую фигуру, исходят из одной точки **S**, называемой центром проекций (рис. 1.). Если эта точка находится на определенном расстоянии от плоскости проекций, то такое проецирование называется центральным.

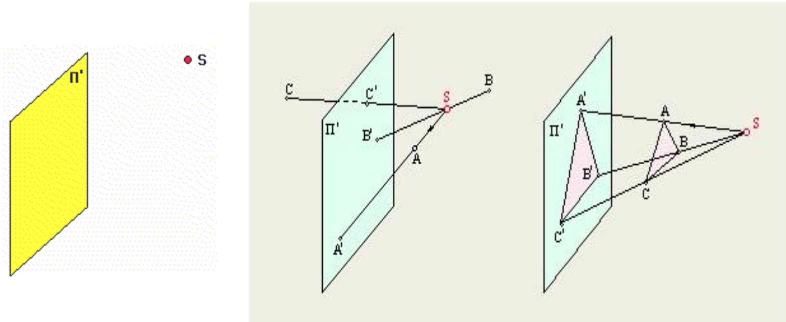


Рис.1.

Если центр проекций удален в бесконечность, то все проецирующие лучи становятся параллельными и проецирование называется параллельным (рис. 1.1). В этом случае задается направление проецирования S. Ортогональное (прямоугольное) проецирование есть частный случай параллельного проецирования, когда все проецирующие лучи перпендикулярны к плоскости проекций П'.

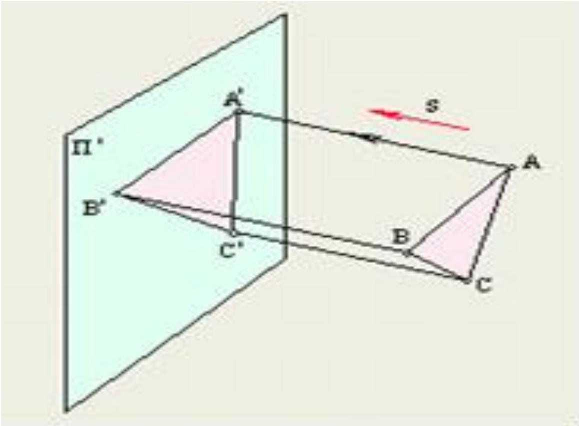


Рис. 1.1.

Ортогональная проекция получила наибольшее распространение в технических чертежах.

Чертежи, полученные рассмотренными методами проецирования, не обладают свойством обратимости, т.е. по данному чертежу воспроизвести оригинал не решается однозначно.

Основные свойства параллельного проецирования

1. Свойство *однозначности*. Проекцией точки на плоскость есть точка.

2. Свойство *прямолинейности*. Проекцией прямой линии на плоскость есть прямая.

3. Свойство *принадлежности*. Если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит проекции этой линии.

4. Свойство сохранения *параллельности*. Проекциями параллельных прямых являются параллельные прямые.

5. Свойство *деления отрезка в отношении*. Если отрезок прямой линии делится точкой в каком-либо отношении, то и проекция отрезка делится проекцией точки в том же отношении.

6. Свойство *параллельного переноса*. Проекция фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций.

Три последние свойства обеспечивают более простое построение изображения и меньше искажают форму и размеры оригинала по сравнению с центральной проекцией.

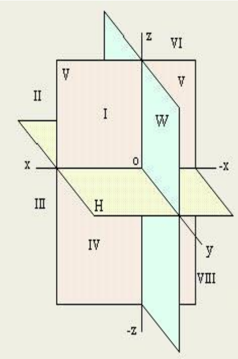
1.1. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ

Изображение фигуры, полученное при проецировании фигуры на плоскость, дает информацию о фигуре. Однако эта информация является неполной. По изображению на плоскости нельзя восстановить фигуру и ее положение в пространстве, т.е. чертеж, содержащий одну проекцию фигуры, необратим. Одним из методов, позволяющих добиться обратимости чертежа, является увеличение числа плоскостей проекций.

1.2. Комплексный чертеж точки (эпюр точки)

Комплексный чертеж (эпюр) точки состоит из двух или трех ортогональных проекций. Эти проекции получают на взаимно перпендикулярных плоскостях проекций. Одна из плоскостей проекций **$П_1$(H)** называется *горизонтальной* плоскостью проекций, вторая **$П_2$(V)** - *фронтальной*, а третья **$П_3$(W)** - *профильной*.

Линии пересечения плоскостей проекций называются *осями координат* **x**, **y**, **z**. Плоскости проекций делят пространство на **8** трехгранных углов - *четверти* или *октанты* (рис. 1.2). Система знаков соответствует "правой системе" координат, принятой в большинстве европейских стран. Зритель, рассматривающий оригинал, находится в первом октанте.



Октанты	Знаки координат		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	–	+
III	+	–	–
IV	+	+	–
V	–	+	+
VI	–	–	+
VII	–	–	–
VIII	–	+	–

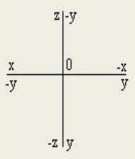


Рис. 1.2.

Спроецируем точку **А** на плоскости проекций **П$_1$**, **П$_2$** и **П$_3$** (рис. 1.3). Точка **А'** называется *горизонтальной проекцией* точки **А**, точка **А"** – ее *фронтальная проекция*, точка **А'''** – ее *профильная проекция*. Расстояние **АА'** точки **А** от плоскости **П$_1$** называется *высотой* точки **А** (**z_a**- аппликата), ее расстояние **АА"** от плоскости **П$_2$** – *глубиной* точки **А** (**y_a** - ордината), а расстояние **АА'''** от плоскости **П$_3$** – *широтой* точки А (**x_a** - абсцисса). Таким образом, какая-либо точка пространства А будет определяться тремя ее координатами: **А** (**x**, **y**, **z**).

Чтобы получить плоский чертеж точки **А,** плоскости **П$_1$** и **П$_3$** вращают до совмещения с плоскостью **П$_2$**. Прямые **А'А"** и **А"А'''**, соединяющие проекции точки **А**, называются *линиями связи* и соответственно перпендикулярны к осям **x** и **z**. Проекции точки **А** определяются координатами: **А'** (**x**,**y**), **А"** (**x**,**z**), **А'''** (**y**,**z**).

Полученный эпюр точки будет *обратимым чертежом*.

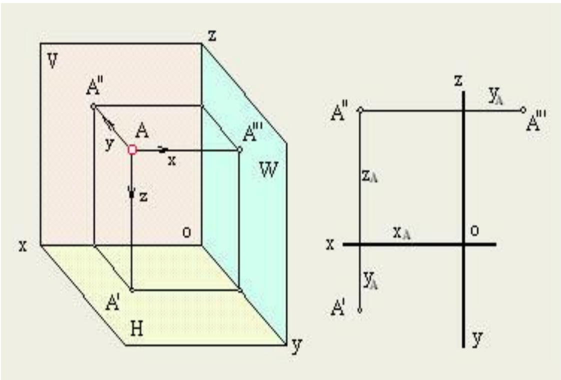


Рис. 1.3 Построение плоского чертежа точки **А**

1.3. Комплексный чертеж прямой

Прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения. Прямая, параллельная хотя бы одной из плоскостей проекций, называется прямой частного положения.

Провести прямую на чертеже невозможно, так как она неограниченна и не имеет определенной длины. Обычно прямая задается на чертеже отрезком и предполагается, что отрезок при необходимости можно продолжить. При проецировании прямой e на горизонтальную плоскость проекций П1 получим прямую e1, при проецировании прямой e на фронтальную плоскость проекций П2 получим прямую e2. Прямая e1 – это горизонтальная проекция прямой e, прямая e2 – фронтальная проекция прямой e (рис. 1.4).

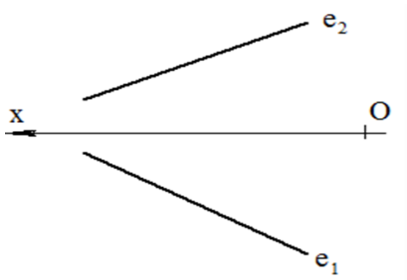


Рис. 1.4

Условимся, на комплексном чертеже в системе ($П_1$ $П_2$), оси y и z не показывать. Запись $e(e_1, e_2)$ означает, что прямая e на чертеже задана проекциями e_1 и e_2. Такая запись используется не только для прямой, но и для любой фигуры. Прямая e является прямой общего положения. Убедимся в этом, рассмотрев комплексные чертежи прямых частного положения (рис. 1.5).

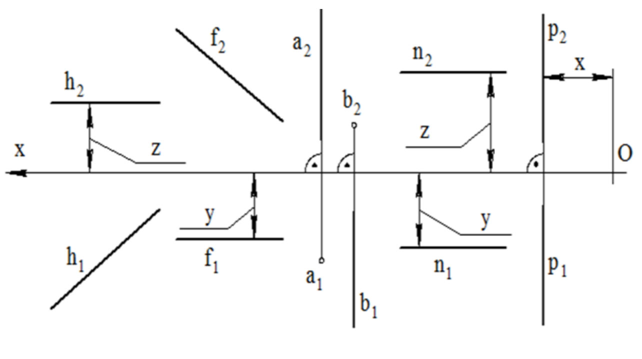


Рис. 1.5

Прямая h, параллельная горизонтальной плоскости проекций $П_1$, называется горизонталью. Расстояние от каждой точки горизонтали h до $П_1$ одинаковы, так как h // $П_1$. Эти расстояния присутствуют на фронтальной плоскости проекций (координатные отрезки z для каждой точки прямой). Поэтому фронтальная проекция горизонтали параллельна оси x, то есть h_2 // x .

Прямая f, параллельная фронтальной плоскости проекций $П_2$, называется фронталью. Расстояния от каждою точки f до $П_2$ одинаковы. Эти расстояния присутствуют на горизонтальной плоскости проекций (координатные отрезки y для каждой точки прямой). Поэтому f_1 // x .

Прямая a, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $П_1$, называется горизонтально проецирующей прямой. На $П_1$ она проецируется в точку. Так как прямая a параллельна оси z , то a_2 параллельна оси z на $П_2$. Прямая a не только горизонтально проецирующая прямая, но также является фронталью, так как a // $П_2$.

Прямая b, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций $П_2$, называется фронтально проецирующей прямой. На $П_2$ она проецируется в точку. Прямая b также является горизонталью.

Прямые, параллельные плоскостям проекций, называются прямыми уровня, или линиями уровня. Прямая n, параллельная $П_1$ и $П_2$, может быть названа прямой двойного уровня (n_1 // x, n_2 // x), кроме того n параллельна оси x.

На комплексном чертеже в системе ($П_1$ $П_2$ $П_3$) прямыми частного положения, кроме рассмотренных выше прямых, будут прямые параллельные плоскости $П_3$ – профильные прямые. На рис. 2.4 показаны проекции p_1 и p_2 профильной прямой, у точек этой прямой одинаковы координатные отрезки x. При построении на комплексном чертеже профильной прямой необходимо задавать профильную проекцию этой прямой. Заметим, что прямая n на комплексном чертеже в системе ($П_1П_2П_3$) называется профильно проецирующей прямой, ее проекцией на $П_3$ будет точка.

Комплексные чертежи прямых частного положения обладают ярко выраженными особенностями – у прямых уровня есть проекция, параллельная оси координат, у проецирующих прямых одна проекция – точка. Прямая **е** (рис. 1.4) не обладает этими особенностями, поэтому является прямой общего положения.

Поскольку через две точки проходит единственная прямая, то прямую можно задать двумя точками. От такого задания прямой легко перейти к заданию прямой отрезком. Действительно, соединив по линейке горизонтальные проекции точек, получим горизонтальную проекцию отрезка, соединив фронтальные проекции точек, получим фронтальную проекцию отрезка. Если даны горизонтальная и фронтальная проекции прямой, то для того, чтобы построить профильную проекцию прямой, необходимо построить профильные проекции двух любых точек этой прямой и провести через них профильную проекцию прямой (точнее, профильную проекцию отрезка, задающего прямую).

Обратим внимание на одно свойство линий уровня. Отрезок, расположенный на линии уровня, проецируется в равный ему отрезок на ту плоскость проекций, которой параллельна линия уровня. Например, отрезок на горизонтали проецируется на горизонтальную плоскость проекций в равный ему отрезок, т.е. в натуральную величину (рис. 1.2, $\alpha = 0$).

1.4. Комплексный чертеж плоскости

Плоскость, не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется плоскостью общего положения. Плоскость, перпендикулярная хотя бы одной из плоскостей проекций, называется плоскостью частного положения.

Построить комплексный чертеж всех точек плоскости невозможно, т.к. множество точек плоскости бесконечно и неограниченно (расстояние между двумя точками плоскости может принимать какие угодно большие значения). Для того чтобы построить комплексный чертеж плоскости, поступим так же, как поступили при построении комплексного чертежа прямой. Будем строить комплексный чертеж части плоскости. Конечно, любая часть (кусок) плоскости задаст плоскость на чертеже, но наиболее простой и удобной частью плоскости для этой цели является треугольник.

Пусть в плоскости Σ взят треугольник ABC. При проецировании ΔABC на Π_1 получим $\Delta A_1B_1C_1$, при проецировании на Π_2 – $\Delta A_2B_2C_2$ (рис. 1.6). Можно сказать, что сначала построили комплексные чертежи вершин треугольника, а затем одноименные проекции вершин соединили отрезками, которые являются проекциями сторон треугольника. При этом линии проекционной связи (A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2) перпендикулярны оси x. Таким образом, на рис. 1.6 приведен комплексный чертеж плоскости Σ, заданной треугольником ΔABC. Для плоскости Σ, заданной треугольником ΔABC, будем использовать обозначения: $\Sigma(\Delta ABC)$; (ΔABC).

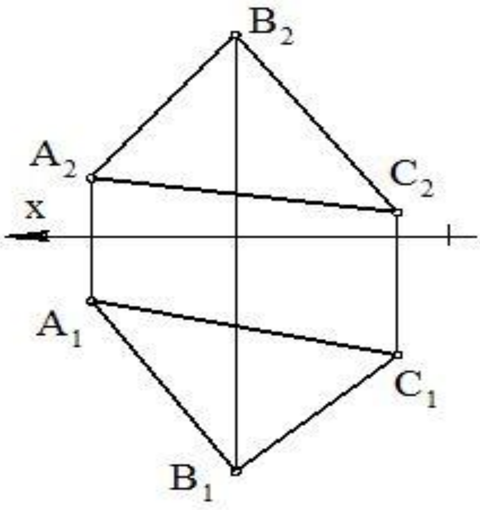


Рис.1.6

Плоскость Σ (рис. 1.6) является плоскостью общего положения. Убедимся в этом, рассмотрев комплексные чертежи плоскостей частного положения (рис. 1.7).

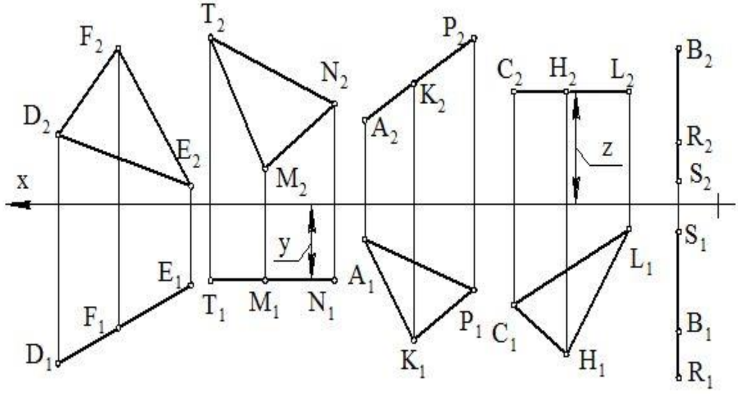


Рис.1.7

Плоскость Г(ΔDFE), перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $П_1$, называется горизонтально проецирующей плоскостью. На $П_1$ плоскость Г проецируется в прямую линию, которая является линией пересечения Г и $П_1$. Для любой точки плоскости Г прямая, проецирующая эту точку на $П_1$, находится в плоскости Г. Все точки плоскости Г проецируются на линию пересечения Г и $П_1$. Треугольник DFE на $П_1$ проецируется в отрезок, а на $П_2$ – в треугольник. Отрезок на $П_1$ задает прямую, в которую проецируется плоскость Г.

Плоскость (ΔTNM) тоже горизонтально проецирующая, так как ее горизонтальная проекция – прямая, заданная отрезком T_1M_1. Отрезок T_1M_1 параллелен оси x. Это значит, что у всех точек плоскости (ΔTNM) координата y одинакова, т.е. плоскость параллельна фронтальной плоскости проекций $П_1$. Такая плоскость называется фронтальной плоскостью уровня, или фронтальной плоскостью.

Плоскость (AKF) перпендикулярна $П_2$ и называется фронтально проецирующей плоскостью. На фронтальную плоскость проекций эта плоскость проецируется в прямую, заданную отрезком A_2P_2.

Фронтально проецирующая плоскость (ΔCHL) параллельна горизонтальной плоскости проекций, так как координата z у всех точек этой плоскости одинакова (C_2L_2 // x).

Такая плоскость называется горизонтальной плоскостью уровня, или горизонтальной плоскостью.

Плоскость (ΔBRC) перпендикулярна $П_1$ и $П_2$, эта плоскость перпендикулярна оси x. В системе ($П_1П_2П_3$) она называется профильной плоскостью уровня, или профильной плоскостью, так как (ΔBRC) // $П_3$ (координата x всех точек плоскости одинакова).

В системе ($П_1П_2П_3$), плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций $П_3$, называется профильно проецирующей плоскостью. Профильная проекция такой плоскости – прямая.

У плоскостей частного положения хотя бы одна проекция – прямая линия. Плоскость Σ (рис. 1.7) не обладает этой особенностью, поэтому является плоскостью общего положения.

Плоскость может быть задана не только треугольником. Для задания плоскости можно использовать три точки, две параллельные прямые, две пересекающиеся прямые, точку и прямую, так как через любую из этих фигур проходит единственная плоскость. Конечно, рассматривать такую фигуру как часть плоскости уже нельзя. От одного способа задания плоскости можно перейти к любому другому. Например, если плоскость задана параллельными прямыми, то, взяв на одной прямой две точки, а на другой прямой – одну точку и соединив эти точки отрезками, перейдем к заданию плоскости треугольником.

Для того чтобы от комплексного чертежа плоскости в системе ($П_1П_2$) перейти к комплексному чертежу плоскости в системе ($П_1П_2П_3$), необходимо построить профильную проекцию фигуры, задающей плоскость.

ГЛАВА 2
ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ, ИХ ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ПЛОСКОСТИ

2.1. Взаимное положение точки и прямой. Деление отрезка прямой в данном отношении

Точка может принадлежать прямой и может не принадлежать прямой. Пусть точка А принадлежит прямой e (А $\in$ e). При проецировании прямой и точки на плоскость $П_1$ получим, что горизонтальная проекция точки принадлежит горизонтальной проекции прямой $A_1 \in e_1$. Аналогично и при проецировании на $П_2$ – $A_2 \in e_2$. Таким образом, если точка принадлежит прямой, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям прямой. Справедливо и обратное утверждение: если проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой, то точка принадлежит прямой. На рис. 2.1 точка А принадлежит прямой **e**, а остальные точки не принадлежат прямой e.

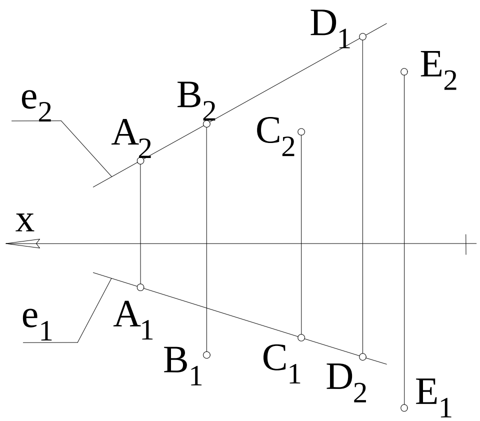


Рис. 2.1

Для определения принадлежности точки профильной прямой, необходимы профильные проекции точки и прямой.

При проецировании отрезка AB на $П_1$ получим отрезок A_1B_1, при проецировании на $П_2$ – A_2B_2. На рис. 2.2 показан комплексный чертеж отрезка AB.

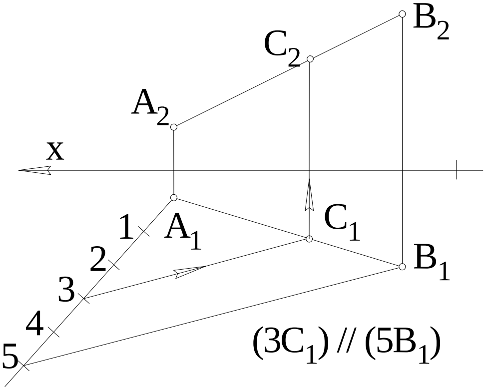


Рис. 2.2

Поскольку отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, при проецировании не меняется, **то** для деления отрезка в данном отношении достаточно разделить в этом отношении одну проекцию отрезка, и это полностью определит точку деления. На рис. 3.2 показано построение точки C, делящей отрезок AB в отношении $|AC| : |CB| = 3 : 2$. На основе теоремы Фалеса в отношении 3 : 2 делим горизонтальную проекцию отрезка, т.е. $|A_1C_1| : |C_1 B_1| = 3 : 2$. Так находим точку C_1. Затем по линии проекционной связи находим C_2. Точка C_2 делит фронтальную проекцию отрезка в том же отношении $|A_2C_2| : |C_2 B_2| = 3 : 2$ (по теореме Фалеса, так как линии проекционной связи всех точек параллельны). На рис. 3.2 последовательность построений показана стрелкой на линии проекционной связи – сначала строится C_1, а затем C_2.

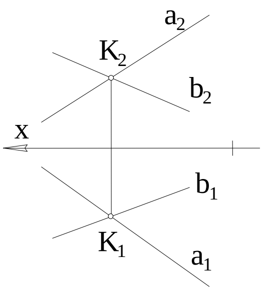
2.2. Взаимное положение прямых

В пространстве две прямые могут совпадать, пересекаться, быть параллельными, скрещиваться.

У совпавших прямых все точки совпадают, поэтому эти прямые будут иметь совпавшие одноименные проекции. По сути, это одна прямая, обозначенная по-разному.

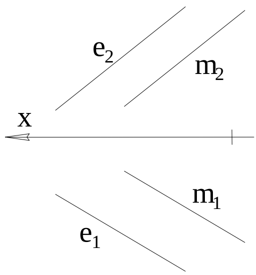
Пересекающиеся прямые имеют одну общую точку. Пусть прямые общего положения a и b пересекаются в точке K ($a \cap b = K$). Пересекающиеся прямые в общем случае проецируются в пересекающиеся прямые. Точка K – реально существующая точка, и ее проекции находятся на линии проекционной связи (K_1K_2), перпендикулярной оси x (рис. 2.3).

Параллельные прямые расположены в одной плоскости и не имеют общих точек. Параллельные прямые в общем случае проецируются в параллельные прямые (пятое свойство ортогонального проецирования). На рис. 2.4 показан комплексный чертеж параллельных прямых e и m. При проецировании этих прямых на Π_1 получим $e_1 // m_1$, при проецировании на Π_2 – $e_2 // m_2$.



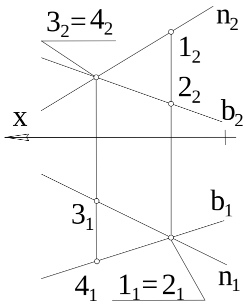
$a \cap b = K$

Рис. 2.3



$e // m$

Рис. 2.4



n ·/ b

Рис. 2.5

Прямые, не лежащие в одной плоскости, называются скрещивающимися. Эти прямые не параллельны и не пересекаются. Пример комплексного чертежа скрещивающихся прямых n и b показан на рис. 2.5 (n ·/ b). Горизонтальные и фронтальные проекции этих прямых пересекаются. Но точки их пересечения не лежат на одной линии проекционной связи. В точке пересечения горизонтальных проекций совпали проекции двух точек $1 \in n$ и $2 \in b$. Это горизонтально конкурирующие точки. Координаты x и y этих точек равны, а координата z точки 1 больше, чем z точки 2. В точке пересечения фронтальных проекций этих прямых совпали проекции двух точек $3 \in n$ и $4 \in b$. Это фронтально конкурирующие точки. Координаты x и z этих точек равны, а координата y точки 4 больше, чем y точки 3. Скрещивающиеся прямые могут проецироваться на одну плоскость проекций в параллельные прямые, а на другую плоскость проекций – пересекающиеся прямые.

Если хотя бы одна из прямых является профильной прямой, то для определения взаимного положения прямых нужно построить профильные проекции этих прямых.

При рассмотрении комплексных чертежей любых фигур необходимо мысленно представлять эти фигуры в пространстве и их положение относительно плоскостей проекций.

2.3. Принадлежность точки и прямой плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой этой плоскости.

Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат плоскости.

Эти два вполне очевидных предложения часто называют условиями принадлежности точки и прямой плоскости.

На рис. 3.6 плоскость общего положения задана треугольником ABC. Точки A, B, C принадлежат этой плоскости, так как являются вершинами треугольника из этой плоскости. Прямые (AB), (BC), (AC) принадлежат плоскости, так как по две их точки принадлежат плоскости. Точка N принадлежит (AC), D принадлежит (AB), E принадлежит (CD) и, значит, точки N и E принадлежат плоскости (ΔABC), тогда прямая (NE) принадлежит плоскости (ΔABC).

Если задана одна проекция точки L, например L_2, и известно, что точка L принадлежит плоскости (ΔABC), то для нахождения второй проекции L_1 последовательно находим (A_2L_2), K_2, (A_1K_1), L_1.

Если условие принадлежности точки плоскости нарушено, то точка не принадлежит плоскости. На рис. 2.6 точка R не принадлежит плоскости (ΔABC), так как R_2 принадлежит (F_2K_2), а R_1 не принадлежит (A_1K_1).

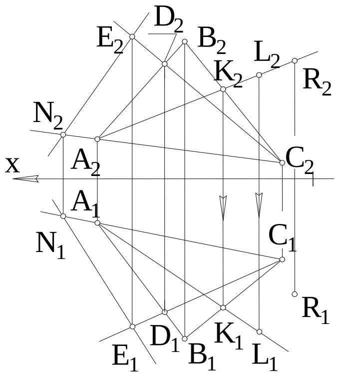


Рис. 2.6

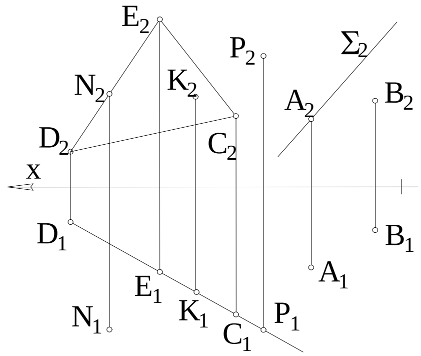


Рис. 2.7

На рис. 2.7 приведен комплексный чертеж горизонтально проецирующей плоскости (ΔCDE). Точки K и P принадлежат этой плоскости, так как P_1 и K_1 принадлежат прямой (D_1C_1), являющейся горизонтальной проекцией плоскости (ΔCDE). Точка N не принадлежит плоскости, так как N_1 не принадлежит (D_1C_1).

Все точки плоскости (ΔCDE) проецируются на Π_1 в прямую (D_1C_1). Это следует из того, что плоскость (ΔCDE) $\perp$ Π_1. В этом же можно убедиться, если проделать для точки P (или любой другой точки) построения, которые были сделаны для точки L (рис. 2.6). Точка P_1 попадет на прямую (D_1C_1). Таким образом, для того, чтобы определить принадлежность точки горизонтально проецирующей плоскости, фронтальная проекция ($\Delta C_2D_2E_2$) не нужна. Поэтому в дальнейшем проецирующие плоскости будут задаваться только одной проекцией (прямой линией). На рис. 2.7 показана фронтально проецирующая плоскость Σ, заданная фронтальной проекцией Σ_2, а также точки $A \in \Sigma$ и $B \notin \Sigma$.

Взаимное положение точки и плоскости сводится к принадлежности или не принадлежности точки плоскости.

При решении многих задач приходится строить линии уровня, принадлежащие плоскостям общего и частного положения. На рис. 2.8 показаны горизонталь h и фронталь f, принадлежащие плоскости общего положения (ΔABC). Фронтальная проекция h_2 параллельна оси x, поэтому прямая h – горизонталь. Точки 1 и 2 прямой h принадлежат плоскости, поэтому прямая h принадлежит плоскости. Таким образом, прямая h – это горизонталь плоскости (ΔABC). Обычно порядок построения такой: h_2; 1_2, 2_2; 1_1, 2_1; $(1_1 2_1) = h_1$. Фронталь f проведена через точку A. Порядок построения: $f_1 \parallel x$, $A_1 \in f_1$; 3_1, 3_2; $(A_2 3_2) = f_2$.

На рис. 2.9 показаны проекции горизонтали и фронтали для фронтально проецирующей плоскости Σ и горизонтально проецирующей плоскости Г. В плоскости Σ горизонталь является фронтально проецирующей прямой и проходит через точку A (попытайтесь представить горизонталь как линию пересечения Σ и плоскости, проходящей через точку A параллельно Π_1). Фронталь проходит через точку C. В плоскости Г горизонталь и фронталь проведены через одну точку D. Фронталь является горизонтально проецирующей прямой.

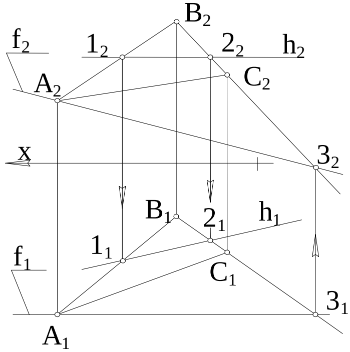


Рис. 2.8

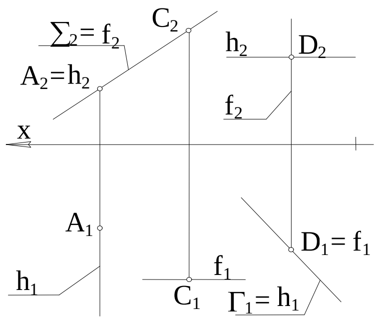


Рис. 2.9

Из рассмотренных выше построений следует, что линию уровня в плоскости можно провести через любую точку этой плоскости.

Совпадение плоскостей можно трактовать как принадлежность одной плоскости другой. Если три точки одной плоскости принадлежат другой плоскости, то эти плоскости совпадают. Упомянутые три точки не должны лежать на одной прямой. На рис. 2.10 плоскость (ΔDNE) совпадает с плоскостью Σ(ΔABC), так как точки D, N, E принадлежат плоскости Σ(ΔABC).

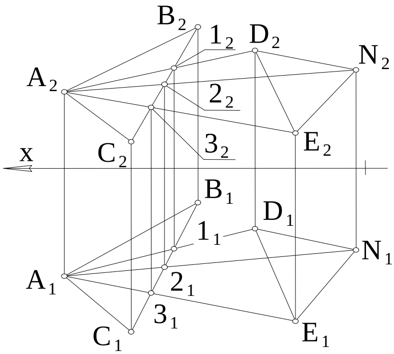


Рис. 2.10

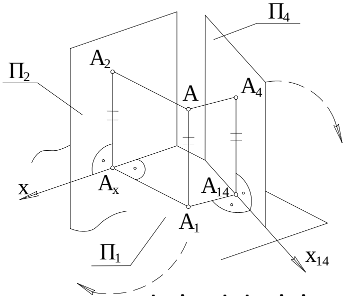
Обратим внимание на то, что плоскость Σ, заданная ΔABC, теперь может быть задана ΔDNE. Любая плоскость может быть задана линиями уровня. Для этого необходимо через точку плоскости Σ(ΔABC) (например, через точку A) провести в плоскости горизонталь и фронталь, которые и будут задавать плоскость Σ (на рис. 3.10 построения не показаны). Последовательность построения горизонтали: h_2 // x ($A_2 \in h_2$); $K_2 = h_2 \cap B_2C_2$; $K_1 \in B_1C_1$ ($K_2K_1 \perp x$); $A_1K_1 = h_1$. Последовательность построения фронтали: f_1 // x ($A_1 \in f_1$); $L_1 = f_1 \cap B_1C_1$; $L_2 \in B_2C_2$ ($L_1L_2 \perp x$); $A_2L_2 = f_2$. Можно записать Σ(ΔABC) = Σ(h, f).

ГЛАВА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

В курсе начертательной геометрии под преобразованием комплексного чертежа фигуры обычно понимается его изменение, вызванное перемещением фигуры в пространстве, или введением новых плоскостей проекций, или использованием других видов проецирования. Применение различных методов (способов) преобразования комплексного чертежа упрощает решение многих задач.

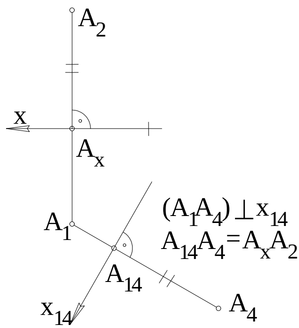
3.1. Метод замены плоскостей проекций

Метод замены плоскостей проекций состоит в том, что вместо одной из плоскостей проекций вводится новая плоскость, перпендикулярная к другой плоскости проекций. На рис. 3.1 показана пространственная схема получения комплексного чертежа точки A в системе ($\Pi_1\Pi_2$). Точки A_1 и A_2 – горизонтальная и фронтальная проекции точки A, $AA_1A_xA_2$ – прямоугольник, плоскость которого перпендикулярна оси x.



$A_{14}A_4 = A_1A = A_xA_2$

Рис. 3.1



$(A_1A_4) \perp x_{14}$
$A_{14}A_4 = A_xA_2$

Рис. 3.2

Новая плоскость Π_4 перпендикулярна Π_1. При проецировании точки A на Π_4 получим новую проекцию A_4, фигура $AA_1A_{14}A_4$ – прямоугольник, плоскость которого перпендикулярна новой оси $x_{14} = \Pi_4 \cap \Pi_1$. Для получения комплексного чертежа будем рассматривать фигуры, расположенные в плоскостях проекций. Поворотом вокруг оси

x_{14} совместим $П_4$ с $П_1$, затем поворотом вокруг оси x совместим $П_1$ (и $П_4$) с $П_2$ (на рис. 3.1 направления движения плоскостей $П_4$ и $П_1$ показаны штриховыми линиями со стрелками). Полученный чертеж приведен на рис. 3.2. Прямые углы на рис. 3.1, 3.2 помечены дугой с точкой, равные отрезки помечены двумя штрихами (противоположные стороны прямоугольников на рис. 3.1). От комплексного чертежа точки A в системе ($П_1П_2$) перешли к комплексному чертежу точки A в системе ($П_1П_4$), заменили плоскость $П_2$ на плоскость $П_4$, заменили A_2 на A_4.

На основе этих построений сформулируем правило замены плоскостей проекций (правило получения новой проекции). Через незаменяемую проекцию проводим новую линию проекционной связи перпендикулярно новой оси, затем от новой оси по линии проекционной связи откладываем отрезок, длина которого равна расстоянию от заменяемой проекции до старой оси, полученная при этом точка и есть новая проекция. Направление новой оси будем брать произвольно. Новое начало координат указывать не будем.

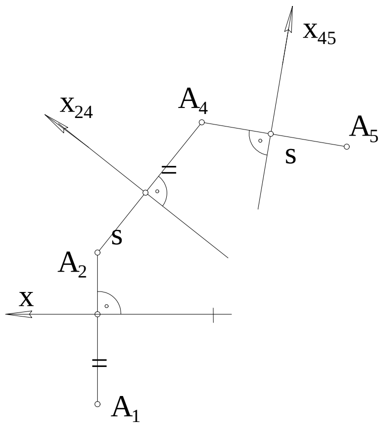


Рис. 3.3

На рис. 3.3 показан переход от комплексного чертежа в системе ($П_1П_2$) к комплексному чертежу в системе ($П_2П_4$), а затем еще один переход к комплексному чертежу в системе ($П_4П_5$). Вместо плоскости $П_1$ введена плоскость $П_4$, перпендикулярная $П_2$, затем вместо $П_2$ введена плоскость $П_5$, перпендикулярная $П_4$. Используя правило замены плоскостей проекций, можно выполнить любое количество замен плоскостей проекций.

3.2. Определение расстояния между двумя точками

Расстоянием между двумя точками называется длина отрезка, соединяющего эти точки. Для определения расстояния между двумя точками А и В необходимо соединить их отрезком АВ (рис. 3.4), затем узнать длину этого отрезка. Отрезок общего положения не параллелен ни одной из плоскостей проекций. Длины проекций A_1B_1 и A_2B_2 меньше длины отрезка АВ. Для того чтобы узнать длину отрезка АВ, необходимо спроецировать его в натуральную величину и измерить эту проекцию, так как она равна отрезку АВ.

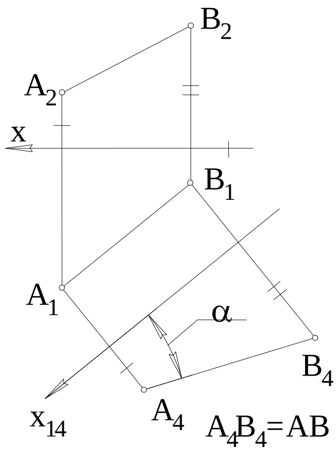


Рис. 3.4

Введем новую плоскость проекций $П_4$ параллельно отрезку АВ и перпендикулярно $П_1$. При этом новая ось x_{14} будет параллельна A_1B_1 (в противном случае прямая АВ и плоскость $П_4$ пересекутся). Угол наклона отрезка АВ к плоскости $П_4$ равен нулю, и АВ на $П_4$ проецируется в натуральную величину, т.е. A_4B_4 = АВ. Измерив отрезок A_4B_4, получим длину отрезка АВ.

Каждая из точек A_4 и B_4 строилась с использованием правила замены плоскостей проекций. Расстояние между A_1B_1 и x_{14} не влияет на величину A_4B_4, и поэтому может быть взято произвольно. В результате введения $П_4$ выполнен переход от системы ($П_1П_2$) к системе ($П_1П_4$), в которой прямая АВ, проходящая через отрезок АВ, является линией уровня.

На плоскости $П_4$ (рис. 4.4) кроме A_4B_4 = АВ получили угол α, который равен углу между АВ и плоскостью $П_1$, так как плоскость этого угла параллельна плоскости $П_4$. Если ввести новую плоскость $П_5$ параллельно АВ и перпендикулярно $П_2$, то новая ось x_{25} будет параллельна A_2B_2. Получим A_5B_5 = АВ и угол β, который равен углу между AB и плоскостью $П_2$, так как плоскость этого угла параллельна плоскости $П_5$.

3.3. Проецирование прямой общего положения в точку на новую плоскость проекций

Придание фигурам частного положения относительно плоскостей проекций значительно облегчает решение многих задач. Для того чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций стала проецирующей прямой, необходимо, чтобы новая плоскость проекций была перпендикулярна прямой. Прямая на эту плоскость с проецируется в точку. Плоскость, перпендикулярная прямой общего положения, является плоскостью общего положения. Введение такой плоскости в качестве новой плоскости проекций невозможно, так как новая плоскость проекций должна быть перпендикулярна одной из старых плоскостей проекций. Таким образом, решить задачу проецирования прямой общего положения в точку одной заменой плоскости проекций нельзя. Поэтому попытаемся решить задачу сначала для прямой частного положения, а именно – для прямой уровня.

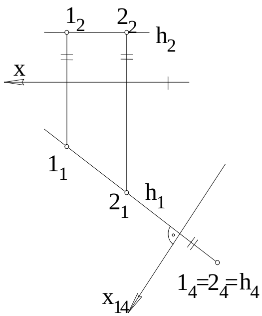


Рис. 3.5

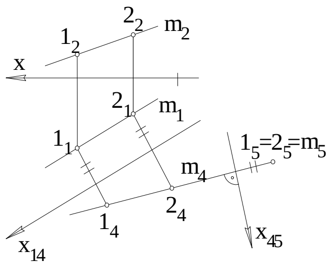


Рис. 3.6

Пусть $h(h_1,\ h_2)$ – горизонталь (рис. 3.5). Введем новую плоскость проекций $П_4$ перпендикулярно h. Поскольку h параллельна $П_1$, то $П_4$ будет перпендикулярна $П_1$. Плоскость $П_4$

может быть взята в качестве новой плоскости проекций и на нее h проецируется в точку. Новая ось x_{14} перпендикулярна проекции h_1, так как h_1 параллельна h и, значит, перпендикулярна $П_4$ и x_{14}. Для построения новой проекции горизонтали построим новые проекции двух ее точек 1 и 2. Новые проекции этих точек, построенные по правилу замены плоскостей проекций, совпадают. Так как точки 1 и 2 взяты произвольно, то проекции остальных точек горизонтали тоже совпадут, т.е. горизонталь проецируется на $П_4$ в точку.

Используя решение задачи проецирования линии уровня в точку, можно выполнить проецирование прямой общего положения m в точку (рис. 3.6). Введем новую плоскость проекций $П_4$ параллельно прямой m и перпендикулярно $П_1$. Новая ось x_{14} параллельна горизонтальной проекции m_1. По новым проекциям двух произвольных точек 1 и 2 прямой m находим m_4. В новой системе плоскостей ($П_1П_4$) прямая m является линией уровня, она параллельна $П_4$ (при этом m_1 параллельна x_{14}). Теперь, используя решение предыдущей задачи (рис. 3.5), проецируем прямую m в точку. Для этого вводим новую плоскость проекций $П_5$ перпендикулярно прямой m и перпендикулярно $П_4$. Прямая m на $П_5$ проецируется в точку. В новой системе плоскостей проекций ($П_4П_5$) прямая m является проецирующей прямой.

3.4. Проецирование плоскости общего положения в прямую на новую плоскость проекций. Нахождение натуральной величины плоской фигуры

Если спроецировать какую - либо прямую m, принадлежащую плоскости общего положения Σ, в точку, то плоскость Σ спроецируется на эту же плоскость проекций в прямую линию. Действительно, прямая m перпендикулярна плоскости проекций и, значит, плоскость Σ проходит через перпендикуляр к плоскости проекций и тоже ей перпендикулярна. Плоскость Σ является проецирующей плоскостью и на плоскость проекций проецируется в прямую. Если m – прямая общего положения, то для проецирования ее в точку потребуются две замены плоскостей проекций (рис. 3.6). Если m – прямая уровня, то для ее проецирования в точку потребуется одна замена плоскостей проекций (рис. 3.5).

Пусть Σ – плоскость общего положения, заданная треугольником ABC (рис. 3.7). В плоскости Σ проведем горизонталь h, спроецируем горизонталь h в точку h_4 на плоскость Π_4 ($x_{14} \perp h_1$, $\Pi_4 \perp h$), построим новые проекции точек A_4, B_4, C_4. Плоскость Σ проецируется в прямую, проходящую через точки A_4, B_4, C_4. Плоскость Σ в системе ($\Pi_1\Pi_4$) является проецирующей плоскостью, она перпендикулярна Π_4. Треугольник ABC проецируется на Π_4 в отрезок B_4C_4.

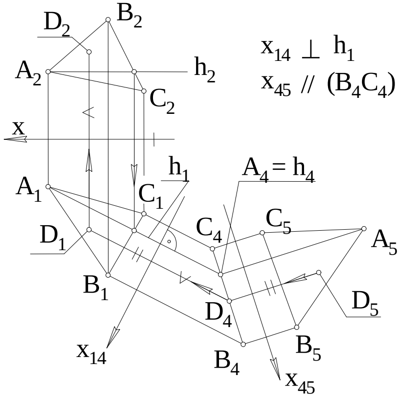


Рис. 3.7

Для нахождения натуральной величины треугольника ABC введем плоскость проекций Π_5 параллельно плоскости треугольника и перпендикулярно Π_4. Новая ось x_{45} параллельна отрезку D_4C_4 (в противном случае Σ и Π_5 пересекутся). Треугольник ABC проецируется на плоскость Π_5 в натуральную величину $\Delta A_5B_5C_5 = \Delta ABC$. Аналогично находится натуральная величина любой плоской фигуры. Плоскость Σ в системе ($\Pi_4\Pi_5$) является плоскостью уровня.

Если необходимо построить в плоскости Σ какую-либо фигуру, то выполнить это построение в плоскости общего положения трудно. В этом случае проводятся построения, показанные на рис. 3.7. На Π_5 строится натуральная величина фигуры. Затем находятся остальные проекции этой фигуры. На рис. 3.7 по проекции D_5 (одна точка натуральной величины фигуры) найдены остальные проекции этой точки. Проекция D_4 принадлежит прямой, в которую проецируется плоскость Σ. Последовательность построений показана стрелками. Правило замены плоскостей проекций справедливо и в этом случае.

Равные отрезки помечены одинаково. Таким способом можно построить, например, окружность, вписанную в треугольник ABC. На плоскости Π_5 строится окружность, вписанная в треугольник $A_5B_5C_5$, а затем находятся остальные проекции ряда точек окружности так же, как для точки D_5. Горизонтальная и фронтальная проекции этой окружности – эллипсы.

В случае, когда дана проецирующая плоскость, построений, связанных с натуральной величиной фигуры, конечно, меньше, так как плоскость уже проецируется в прямую линию. На рис. 3.8 показано построение квадрата, принадлежащего горизонтально проецирующей плоскости. Пусть дана горизонтально проецирующая плоскость $\Sigma(\Sigma_1)$ и две точки этой плоскости $A(A_1, A_2)$ и $B(B_1, B_2)$. Необходимо построить квадрат ABCD в плоскости Σ. Соединяем отрезками проекции A_2,B_2 и A_1,B_1. Получили проекции стороны квадрата. Вводим плоскость $\Pi_4 \,//\, \Sigma_1$ ($x_{14} \,//\, \Sigma_1$). Строим новую проекцию A_4B_4. Достраиваем к отрезку A_4B_4 квадрат $A_4B_4C_4D_4$. Проекции C_1 и D_1 принадлежат Σ_1. Проекции C_2 и D_2 строятся по правилам замены плоскостей проекций. У этой задачи есть второе решение – квадрат, симметричный построенному относительно прямой (AB). Это второе решение можно построить, не пользуясь проекцией на плоскость Π_4 сразу на плоскостях Π_2 и Π_1.

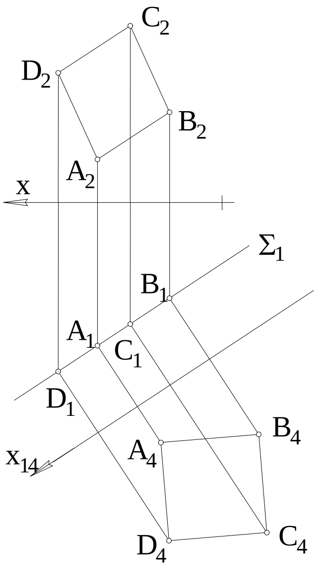


Рис. 3.8

ГЛАВА 4. ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Позиционные задачи – это задачи, в которых требуется определить положение фигуры относительно плоскостей проекций или взаимное положение фигур – их принадлежность, параллельность и пересечение.

4.1. Взаимное положение прямой и плоскости

Взаимное положение прямой и плоскости определяется количеством общих точек: а) если прямая имеет две общие точки с плоскостью, то она принадлежит этой плоскости; б) если прямая имеет одну общую точку с плоскостью, то прямая пересекает плоскость; в) если точка пересечения прямой с плоскостью удалена в бесконечность (несобственная), то прямая и плоскость параллельны.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости. Чтобы построить такую прямую, надо в плоскости задать прямую и параллельно ей провести нужную прямую.

Пусть плоскость задана треугольником $\Sigma(\Delta ABC)$. Через точку E (рис. 4.1) необходимо провести прямую EF, параллельную плоскости Σ. Для этого через горизонтальную проекцию точки $E(E_1)$ проведем горизонтальную проекцию E_1F_1 искомой прямой параллельно горизонтальной проекции любой прямой, лежащей в плоскости Σ, например, прямой AB ($E_1F_1 // A_1B_1$). Через фронтальную проекцию E_2 точки E параллельно AB проводим фронтальную проекцию E_2F_2 искомой прямой EF ($E_2F_2 // A_2B_2$). Прямая EF параллельна плоскости Σ, заданной треугольником ABC.

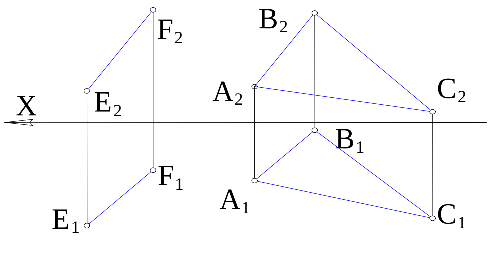


Рис. 4.1

Прямая будет также параллельна плоскости, если она лежит в плоскости, параллельной данной.

4.2. Построение точки пересечения прямой с плоскостью

Задача на построение точки пересечения прямой с плоскостью, называемая первой позиционной задачей, широко применяется в начертательной геометрии. Она лежит в основе решения следующих задач:

- на пересечение двух плоскостей;
- пересечение поверхности с плоскостью;
- пересечение прямой с поверхностью;
- взаимное пересечение поверхностей.

Построить точку пересечения прямой с плоскостью – значит найти точку, принадлежащую одновременно заданной прямой и плоскости..

4.3. Плоскость занимает проецирующее положение

Если плоскость занимает проецирующее положение (например, она перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, рис. 4.2), то фронтальная проекция точки пересечения должна одновременно принадлежать фронтальному следу плоскости и фронтальной проекции прямой, то есть быть в точке их пересечения. Поэтому сначала определяется фронтальная проекция M_2 точки M (точка пересечения прямой EF с фронтально-проецирующей плоскостью $\Sigma(\Delta ABC)$, а затем ее горизонтальная проекция. Точка M_1 определена из условия принадлежности точки M прямой EF.

Полагая, что плоскость Σ представляет собой непрозрачный треугольник, установим видимость проекций прямой EF. На Π_2 вся проекция прямой EF видима, так как она не закрывается треугольником. На Π_1 участок прямой правее M_2 невидим, так как он находится ниже плоскости при взгляде на Π_1.

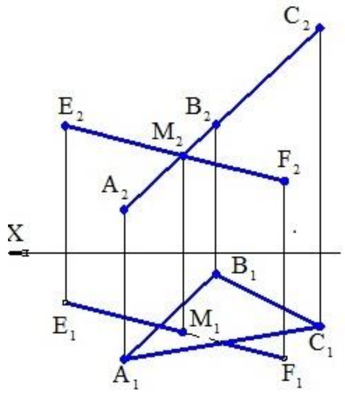


Рис.4.2

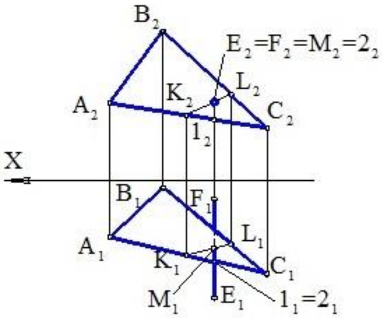


Рис. 4.3

4.4. Прямая занимает проецирующее положение

На рис. 4.3 изображена плоскость общего положения P (ΔABC) и горизонтально-проецирующая прямая EF, пересекающая плоскость в точке M. Фронтальная проекция точки – точка M_2 – совпадает с точками E_2 и F_2, так как M принадлежит прямой. Для построения горизонтальной проекции искомой точки пересечения проведем через точку M в плоскости P прямую (например, KL). Сначала построим ее фронтальную проекцию, а затем – горизонтальную. Точка M является точкой пересечения прямых EF и KL.Так как точка M одновременно лежит на прямой EF и в плоскости P ($KL \in P$), то она является точкой их пересечения.

Для установления видимости проекции прямой на $П_1$ вводим конкурирующие точки 1 и 2. Так как точка 2 дальше удалена от плоскости $П_1$, то относительно $П_1$ она будет видимой, а невидимой будет точка 1. Заметим, что точка 2 принадлежит прямой EF. Следовательно, в окрестности точек $1_1=2_1$ до M_1 проекция прямой будет видимой. Выше M_1 проекция прямой будет невидимой. Невидимый участок проекции прямой показан штриховой линией.

4.5. Прямая и плоскость занимают общее положение

Пусть даны плоскость Σ и прямая AB (рис.4.4, а). В общем случае они имеют одну общую точку. Эта точка, принадлежащая прямой и плоскости, будет принадлежать и некоторой прямой n этой плоскости. Заметим, что в плоскости через точку можно провести однопараметрическое множество прямых – ∞^1. Выделив хотя бы одну из них, легко определим искомую точку. Следовательно, поставленная задача сводится к отысканию некоторой прямой n, принадлежащей заданной плоскости и пересекающей исходную прямую AB.

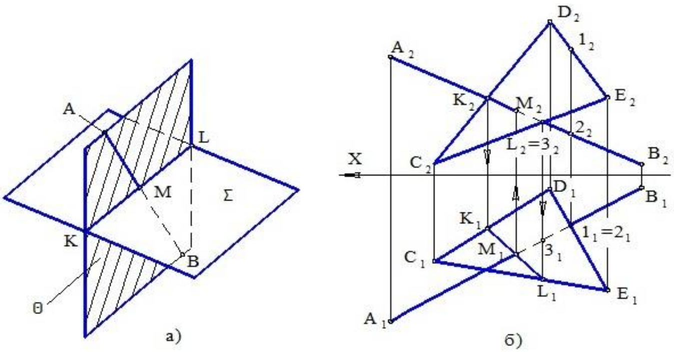


Рис. 4.4

Прямую n можно рассматривать как проекцию прямой AB на заданную плоскость Σ (в более широком смысле прямая n есть отображение прямой AB на плоскость Σ). Для случая линейного проецирования прямые n и AB принадлежат одной плоскости и являются конкурирующими относительно плоскости Σ. Последнее используем для определения точки пересечения прямой и плоскости. Тогда алгоритм решения поставленной задачи будет следующим:

1) на заданной плоскости Σ(ΔCDE) проведем проекции прямой KL (рис. 4.4, б), конкурирующей с заданной прямой AB относительно плоскостей Σ и Π_2; сначала находим K_2L_2, а затем

K_1L_1; прямые KL и AB расположены во фронтально-проецирующей плоскости;

2) находим точки $M_1=K_1L_1 \cap A_1B_1$ и $M_2 \in A_2B_2$ пересечения проекций прямых AB и KL; точка M (M_1,M_2) – искомая;

3) определяем видимость прямой и плоскости относительно плоскостей проекций.

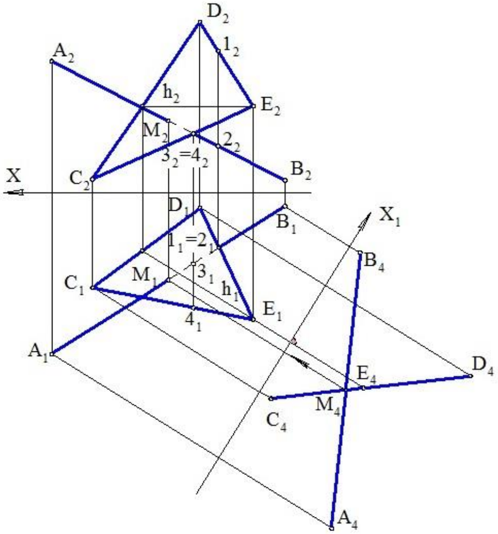


Рис. 4.5.

Для определения видимых участков прямой AB анализируем положение конкурирующих точек скрещивающихся прямых. Так, точки 1 и 2 находятся на скрещивающихся прямых AB и DE: $1 \in DE$, $2 \in AB$. Их горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 совпадают. По фронтальным проекциям точек 1 и 2 при взгляде на плоскость Π_1 видно, что точка 1 (точка плоскости) находится над точкой 2 (точка прямой), то есть она закрывает точку 2 при проецировании на горизонтальную плоскость проекций. Следовательно, прямая AB на участке M-2 расположена под треугольником CDE. Тогда горизонтальная проекция отрезка M2 – M_12_1 будет невидимой. Она показана штриховой линией.

Невидимый участок на фронтальной проекции прямой АВ установлен анализом положения точек 4 и 3 ($4 \in CE$, $3 \in AB$), принадлежащих скрещивающимся прямым АВ и СЕ. По горизонтальной проекции видно, что если смотреть на плоскость $П_2$, то невидимой будет точка 3, принадлежащая, прямой. Она ближе расположена к плоскости проекций $П_2$. На фронтальной плоскости проекций точка 4 закрывает точку 3. В этом месте прямая АВ закрыта треугольником CDE. На $П_2$ невидимый участок $M_2 3_2$ показан штриховой линией.

Задача на пересечение прямой и плоскости общего положения может быть сведена к одному из частных случаев, рассмотренных выше. Для этого прямую или плоскость нужно перевести в проецирующее положение. Ниже приведено решение (рис. 4.5), в котором методом замены плоскостей проекций в проецирующее положение переведена плоскость. На $П_4$ определена проекция M_4 искомой точки, а затем по линиям связи установлены проекции точки и на исходных плоскостях проекций. Исходные данные взяты такими же, что и в предыдущей задаче. Поэтому установление видимости проекций прямой не рассматривается.

4.6. Взаимное положение плоскостей

Общим случаем взаимного положения двух плоскостей является их пересечение. В частном случае, когда линия пересечения удалена в бесконечность, плоскости становятся параллельными. Параллельные плоскости совпадают при сокращении расстояния между ними до нуля.

4.7. Параллельные плоскости

Плоскости будут параллельными, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. На рис. 4.6, а плоскости Σ и Σ' параллельны, так как $m \parallel m'$ и $n \parallel n'$.

Пример решения задачи на комплексном чертеже представлен на рис. 4.6, б.

Пример. Через точку А (рис. 4.6, б) требуется провести плоскость $\Sigma^{/}$, параллельную заданной плоскости Σ (Δ KLM). *Решение.* Проводим через точку А две прямые m и n, параллельные двум любым прямым, находящимся в заданной плоскости, например сторонам треугольника KM и KL, соответственно. Пересекающиеся прямые m и n задают искомую плоскость $\Sigma^{/}(m \cap n)$.

4.8. Пересекающиеся плоскости

Линия пересечения двух плоскостей определяется

- двумя точками, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям;
- одной точкой, принадлежащей двум плоскостям, и известным направлением линии.

В обоих случаях задача заключается в нахождении точек, общих для двух плоскостей. Задача на пересечение двух плоскостей называется второй позиционной задачей. Она может быть сведена к решению первой позиционной задачи, рассмотренной ранее, по одному из следующих вариантов.

Вариант 1. 1) В одной из плоскостей, например Σ (рис. 4.7), выбирают две произвольные прямые 12 и 34; 2) определяют точки M и K пересечения этих прямых с другой плоскостью – Δ; точки M и K задают искомую прямую.

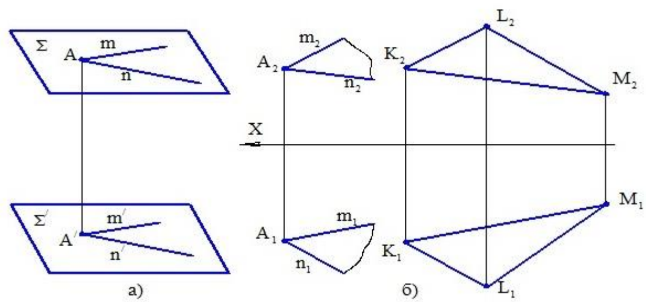


Рис. 4.6.

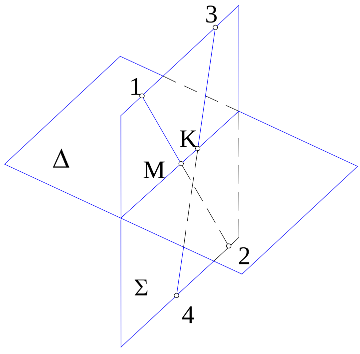


Рис. 4.7

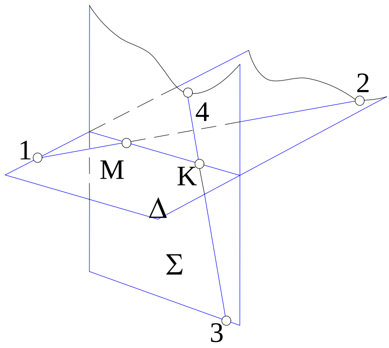


Рис. 4.8

Вариант 2. 1) Выбирают по одной прямой в каждой из заданных плоскостей, например$12 \in \Delta$, а $34 \in \Sigma$ (рис. 4.8); 2) определяют точки M и K пересечения этих прямых с соответствующими плоскостями – $M=12 \cap \Sigma$, $K=34 \cap \Delta$; точки M и K определяют искомую прямую.

Рассмотрим решение поставленной задачи на комплексном чертеже для плоскостей общего положения.

Пусть даны плоскости $\Sigma(m \cap n)$ и $\Delta(a\ //\ b)$ положения (рис. 4.9). Проведем в плоскости Σ прямую 12 и построим точку пересечения ее с плоскостью Δ. Для этого в плоскости Δ построим прямую 45, конкурирующую с 12 относительно $П_1$. Прямые 12 и 45 задают горизонтально проецирующую плоскость. В пересечении прямых 12 и 45 получаем точку K искомой линии пересечения. Для построения точки M линии пересечения вводим в плоскости Σ прямую c, параллельную 12 и проходящую через точку 3. Конкурирующей

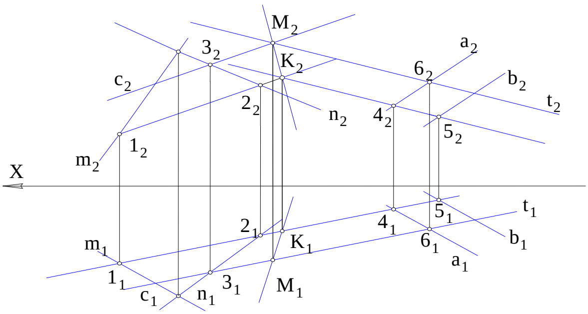


Рис. 4.9

с ней и принадлежащей плоскости Δ является прямая t. В пересечении прямых t и d находим точку M. Точки K и M определяют искомую прямую.

Задача существенно упрощается, если одна из плоскостей занимает проецирующее положение. На рис. 4.10 плоскость Σ(ΔABC) занимает общее положение, а плоскость Δ(ΔEFG) – горизонтально проецирующее. Так как искомая прямая принадлежит обеим плоскостям, то на $П_1$ ее проекция будет совпадать с горизонтальным следом плоскости Δ. Фронтальная проекция искомой линии определена из условия принадлежности ее плоскости Σ.

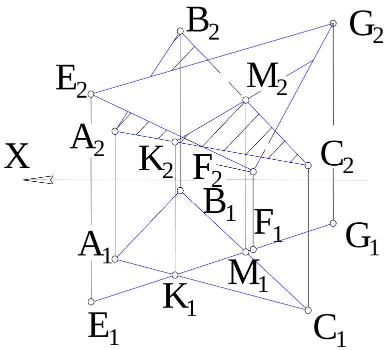


Рис. 4.10

При взгляде на плоскость $П_2$ по горизонтальной проекции видно, что часть треугольника ABC находится перед плоскостью Δ. Следовательно, на $П_2$ треугольник $K_2C_2M_2$ является видимым. Он выделен штриховкой. Видимыми на $П_2$ а, соответственно выделены штриховкой, и треугольники плоскости Σ в окрестностях точек A_2 и B_2. Это связано с тем, что они находятся вне треугольника EFG и им не перекрываются при взгляде на $П_2$.

ГЛАВА 5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ПРЯМОГО УГЛА

К метрическим задачам, изучаемым в учебном курсе начертательной геометрии, относятся задачи, в которых требуется определить метрические характеристики заданной фигуры – длину, угол, площадь и другие, а также метрические свойства и характеристики, обусловленные расположением фигуры относительно плоскостей проекций или относительно другой (других) фигур – перпендикулярность, расстояние и угол. Проекционное решение таких задач основывается на метрических свойствах ортогонального проецирования на плоскость и обратимости чертежа Монжа. Метрическими свойствами ортогонального проецирования являются существующие зависимости между длинами отрезка прямой линии и его проекции, а также между величинами угла и его проекции (см. п. 1). Из этих зависимостей вытекает теорема о проецировании прямого угла: для того чтобы прямой угол проецировался в прямой угол, необходимо и достаточно, чтобы одна его сторона была параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна этой плоскости. Рассмотрим геометрическое доказательство. Оно позволяет более наглядно увидеть числовую и проекционную взаимосвязь двух геометрических фигур – прямого угла и его проекции.

Необходимость. Пусть $\angle BAC = = \angle B_1A_1C_1 = 90°$ (рис. 5.). Докажем, что AC // $П_1$. Предположим, что AB не параллельна $П_1$ (если AB // $П_1$, то плоскость угла BAC параллельна $П_1$ и по свойству 9 ортогонального проецирования имеем:

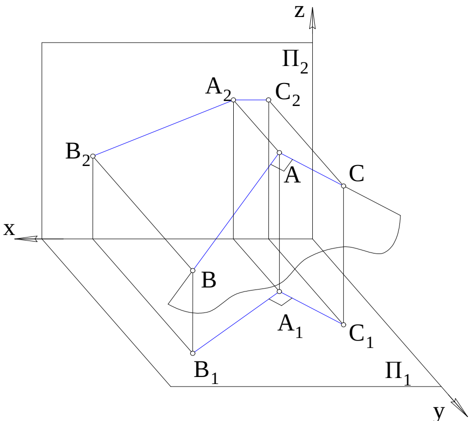


Рис. 5.

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 90°$). Поскольку $\angle B_1A_1C_1 \subset П_1$, $\angle B_1A_1C_1 = 90°$ и $AA_1 \perp П_1$, как проецирующая линия, то плоскости $\Sigma(A_1B_1, AA_1)$ и $\Delta(A_1C_1, AA_1)$ взаимно перпендикулярны. В этом случае AB и AA_1 суть наклонная и ее ортогональная проекция на плоскости Δ. Так как $AC \subset \Delta$ и $AC \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах имеем $AC \perp AA_1$, т.е. $AC \parallel П_1$.

Достаточность. Пусть $\angle BAC = 90°$, $AC \parallel П_1$. Докажем,

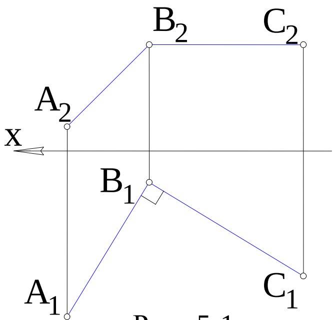


Рис. 5.1.

что $\angle B_1A_1C_1 = 90°$. При данных условиях имеем: AB – наклонная, A_1B_1 – ее проекция на $П_1$. По теореме о трех перпендикулярах имеем: $(AC \perp AB,\ AC \parallel П_1) \Rightarrow AC \perp A_1B_1$. Из $AC \parallel П_1$ следует $AC \parallel A_1C_1$. Следовательно, $A_1C_1 \perp A_1B_1$ и $\angle B_1A_1C_1 = 90°$.

Из обратимости комплексного чертежа (КЧ) следует, что если A_2B_2, A_1B_1 и C_2B_2, C_1B_1 – проекции пересекающихся прямых AB и CB, то при выполнении одного из двух следующих проекционных условий:

1) $A_1B_1 \perp C_1B_1$ и $A_2B_2 \parallel x$ либо $C_2B_2 \parallel x$;

2) $A_2B_2 \perp C_2B_2$ и $A_1B_1 \parallel x$ либо $C_1B_1 \parallel x$

В пространстве имеет место перпендикулярность $AB \perp CB$ (рис. 5.1.).

Метрические задачи курса начертательной геометрии можно условно разделить на следующие группы:

1) построение взаимно перпендикулярных фигур:

прямых, плоскостей, прямых и плоскостей;

2) определение длин отрезков (расстояний) и натуральной величины (НВ) плоской фигуры;

3) определение углов между фигурами.

5.1. Построение взаимно перпендикулярных фигур

В качестве взаимно перпендикулярных будем рассматривать пары фигур: две прямые, прямая и плоскость, две плоскости, прямая и поверхность.

5.2. Перпендикулярность двух прямых

Определение. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°. Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и скрещивающимися.

Задача. Даны прямая АВ и точка С. Построить прямую, проходящую через точку С и пересекающую АВ под прямым углом (рис. 5.2).

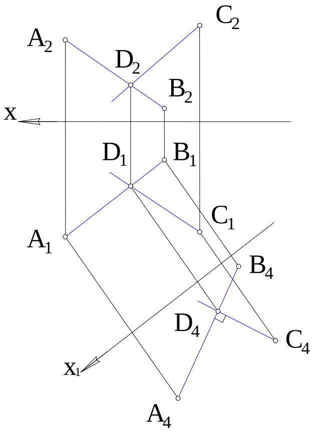


Рис. 5.2

Решение задачи основывается на построениях, приводящих к проекционному изображению условий теоремы о проекции прямого угла (см. рис. 5.1).

Алгоритм решения в символической записи будет следующим:

1) $x_1 \parallel A_1B_1$;

2) $(A_2B_2, A_1B_1) \Rightarrow A_4B_4$; $(C_2, C_1) \Rightarrow C_4$;

3) $C_4D_4 \perp A_4B_4$;

4) $D_4 \Rightarrow D_1 \in A_1B_1$; $D_1 \Rightarrow D_2 \in A_2B_2$.

C_1D_1, C_2D_2 – решение задачи.

Задача. Даны прямая AB и точка D (рис. 5.3). Построить прямую, проходящую через точку D, перпендикулярную прямой AB и образующую с ней кратчайшее расстояние R, где $R < \rho(D, AB)$; ρ – расстояние между фигурами, указанными в скобках.

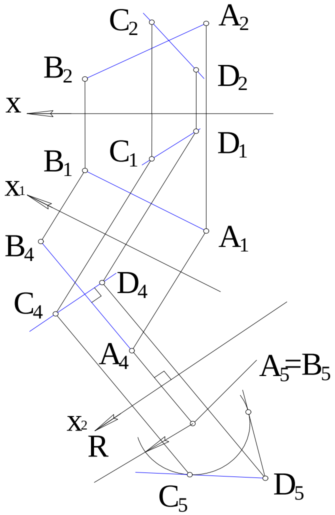


Рис. 5.3

Из условия задачи следует, что заданная и искомая прямая – скрещивающиеся. Концы отрезка кратчайшего расстояния R образуют два множества точек: прямую AB и цилиндрическую поверхность вращения с осью AB. Из точки D можно провести лишь две прямые, касательные к цилиндрической поверхности и образующие угол 90° с прямой AB. Алгоритм решения данной задачи в символической записи имеет вид:

1) $x_1 \parallel A_1B_1$;
2) $(A_2B_2, A_1B_1) \Rightarrow A_4B_4$; $(D_1, D_2) \Rightarrow D_4$;
3) $x_2 \perp A_4B_4$;
4) $(A_1B_1, A_4B_4) \Rightarrow A_5 = B_5$; $(D_1, D_4) \Rightarrow D_5$;
5) D_5C_5 – касательная к окружности радиуса R; $D_4C_4 \perp A_4B_4$;
6) $(C_5, C_4) \Rightarrow C_1$; $(C_4, C_1) \Rightarrow C_2$.

C_2D_2, C_1D_1 – одно из двух решений задачи.

5.3. Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости.

Приведем без доказательства известные в школьном курсе стереометрии теоремы, необходимые для решения последующих метрических задач.

1. Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Через любую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

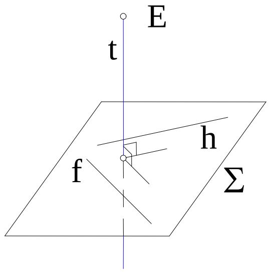


Рис.5.4

3. Через любую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

Для построения прямой t э E, перпендикулярной плоскости Σ, необходимо, на основании признака перпендикулярности, провести в плоскости две пересекающиеся прямые h и f, а затем построить прямую t по условиям: $t \perp h$, $t \perp f$ (рис. 5.4). В общем случае прямые t и h, t и f – пары скрещивающихся прямых.

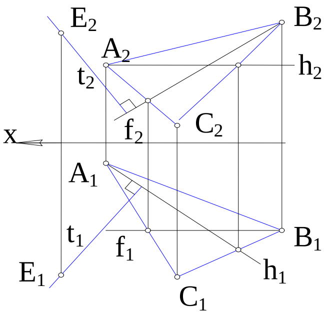


Рис.5.5

Задача. Даны плоскость Σ(ΔABC) и точка E.

Построить прямую t по условиям: t э E, $t \perp \Sigma$ (рис. 5.5).

Решение задачи может быть следующим:

1) строятся линии уровня h и f в плоскости Σ, где h_2 // x, f_1 // x;

2) строятся проекции t_1 и t_2 искомой прямой t, где t_2 э E_2, $t_2 \perp f_2$; t_1 э E_1, $t_1 \perp h_1$. В итоге t_1 , t_2 – решение задачи. Прямая t скрещивается с f и h.

Выбор линий уровня h и f в качестве пересекающихся прямых в плоскости Σ продиктован приведенными выше условиями теоремы о проецировании прямого угла и простотой построений на КЧ. Если точка E находится в плоскости Σ, то последовательность построений остается прежней.

Задача. Даны прямая t и точка E. Построить плоскость, проходящую через точку E и перпендикулярную прямой t (рис. 5.6).

Решение задачи основывается на построении двух линий уровня $h(h_1,h_2)$ и $f(f_1,f_2)$, проходящих через точку E: $h_2 \ni E_2$, $h_2 \parallel x$, $h_1 \ni E_1$, $h_1 \perp t_1$; $f_1 \ni E_1$, $f_1 \parallel x$, $f_2 \ni E_2$, $f_2 \perp t_2$. Плоскость (h , f) – решение задачи.

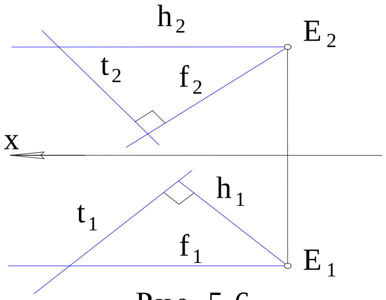


Рис. 5.6

5.4. Линии наибольшего наклона

Приведем известную в начертательной геометрии теорему: прямые в плоскости, перпендикулярные ее линиям уровня, являются линиями наибольшего наклона этой плоскости к плоскостям проекций. Эта теорема позволяет выполнять построения линий наибольшего наклона на КЧ.

Задача. Дана плоскость $\Sigma(\Delta ABC)$. Построить ее линии наибольшего наклона относительно плоскостей проекций Π_1 и Π_2 (рис. 5.7), проходящие через вершину B. Алгоритм проекционного решения задачи будет следующим:

1) строятся в плоскости Σ линии уровня $h(h_1,h_2)$ и $f(f_1,f_2)$, где $h_2 \parallel x$, $f_1 \parallel x$;

2) строится вначале $m_2 \ni B_2$, $m_2 \perp f_2$, затем m_1;

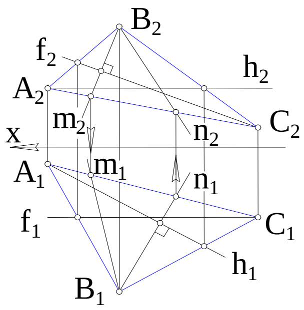


Рис. 5.7

3) строится вначале $n_1 \ni B_1$, $n_1 \perp h_1$, затем n_2.

Линия $m(m_1,m_2)$ определяет наибольший наклон плоскости Σ к плоскости проекций Π_2, а линия $n(n_1,n_2)$ определяет наибольший наклон плоскости Σ к плоскости проекций Π_1.

5.5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

В обыкновенной точке A поверхности Σ можно построить единственную касательную плоскость (рис. 5.8). Для этого на поверхности через точку A необходимо провести две кривые a и b, а затем построить две касательные a^1 и b^1 соответственно к a и b. Касательная плоскость Δ образована прямыми a_1 и b_1. Прямая $n \perp \Delta$ называется нормалью поверхности Σ в точке A.

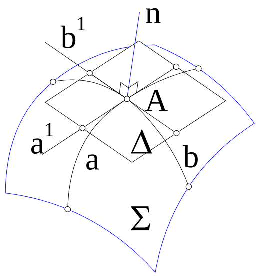


Рис. 5.8

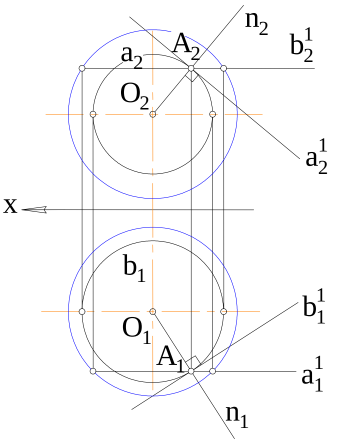


Рис. 5.9

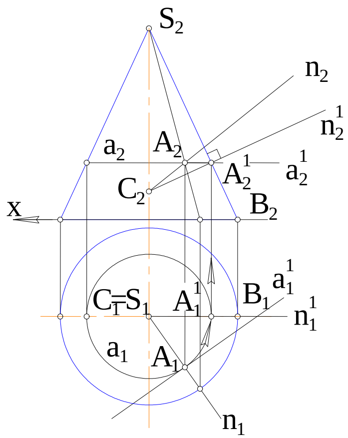


Рис. 5.10

Задача. Даны сфера и точка A на ней. Построить касательную плоскость и нормаль к сфере в точке A (рис. 5.9).

Решение задачи может быть выполнено следующим образом:

1) построим две окружности $a(a_1, a_2)$ и $b(b_1, b_2)$ на сфере, пересекающиеся в точке $A(A_1,A_2)$;

2) проведем две касательные a^1 (a^1_1, a^1_2) и b^1 (b^1_1, b^1_2) к окружностям a и b соответственно; искомая касательная плоскость образуется касательными a^1 и b^1;

3) построим нормаль $n(n_1,n_2)$ к поверхности сферы по следующим условиям:
$n_1 \perp b^1{}_1$, $n_2 \perp a^1{}_2$.

Заметим, что поверхность сферы состоит только из обыкновенных точек.

Задача. Даны коническая поверхность вращения и точка A на ней. Построить касательную плоскость и нормаль к поверхности в точке A (рис. 5.10).

Решение задачи:

1) построим на конической поверхности две линии, пересекающиеся в точке A: окружность $a(a_1, a_2)$ и прямую $b = SA(S_1A_1, S_2A_2)$;

2) проведем касательную a^1 $(a^1{}_1,a^1{}_2)$ к окружности a; две пересекающиеся в точке A прямые a_1 и SA образуют касательную плоскость к поверхности конуса;

3) при помощи преобразования вращения (см. рис. 7.9) построим промежуточное положение $n^1(n^1{}_1,n^1{}_2)$ искомой нормали n, а затем ее искомое положение $n(n_1,n_2)$.

Вершина S – единственная особая точка на поверхности конуса.

5.6. Перпендикулярность двух плоскостей

Определение. Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°. Приведем без доказательства теоремы стереометрии, полезные для решения последующих метрических задач.

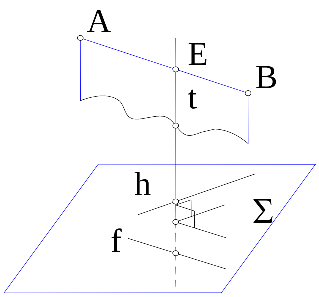


Рис. 5.11

1. Признак перпендикулярности двух плоскостей: если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Если две плоскости, перпендикулярные третьей

плоскости, пересекаются, то
прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.

3. Для наклонной прямой, не являющейся перпендикуляром к плоскости, имеет место утверждение: через наклонную проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной плоскости.

Последнее утверждение позволяет предложить следующий алгоритм построения плоскости, проходящей через наклонную AB и перпендикулярную заданной плоскости Σ:

1) на AB выбирается произвольная точка E;

2) строится прямая t таким образом, что $t \ni E$, $t \perp h$, $t \perp f$, где $h \subset \Sigma$, $f \subset \Sigma$ (рис. 5.11), т.е. $t \perp \Sigma$.

Плоскость (AB,t) будет единственной плоскостью, перпендикулярной плоскости Σ. Заметим, что через прямую $t \perp \Sigma$ проходит не одна плоскость, перпендикулярная Σ.

ГЛАВА 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

6.1. Расстояние от точки до фигуры (точки, прямой, плоскости)

Приведем сведения из планиметрии, необходимые для решения обозначенных задач.

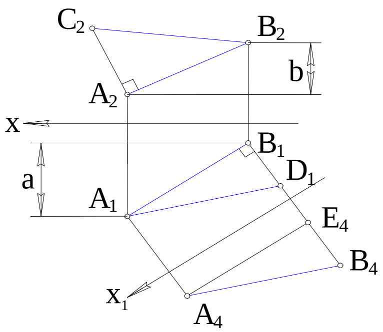


Рис. 6.1

1. Длина отрезка есть расстояние между его концами.

2. Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

Задача. Определить длину отрезка AB (рис. 6.1).

В п. 4 было приведено решение этой задачи методом замены плоскостей проекций. Рассмотрим другое решение – решение методом прямоугольного треугольника. Его обоснование выполним, опираясь на указанный метод замены. Выполняя решение данной задачи методом замены, получим A_4B_4 – искомую длину. Видим, что в соответствии с методом замены E_4B_4 = b. Поэтому, отложив на линии $B_1B_4 \perp x_1$ от точки B_1 отрезок $B_1D_1 = E_4B_4$ = b, получим прямоугольный треугольник $A_1B_1D_1$, в котором $A_1D_1 = A_4B_4$, т.е. длина гипотенузы A_1D_1 есть искомая длина. Следовательно, длину отрезка AB можно определить на плоскости проекций Π_1 используя расстояние b, снятое на плоскости проекций Π_2. При этом замена плоскостей проекций с осью x_1 не нужна. Аналогично можно определить искомую длину на плоскости Π_2. Для этого выстраиваем прямоугольный треугольник $B_2A_2C_2$, у которого C_2A_2 = a, где a определено на Π_1. В итоге получаем $B_2C_2 = B_1C_1$ – искомая длина отрезка AB. Понятно, что необходимо строить лишь один из двух приведенных прямоугольных треугольников. **Задача.** Даны прямая AB и точка

E вне прямой (рис. 6.2). Требуется определить расстояние ρ (E, AB).

Проекционный алгоритм решения может быть следующим:

1) методом замены плоскостей проекций определяется длина отрезка AB. На Π_4 она равна A_4B_4;

2) строится дополнительная на Π_4 проекция E_4 точки E;

3) вводится новая система плоскостей проекций Π_4, Π_5 такая, что ее ось проекций x_2 перпендикулярна A_4B_4;

4) на Π_5 строятся дополнительные проекции отрезка AB и точки E. Проекциями будут соответственно точки $A_5 = B_5$ и E_5.

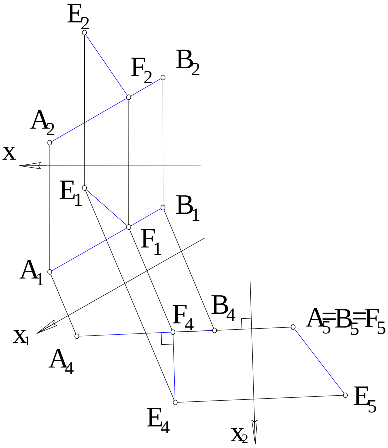


Рис. 6.2

Расстояние $\rho(F_5, E_5)$ является искомым расстоянием между данными прямой и точкой. Возвращаем затем последовательно проекции отрезка EF на Π_4, Π_1, Π_2. Для этого проводим вначале $E_4F_4 \parallel x_2$, а затем строим: $(F_5, F_4) \Rightarrow F_1$; $(F_4, F_1) \Rightarrow F_2$.

В итоге получаем E_1F_1, E_2F_2 – основные проекции отрезка EF, длина которого есть искомое расстояние. Необходимо отметить, что если не учитывать полученные построения на Π_5, то оставшиеся построения на Π_2, Π_1 и Π_4 соответствуют решению задачи о проведении прямой EF через данную точку E, пересекающей под 90° данную прямую AB.

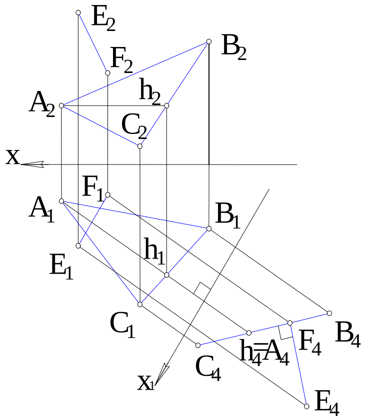


Рис. 6.3

Задача. Даны плоскость Σ (ΔABC) и точка E. Определить расстояние от точки E до плоскости Σ (рис. 6.3).

Решение задачи может быть выполнено методом замены плоскостей проекций. Проекционный алгоритм решения в этом случае следующий:

1) в плоскости Σ строится линия уровня, например $h(h_1, h_2)$, так, что h_2 // x;

2) вводится новая система плоскостей проекций $П_1$, $П_4$ с осью x_1 так, что $x_1 \perp h_1$;

3) на $П_4$ строятся дополнительные проекции заданных фигур – B_4C_4 для ΔABC и E_4 для точки E;

4) длина перпендикуляра E_4F_4 есть искомое расстояние ρ(E, Σ).

Для полноты решения строим проекции отрезка EF на основных плоскостях проекций. Для этого строим вначале E_1F_1 // x_1 , а затем $(F_4 , F_1) \Rightarrow F_2$; E_2F_2 , E_1F_1 – основные проекции отрезка EF длины ρ.

6.2. Определение расстояния между параллельными фигурами

Задача. Даны параллельные прямые AB и CD. Определить расстояние между этими прямыми (рис. 6.4).

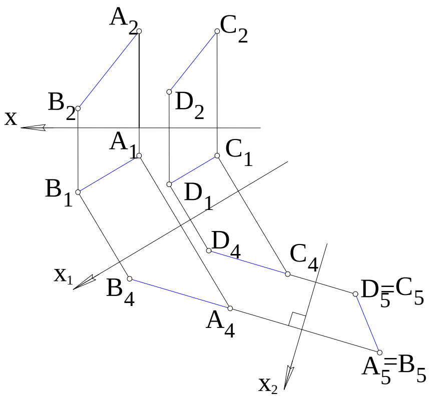


Рис. 6.4

Решение задачи выполним методом замены плоскостей проекций. Для этого вначале введем новую систему плоскостей проекций $П_1$, $П_4$ с осью проекций x_1 // A_1B_1 и определим НВ отрезков AB и CD. Получим A_4B_4 = НВ отрезка AB; D_4C_4 = НВ отрезка DC. Затем введем новую систему плоскостей проекций

$П_4$, $П_5$ с осью $x_2 \perp A_4B_4$ и построим точки $D_5 = C_5$ и $A_5 = B_5$, которые будут вырожденными проекциями отрезков AB и CD. Искомым расстоянием ρ(AB, CD) будет $\rho(A_5, D_5)$. Остается построить основные проекции отрезка длины ρ. Эту часть решения задачи предлагается выполнить самостоятельно.

6.3 Определение углов между фигурами

Фигуры пространства: прямые линии, плоскости, прямые и плоскости могут образовывать между собой углы – геометрические фигуры с соответствующими этим фигурам величинами. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в начертательной геометрии углы.

6.4. Углы между прямыми

Приведем известные из школьного курса стереометрии понятия и определения, необходимые для решения последующих метрических задач:

1) плоский угол – фигура, образованная двумя лучами с общим началом и одной
из плоских областей, ограниченной ими;

2) угол между пересекающимися прямыми – величина наименьшего из плоских
углов, образованных этими прямыми;

3) угол между скрещивающимися прямыми – это угол между пересекающимися
прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым.

В последнем определении величина угла между двумя скрещивающимися прямыми не зависит от выбора пары пересекающихся прямых, параллельных им. Рассмотрим несколько задач на определение углов.

Задача. Даны пересекающиеся отрезки AB и AC (рис.6.5). Определить угол между ними.

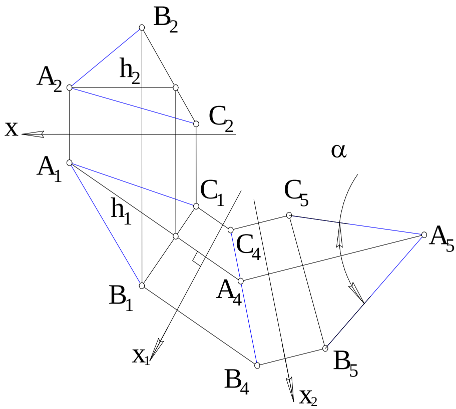


Рис. 6.5

Поскольку искомый угол является плоской фигурой, то решение задачи сводится к определению НВ плоской фигуры. Ее проекционное решение изложено в п. 1. Напомним алгоритм этого решения. Он основан на методе замены плоскостей проекций и применительно к условиям данной задачи может быть следующим:

1) строится линия уровня, например, $h(h_1,h_2)$, принадлежащая плоскости $\Sigma(AB, AC)$, при этом $h_2//x$;

2) строится ось проекции $x_1 \perp h_1$, что соответствует введению в пространстве новой системы плоскостей проекций $П_1$, $П_4$, где $П_4 \perp h$;

3) на $П_4$ строится вырожденная проекция B_4C_4 плоскости Σ;

4) строится ось проекции x_2 // B_4C_4, что соответствует введению в пространстве
новой системы плоскостей проекций $П_4$, $П_5$, где $П_5 // \Sigma$;

5) на $П_5$ строится угол $\angle(A_5C_5, A_5B_5) = \alpha$, который и является искомым.

ГЛАВА 7. КРИВЫЕ ЛИНИИ

Кривая линия – это множество последовательных положений точки, перемещающейся в пространстве. Такое определение дает наглядное представление о кривой линии как о траектории точки.

Для построения ортогональных проекций кривой (пространственной или плоской) необходимо построить проекции ряда точек, принадлежащих этой кривой, и соединить между собой одноименные проекции в той же последовательности, в какой они располагались на ней в пространстве. При задании кривой ее проекциями необходимо указать проекции хотя бы одной точки, принадлежащей кривой. Так, если на проекциях кривой m (рис. 7) не указать проекции точки A (A_1, A_2), то только по проекциям m_1 и m_2 нельзя судить о форме кривой.

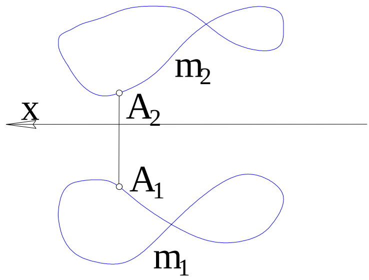


Рис. 7

Линии подразделяются на алгебраические, если в декартовой системе координат они определяются алгебраическими уравнениями, и трансцендентные, если они описываются трансцендентными уравнениями.

К алгебраическим линиям, в частности, относятся окружность, эллипс, парабола, гипербола, астроида и другие.

К трансцендентным линиям относятся синусоида, спираль Архимеда, циклоида и другие.

Линии могут быть пространственными и плоскими.

Линии, у которых все точки принадлежат одной плоскости, называют плоскими. Кривая, точки которой не лежат в одной плоскости, называется пространственной кривой. Примером плоской кривой является окружность, примером пространственной кривой – цилиндрическая винтовая линия.

7.1. Свойства кривых, инвариантные относительно ортогонального проецирования

При построении ортогональных проекций кривых необходимо знать те их свойства, которые сохраняются (инвариантны) при проецировании. К таким свойствам относятся следующие:

1. Касательные к кривой проецируются в касательные к ее проекциям (за исключением, когда касательная проецируется в точку).
2. Несобственным (бесконечно удаленным) точкам кривой соответствуют несобственные точки ее проекции.

При проецировании плоских кривых в дополнение к отмеченным будут справедливы следующие свойства:

3. Порядок проекции алгебраической кривой равен порядку самой кривой. Порядок алгебраической кривой определяется степенью уравнения, описывающего эту кривую.
4. Число узловых точек (точек, в которых кривая пересекает саму себя) на проекции кривой равно числу узловых точек самой кривой.

7.2. Комплексный чертеж окружности

Если окружность расположена в плоскости уровня, то на одну плоскость проекций она проецируется в отрезок, а на другую – в окружность (в натуральную величину). На рис.7.1 показан комплексный чертеж окружности k, расположенной в горизонтальной плоскости уровня Σ. На $П_2$ окружность проецируется в отрезок (часть прямой Σ_2), а на $П_1$ – в окружность.

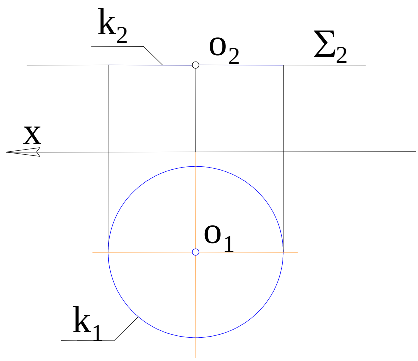


Рис. 7.1

Окружность, расположенная в плоскости, не параллельной и не перпендикулярной плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в кривую, которая называется эллипсом. Диаметры окружности будут проецироваться в отрезки, которые называются диаметрами эллипса. Длина диаметра эллипса равна длине диаметра окружности, умноженной на косинус угла наклона диаметра окружности к плоскости проекций. Диаметр окружности, расположенный на линии уровня, проецируется в натуральную величину, так как угол наклона его к плоскости проекций равен нулю. Этот диаметр будет больше всех остальных диаметров, он и назван большим диаметром эллипса. Диаметр окружности, перпендикулярный большому, наклонен к той же плоскости проекций под наибольшим углом. Его называют малым диаметром эллипса.

Построение эллипса по большому и малому диаметрам, которые взаимно перпендикулярны, приведено ниже. На рис. 7.2 показано построение одной точки эллипса. Так, пусть даны: АВ – большой диаметр эллипса; CD – малый диаметр эллипса. После проведения большой окружности диаметром АВ и малой окружности диаметром CD, проводим произвольный луч m. Через точку 1 на большой окружности проводим отрезок, параллельный малой оси CD, а через точку 2 на малой окружности – отрезок, параллельный большой оси АВ. Точка пересечения построенных отрезков является точкой эллипса (точка М). Проводя множество лучей, проходящих через точку О (проекция центра окружности), и повторяя показанные построения, получим множество точек эллипса. Затем по лекалу, соединяя эти точки, получим эллипс.

На рис 7.3 показана последовательность построения эллипса по большому диаметру и точке эллипса. Даны: АВ – большой диаметр эллипса; М – точка эллипса. Последовательность построений показана стрелками. Эти построения следуют из рассмотренных на рис. 7.4. После определения точки 2, а значит, и малой оси CD, можем перейти к построению любого числа точек эллипса, как показано на рис. 7.3.

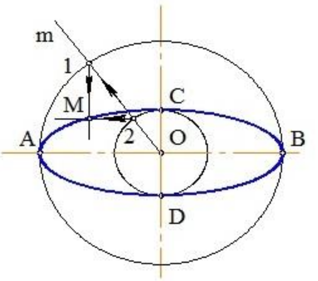


Рис. 7.3

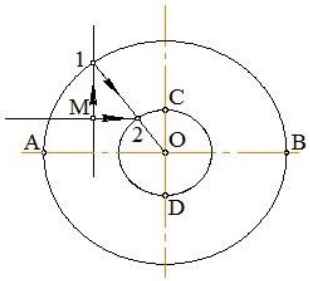


Рис. 7.4

Пусть окружность радиуса R расположена теперь во фронтально проецирующей плоскости Δ, центр окружности – точка O. Для нахождения большого диаметра эллипса необходима линия уровня. Через точку O проведем горизонталь h (h_1, h_2) в плоскости Δ. На h_1 отложим отрезки $O_1A_1=O_1B_1$, длины которых равны R. Отрезок A_1B_1 – это большой диаметр эллипса, в который проецируется окружность на $П_1$. Через точку O в плоскости Δ проведем фронталь $f(f_1,f_2)$. На f_2 отложим отрезки $O_2C_2=O_2D_2$, длины которых равны R. Точки C и D являются точками окружности, которые расположены на фронтали f. Горизонтальные проекции этих точек принадлежат f_1 (точки C_1 и D_1). Так как отрезок C_1D_1 перпендикулярен большому диаметру A_1B_1, то C_1D_1 – это малый диаметр эллипса на $П_1$. Теперь по большому диаметру A_1B_1 и малому диаметру C_1D_1 строим эллипс (горизонтальная проекция окружности). Фронтальной проекцией окружности является отрезок C_2D_2, так как Δ – фронтально проецирующая плоскость и все фронтальные проекции точек окружности расположены на прямой $Δ_2$ между точками C_2 и D_2. То же самое получим, если будем строить эллипс на $П_2$ по большому диаметру C_2D_2 и малому диаметру, величина которого равна нулю (рис.7.5).

Если окружность расположена в плоскости общего положения, то она проецируется на $П_1$ в эллипс (горизонтальная проекция окружности) и на $П_2$ – тоже в эллипс (фронтальная проекция окружности). В этом случае эллипсы строятся по большому диаметру и точке. Пусть плоскость общего положения, в которой расположена окружность радиуса R, задана прямыми h (h_1, h_2) и f (f_1,f_2). Обратим внимание на то, что в качестве прямых, задающих плоскость, взяты ее главные линии – горизонталь и фронталь (рис.7.6). Точка O – центр окружности. На h_1 строим большой диаметр $1_1 2_1$ ($|O_1 1_1|=|O_1 2_1|=R$). Это большой диаметр горизонтальной проекции окружности. На f_2 строим большой диаметр $3_2 4_2$ ($|O_2 3_2| = |O_2 4_2| = R$). Это большой диаметр фронтальной проекции окружности. Строим для точки 3 горизонтальную проекцию 3_1. На $П_1$ имеем $1_1 2_1$ – большой диаметр эллипса, 3_1 – точка эллипса. Строим для точки 2 фронтальную проекцию 2_2. На $П_2$ имеем $3_2 4_2$ – большой диаметр эллипса, 2_2 – точка эллипса. Теперь каждую из проекций окружности можно построить по большому диаметру и точке. Если при задании плоскости окружности горизонталь и фронталь не использовались, то их нужно провести, а затем выполнить описанные выше построения.

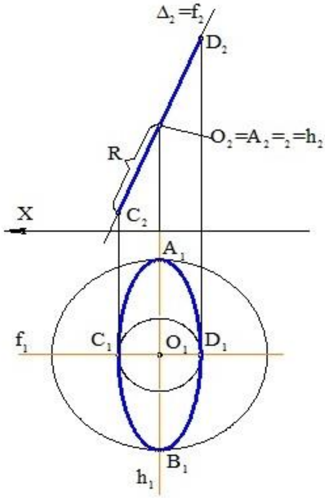


Рис. 7.5

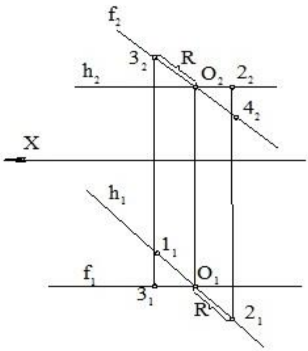


Рис. 7.6

7.3. Комплексный чертеж цилиндрической винтовой линии

Из пространственных кривых наибольшее распространение находят винтовые линии. Цилиндрической винтовой линией называется множество последовательных положений точки, совершающей равномерное перемещение по прямой, которая равномерно вращается вокруг параллельной ей оси.

За один оборот прямой вокруг оси точка переместится по прямой на величину P, называемую шагом винтовой линии. Так как рассматриваемые движения точки равномерны и взаимосвязаны, то, например, повороту точки на угол 180° (половина оборота) будет соответствовать перемещение по прямой на половину шага. По аналогии, за 1/n часть оборота точка перемещается на 1/n шага. На этом основывается построение комплексного чертежа цилиндрической винтовой линии.

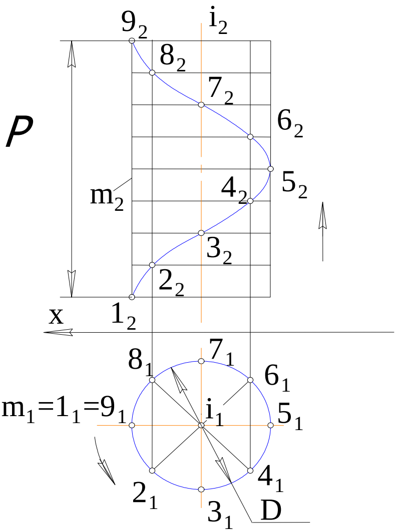


Рис. 7.7

Пусть ось винтовой линии i перпендикулярна $П_1$, начальное положение прямой m, параллельной оси i, и точки задано проекциями m_1, m_2 и 1_1, 1_2 соответственно (рис. 10.7). Проекцией винтовой линии на $П_1$ будет окружность, так как расстояние от точки до оси i не изменяется и равно D/2. Для построения фронтальной проекции винтовой линии разделим окружность на $П_1$ и отрезок на $П_2$, соответствующий шагу P, на равное количество частей (на рис. 10.7 – 8 частей). Тогда повороту прямой m на 1/8 часть оборота будет соответствовать линейное перемещение точки на 1/8 шага. На рис. 7.7 точка занимает положение $2(2_1,\ 2_2)$. При повороте прямой еще на 1/8 часть оборота, точка поднимется еще на 1/8 часть шага – точка $3(3_1, 3_2)$ и т. д. Полученные фронтальные проекции точек винтовой линии соединяем по лекалу.

Если вращение прямой вокруг оси выполняется против часовой стрелки, и точка при этом поднимается вверх, то такая винтовая линия называется правой винтовой линией. Если вращение выполняется по часовой стрелке, и точка при этом поднимается вверх, то винтовая линия называется левой винтовой линией. Прямая m при вращении вокруг оси i описывает цилиндрическую поверхность вращения, поэтому винтовая линия называется цилиндрической винтовой линией. Все точки этой винтовой линии принадлежат цилиндрической поверхности вращений.

Обратим внимание на то, что горизонтальной проекцией цилиндрической винтовой линии является окружность, а фронтальной – кривая, которая называется синусоидой. Для получения более точного чертежа винтовой линии необходимо окружность делить на большее число частей ($n > 8$).

Если при тех же условиях образования винтовой линии прямая m пересекает ось i, то такая винтовая линия называется конической винтовой линией.

ГЛАВА 8. ПОВЕРХНОСТИ

8.1. Понятие поверхности

В начертательной геометрии поверхности рассматриваются как множество последовательных положений некоторой линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону. Такой способ образования поверхности называется кинематическим.

Линия (кривая или прямая) движется в пространстве по определенному закону и создает поверхность. Она называется образующей. В процессе образования поверхности она может оставаться неизменной или менять свою форму. Закон перемещения образующей задается в виде совокупности линий и указаний о характере перемещения образующей. Эти линии называются направляющими.

Кроме кинематического способа, поверхность может быть задана

- аналитически, т. е. описана математическим выражением;
- каркасным способом, который используется при задании сложных поверхностей; каркас поверхности представляет собой упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности.

Чтобы задать поверхность на комплексном чертеже, достаточно иметь на нем такие элементы поверхности, которые позволяют построить каждую ее точку. Совокупность этих элементов называется определителем поверхности.

Определитель поверхности состоит из двух частей:

- геометрической части, включающей постоянные геометрические элементы (точки, линии), которые участвуют в образовании поверхности;
- алгоритмической части, задающей закон движения образующей, характер изменения ее формы.

В символическом виде определитель поверхности Ф можно записать в виде: Ф(Г)[А], где Г – геометрическая часть определителя, А – алгоритмическая.

Чтобы у поверхности выделить определитель, следует исходить из кинематического способа ее образования. Но так как многие одинаковые поверхности могут быть получены различными путями, то они будут иметь различные определители. Ниже будут рассмотрены наиболее распространенные поверхности в соответствии с классификационными признаками, приятыми в курсе начертательной геометрии.

8.2. Контур и очерк поверхности

Чтобы задать поверхность на комплексном чертеже достаточно указать проекции не всего множества точек и линий, принадлежащих поверхности, а только геометрических фигур, входящих в состав ее определителя. Такой способ задания поверхности позволяет построить проекции любой ее точки. Задание поверхности проекциями ее определителя не обеспечивает наглядность, что затрудняет чтение чертежа. Для повышения наглядности, если это возможно, на чертеже указывают очерковые линии (очерки) поверхности.

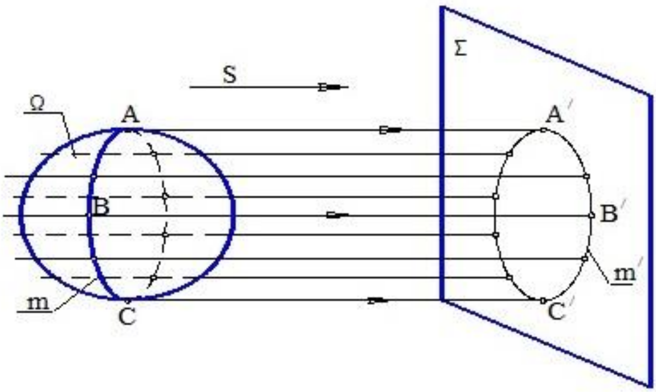


Рис. 8

Когда какая-нибудь поверхность Ω проецируется параллельно на плоскость проекций Σ, то проецирующие прямые, касающиеся поверхности Ω**,** образуют цилиндрическую поверхность (рис. 8). Эти проецирующиеся прямые касаются поверхности Ω в точках, образующих некоторую линию m, которая называется контурной линией.

Проекция контурной линии m на плоскость Σ – $m^{/}$, называется очерком поверхности. Очерк поверхности отделяет проекцию поверхности от остальной части плоскости проекций.

Контурную линию поверхности используют при определении видимости точек относительно плоскости проекций. Так, на рис. 11.1 проекции точек поверхности Ω, расположенные левее контура m, на плоскости Σ будут видимыми. Проекции остальных точек поверхности будут невидимыми.

8.3. Точка и линия на поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-нибудь линии, принадлежащей поверхности.

Линия принадлежит поверхности, если все ее точки принадлежат поверхности.

Следовательно, если точка принадлежит поверхности, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям некоторой линии этой поверхности.

Для построения точек, лежащих на поверхностях, пользуются графически простыми линиями (прямыми или окружностями) этой поверхности. В некоторых случаях применяют кривые, которые проецируются в графически простые линии.

Примеры построения недостающих проекций точек и линий, принадлежащих поверхностям, рассмотрены ниже для каждой классификационной группы поверхностей.

8.4. Поверхности (общие сведения)

Из множества различных поверхностей выделяется несколько классов в зависимости от формы образующей, а также от формы, числа и расположения направляющих:

1. Поверхности закономерные и незакономерные.
2. Линейчатые (образованные перемещением прямой линии) и нелинейчатые (криволинейные) поверхности.
3. Поверхности развертывающиеся (или торсы) и неразвертывающиеся.
4. Поверхности с образующей постоянной формы и поверхности с образующей переменной формы.
5. Поверхности с поступательным, вращательным или винтовым движением образующей.

В пособии из всего многообразия поверхностей рассмотрены линейчатые поверхности, гранные, поверхности вращения, циклические и винтовые.

8.5. Гранные поверхности и многогранники

Гранной поверхностью называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. Гранные поверхности можно разделить на два вида: пирамидальные (рис. 8.1, а) и призматические (рис.8.1, б).

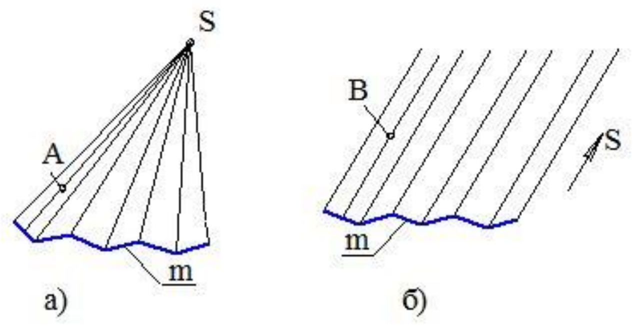


Рис.8.1

Пирамидальной называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. При этом все образующие проходят через некоторую неподвижную точку *S*. Определитель поверхности – ломаная направляющая m и точка S.

Призматической называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. При этом все образующие проходят параллельно некоторому заданному направлению S. Определитель поверхности – ломаная направляющая m и направление S.

Точки A и B принадлежат пирамидальной и призматической поверхностям соответственно, так как принадлежат прямым, расположенным на этих поверхностях.

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. Многоугольники поверхности называют гранями, стороны многоугольников – ребрами, а вершины многоугольников – вершинами многогранника. Рассмотрим два вида многогранников – пирамиду и призму.

Пирамида представляет собой многогранник (рис. 8.2 – это пример безосного чертежа), у которого одна грань – основание (произвольный многоугольник ABC). Остальные грани (боковые) – треугольники с общей вершиной *S*, называемой вершиной пирамиды. Точка D принадлежит поверхности пирамиды, так как лежит на прямой S1, принадлежащей боковой грани ASC.

Призмой называется многогранник, у которого основания – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами. Боковые грани призмы – параллелограммы. Если ребра боковых граней перпендикулярны основанию, то призму называют прямой.

На рис. 8.3 приведен комплексный чертеж (безосный, как многие приведенные ниже) трехгранной призмы. Видимость ребра AB определена по конкурирующим точкам 3 и 4. Точка 4 расположена выше точки 3, а значит, на Π_1 проекция точки 3 будет невидимой. Так как точка 3 принадлежит ребру 12, то оно также будет невидимым.

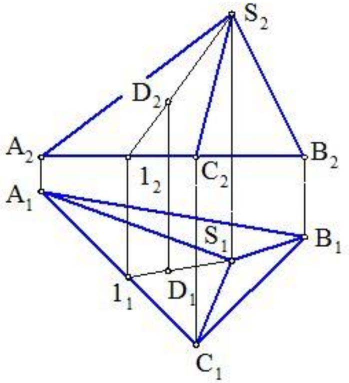


Рис. 8.2

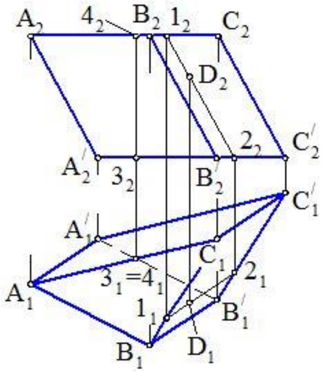


Рис. 8.3

Точка D (рис. 8.3) принадлежит поверхности призмы, так как лежит на прямой 12, принадлежащей поверхности призмы.

ГЛАВА 9. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ФИГУР

9.1. Пересечение поверхности и плоскости

Линия пересечения поверхности с плоскостью представляет собой линию, называемую сечением. Точки этой кривой можно рассматривать как точки пересечения линий поверхности с плоскостью или прямых плоскости с поверхностью. Отсюда следуют два варианта построения сечения:

1) выбираем конечное число линий на поверхности и определяем точки пересечения их с плоскостью;

2) выделяем конечное число прямых на плоскости и строим точки пересечения их с поверхностью.

Заметим, что возможно решение, представляющее собой комбинацию этих вариантов. В любом случае построение сечения сводится к многократному применению алгоритма решения задачи на пересечение линии и поверхности.

Определение проекций линий сечения рекомендуется начинать с построения его опорных (характерных) точек. К ним относятся точки, расположенные на очерковых образующих поверхности (они определяют границы видимости проекций кривой), точки, удаленные на экстремальные расстояния от плоскостей проекций и некоторые другие. После этого определяют промежуточные точки сечения.

Построение сечения существенно упрощается, если плоскость занимает проецирующее положение. Это связано с тем, что проецирующая плоскость характеризуется собирательным свойством. В этом случае одна из проекций сечения находится на следе плоскости, т.е. известна.

Пример 1. Построить проекции сечения кони-ческой поверхности вращения с фронтально-проецирующей плоскостью Σ (рис. 9.1).

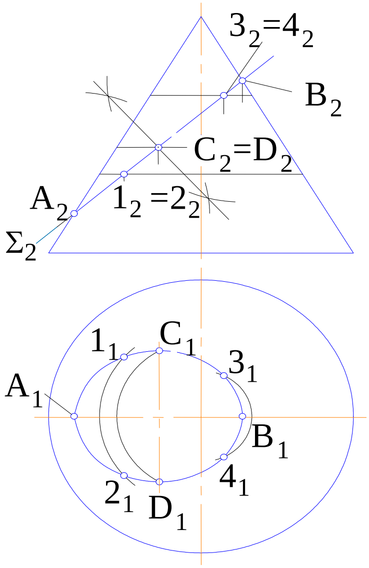


Рис.9.1

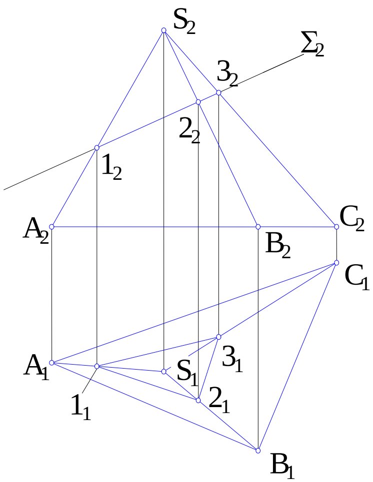


Рис. 9. 2

Решение. Заданная плоскость Σ пересекает исходную поверхность по эллипсу, фронтальная проекция которого расположена на следе этой плоскости. Горизонтальную проекцию сечения строим по точкам в соответствии с задачей на принадлежность линии поверхности (см. рис. 9.1).

Проекцию эллипса на плоскости Π_1 можно построить также по его большой A_1B_1 и малой C_1D_1 осям. Фронтальная проекция малой оси эллипса (точки $C_2=D_2$) находится на середине отрезка A_2B_2.

Пример 2. Построить пересечение многогранника плоскостью (рис. 9.2).

В пересечении гранных поверхностей плоскостями получаются многоугольники. Их вершины определяются как точки пересечения ребер гранных поверхностей с секущей плоскостью.

Многоугольник сечения может быть построен двумя способами:

1. Вершины многоугольника находятся как точки пересечения прямых (ребер) с секущей плоскостью;

2. Стороны

многоугольника находятся как линии пересечения граней (плоскостей) многогранника с секущей плоскостью.

На рис. 9.2 показано построение сечения пирамиды плоскостью Σ.

Секущая плоскость является фронтально-проецирующей, следовательно, все линии, лежащие в этой плоскости, совпадут с фронтальным следом Σ_2 плоскости Σ. Следовательно, фронтальная проекция $1_2 2_2 3_2$ сечения определится при пересечении фронтальных проекций ребер пирамиды со следом $\Sigma(\Sigma)_2$. Горизонтальные проекции точек $1(1_1)$, $2(2_1)$ и $3(3_1)$ находим из условия принадлежности точек ребрам пирамиды.

Пример 3. Построить линию пересечения цилиндрической поверхности вращения с плоскостью $\Sigma(\Sigma)_2$ (рис. 9.3).

Решение. Вначале находим опорные точки $A(A_1, A_2)$, $B(B_1, B_2)$, $C(C_1, C_2)$ и $D(D_1, D_2)$. Точки A и B находятся в пересечении образующих фронтального контура поверхности и плоскости Σ (вначале определяем A_2 и B_2, а затем по линиям проекционной связи – A_1 и B_1). Точки C и D являются точками пересечения горизонтального контура поверхности и плоскости Σ. На Π_2 горизонтальный контур совпадает с проекцией оси поверхности вращения, а на Π_1 является очерком. Тогда вначале строим C_2 и D_2, а затем C_1 и D_1.

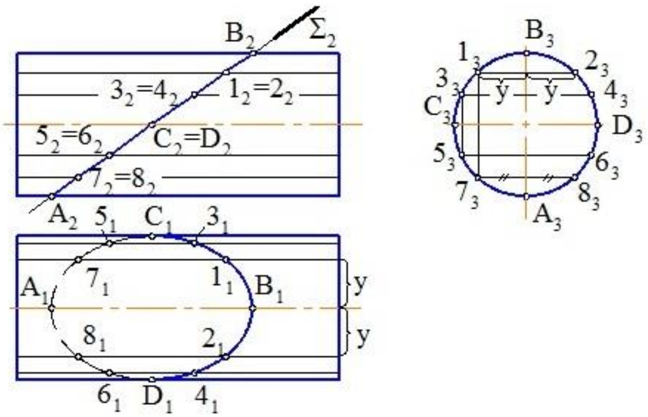


Рис. 9.3

Точки $1(1_1, 1_2)$, $2(2_1, 2_2)$, …, $8(8_1, 8_2)$ – это промежуточные точки сечения. Они построены введением промежуточных прямолинейных образующих поверхности. Вначале проводим проекции образующих на $П_2$, например через точки 1_2, 2_2 (образующие – фронтально конкурирующие). На $П_3$ эти образующие проецируются в точки 1_3 и 2_3. Горизонтальные проекции образующих построены по двум заданным, как показано на рис. 12.3, отложив соответствующие значения координаты у.

9.2. Пересечение конической поверхности вращения плоскостью

В зависимости от направления секущей плоскости в сечении конической поверхности вращения могут получиться различные линии. Они называются коническими сечениями. На рис. 9.4 приведена фронтальная проекция конической поверхности вращения (ось i параллельна $П_2$) и фронтально проецирующие плоскости Σ_2^1, Σ_2^2, Σ_2^5. На рис. 9.5 показаны наглядные изображения результатов пересечения плоскостями тел, ограниченных конической поверхностью вращения.

В результате пересечения конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса, получается окружность (рис. 9.4, а).

Эллипс получается в том случае, если секущая плоскость пересекает все образующие поверхности и не перпендикулярна оси i (рис. 9.4, б).

Плоскость параллельна одной образующей поверхности и пересекает одну половину конической поверхности. Сечением является парабола (рис. 9.4, в).

Плоскость параллельна двум образующим и пересекает обе половины конической поверхности (сечение – гипербола) (рис. 9.4, г).

Плоскость проходит через вершину конической поверхности (сечение – две пересекающиеся прямые) (рис. 9.4, д).

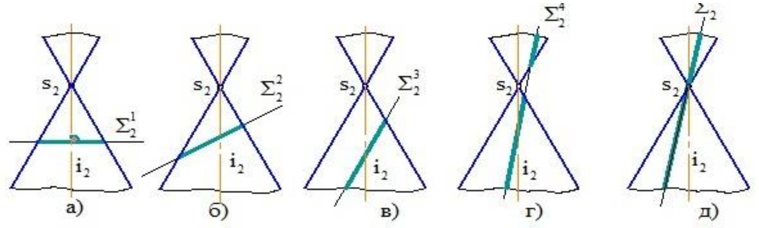
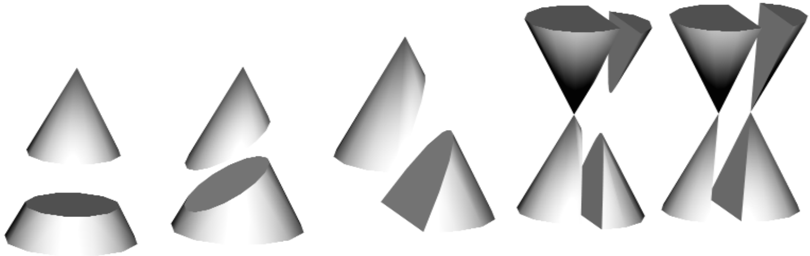


Рис. 9.4



а) б) в) г) д)

Рис. 9.5

9.3. Пересечение линии и поверхности.

Линия и поверхность пересекаются в общем случае в нескольких точках A, B. Алгоритм их определения может быть построен на тех же рассуждениях, что и при построении точки пересечения прямой и плоскости. Действительно, точки A, B, … пересечения линии m и поверхности Θ принадлежат также линиям, проходящим через эти точки и лежащим на заданной поверхности. Кривую n можно рассматривать как проекцию линии m на поверхность Θ. Тогда, в случае параллельного проецирования, линии n и m будут располагаться на одной цилиндрической поверхности, у которой направляющей является кривая m, а образующие параллельны направлению проецирования. В случае если линия прямая, то n и m находятся в одной плоскости Σ (рис. 9.6). Если направление проецирования будет перпендикулярно какой-либо плоскости проекций, линии n и m будут конкурирующими относительно соответствующей плоскости проекций.

Пример 1. Даны прямая m и тор. Построить точки пересечения прямой и поверхности (рис. 12.7).

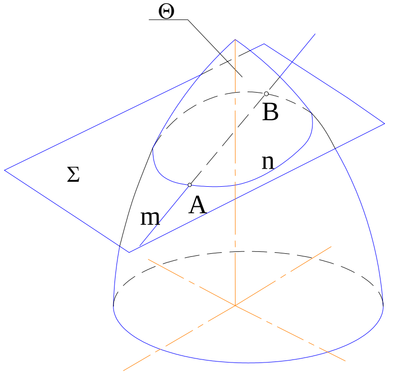


Рис. 9.6

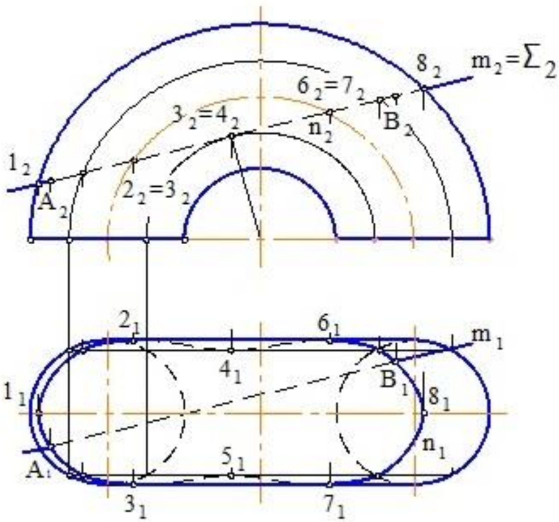


Рис. 9.7

Решение.

1. Выбираем на заданной поверхности линию n, например, фронтально конкурирующую с заданной прямой m. Линии n и m пересекаются, т.к. они находятся в одной фронтально-проецирую-щей плоскости.

2. Определяем горизонтальную проекцию линии n (n_1), исходя из условия принадлежности ее поверхности.

3. Находим точки A и B пересечения линий n и m, которые и являются искомыми.

4. Устанавливаем видимость проекций прямой. Так, как участок AB прямой m, рас-положен внутри поверхности, то он невидим на $П_1$ и $П_2$. Кроме этого, на $П_2$ невидим отрезок прямой m правее точки B_2 до точки на очерке поверхности, а на $П_1$ – левее точки 5_1, также до точки на очерке поверхности. Эти отрезки закрыты поверхностью – находятся за контурами поверхности.

Пример 2. Даны кривая n и цилиндроид Г(a, b, Σ) (рис. 9.8). Построить точки пересечения линии и поверхности.

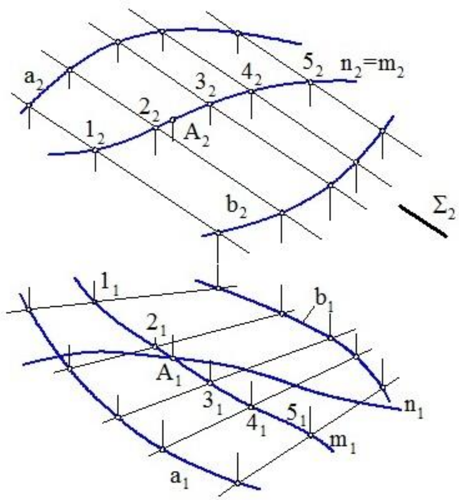


Рис. 9.8

Решение.

1. На поверхности цилиндроида вводим кривую m, фронтально конкурирующую с линией n. Эти кривые пересекаются (в общем случае), т.к. расположены на одной фронтально проецирующей цилиндрической поверхности, у которой линия n – направляющая, а образующие перпендикулярны $П_2$.

2. Строим горизонтальную проекцию кривой $m(m_1)$ $(m \subset Г)$.

3. Находим горизонтальную проекцию точки $A(A_1)$ - $A_1 = n_1 \cap m_1$, а затем и $A_2(A_2 \subset n_2)$.

Пример 3. Даны прямая n и коническая поверхность (рис. 9.9). Построить точки пересечения линии и поверхности.

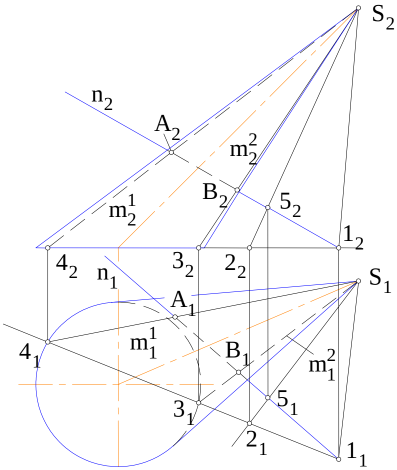


Рис. 9.9

Решение. Поставленную задачу также можно решить, задав на конической поверхности линию m, конкурирующую с прямой n относительно плоскости проекций $П_1$ или $П_2$. Полученные кривые будут лекальные, что требует значительных построений и снижает точность решения задачи. Так как заданная поверхность линейчатая, то в качестве линии m на поверхности целесообразно взять прямую (или прямые). Тогда алгоритм решения задачи будет следующим:

1. Спроецируем из точки S прямую n на плоскость $П_1$, т.е. определим центральную проекцию прямой n на плоскость $П_1$. Для этого проводим два проецирующих луча через точки 1 и 5 прямой до пересечения с плоскостью проекций $П_1$. Точки 1 и 2 задают центральную проекцию прямой n на $П_1$.

2. Строим образующие m^1 и m^2 на конической поверхности, конкурирующие с n относительно $П_1$ при ее центральном проецировании.

3. Находим точки A и B пересечения прямой n с образующими m^1 и m^2. Точки A и B – искомые.

4. Устанавливаем видимость проекций прямой n.

9.4. Пересечение поверхностей

Линия пересечения двух поверхностей представляет собой в общем случае пространственную кривую. Любая точка этой линии принадлежит как первой, так и второй поверхностям и может быть определена в пересечении линий, проведенных на этих поверхностях. Тогда имеем следующие варианты решения данной задачи:

1) выбирают на одной из поверхностей конечное число линий и строят точки пересечения их с другой поверхностью);

2) выделяют на заданных поверхностях два семейства линий и находят их точки пересечения. Во втором варианте выделение пересекающихся пар кривых выполняют с помощью вспомогательных поверхностей посредников.

Рассмотрим подробнее алгоритм решения задачи с использованием поверхностей посредников. Этот способ заключается в следующем.

Пусть даны пересекающиеся поверхности Φ и Ψ (рис. 9.10). Введем вспомогательную секущую поверхность Θ^1. Эта поверхность называется посредником. Она пересечет поверхности Φ и Ψ по линиям m^1 и k^1, соответственно. Пересечение линий m^1 и k^1 даст точку M, принадлежащую искомой линии пересечения t, так как она принадлежит обеим поверхностям. Вводя ряд посредников, получаем семейство точек линии пересечения.

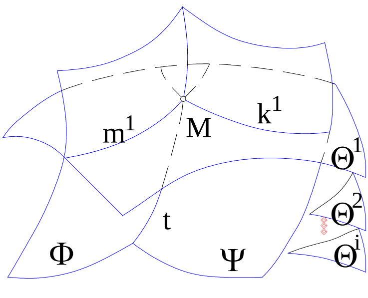


Рис. 9.10

В качестве поверхностей посредников наиболее часто применяют плоскости или сферы. В зависимости от вида посредников выделяют следующие наиболее часто применяемые способы построения линии пересечения двух поверхностей:

а) способ секущих плоскостей;

б) способ сфер.

Посредники выбираются так, чтобы линии m^i и k^i можно было легко построить, т.е. чтобы они были графически простыми (прямые или окружности).

Задача упрощается, если одна из поверхностей занимает проецирующее положение. Тогда эта поверхность вырождается в окружность (цилиндрическая) или многоугольник (призматическая). Одна из проекций искомой линии будет находиться на вырожденной проекции поверхности, а значит, известна. Вторая проекция линии находится из условия принадлежности ее поверхности. На рис. 9.11 показано построение линии пересечения цилиндрической и конической поверхностей вращения. Так как ось цилиндрической поверхности перпендикулярна Π_1, то на Π_1 поверхность проецируется в окружность. На эту же окружность проецируется и искомая линия. Точки A, B, C, D, E и F – опорные точки. Точки A и F принадлежат горизонтальному, а точка E – фронтальному контуру цилиндрической поверхности.

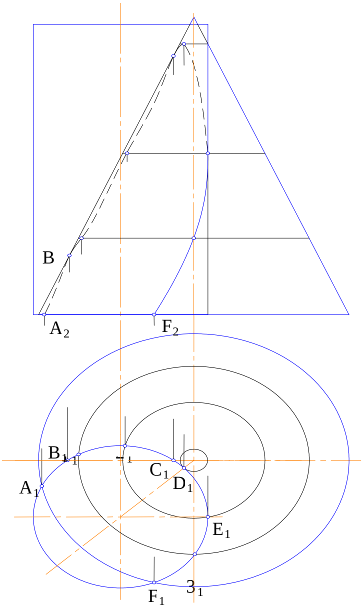


Рис. 9.11

На фронтальном контуре конической поверхности расположены точки B и C. Точка D – экстремальная.

Другие точки линии пересечения, обозначенные цифрами, – промежуточные. Фронтальные проекции линии построены из условия принадлежности ее конической поверхности.

9.5. Способ вспомогательных секущих плоскостей

Рассмотрим применение вспомогательных секущих плоскостей на примере построения линии пересечения сферы с конусом вращения (рис. 9.12, 9.13).

Решение. Заданные поверхности – поверхности вращения. Оси заданных поверхностей параллельны Π_2, (любой диаметр сферы может быть принят за ось вращения), а их общая плоскость симметрии параллельна фронтальной плоскости проекций. Следовательно, на заданных поверхностях можно выделить два семейства окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных горизонтальной плоскости проекций. Это значит, что для решения данной задачи можно использовать в качестве посредников горизонтальные плоскости уровня.

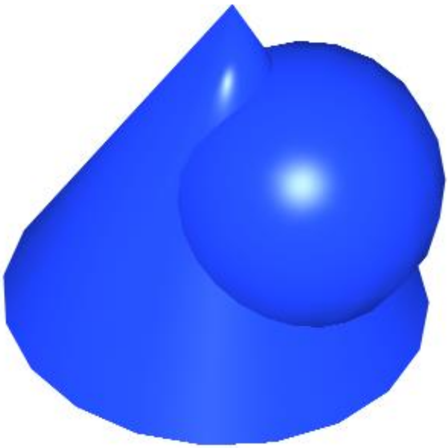


Рис. 9.12

Характерными точками проекций линии пересечения поверхностей являются точки A, B и C, D. Точки A, B находятся в пересечении очерковых образующих поверхностей, т.к. эти образующие расположены в общей плоскости симметрии поверхностей.

Точки C и D являются точками видимости горизонтальной проекции линии пересечения. Их построения выполнены в такой последовательности:

1) через центр сферы O проведена горизонтальная плоскость уровня Θ;

2) построена горизонтальная проекция окружности радиуса R^1, по которой плоскость Θ пересекает коническую поверхность; эта же плоскость пересекает сферу по экватору (окружности максимального радиуса);

3) построена горизонтальная проекция окружности радиуса R^1, по которой плоскость Θ пересекает коническую поверхность; эта же плоскость пересекает сферу по экватору (окружности максимального радиуса);

4) определены точки C_1, D_1 пересечения окружности радиуса R^1 с очерком сферы;

5) установлены фронтальные проекции точек $C(C_2)$, $D(D_2)$ из условия принадлежности их плоскости Θ.

Для построения промежуточных точек $1(1_1,1_2)$, $2(2_1,2_2)$, …, $6(6_1,6_2)$ линии пересечения заданных поверхностей используем плоскости Σ_2^1 , Σ_2^2 и Σ_2^3 . Полученные точки соединим плавной кривой линией. Видимость линии пересечения определяется на каждой поверхности отдельно. Затем устанавливаются участки, видимые одновременно для обеих поверхностей. Так, при проецировании коническая поверхность своих точек не закрывает, а сфера закрывает точки, расположенные ниже горизонтального контура.

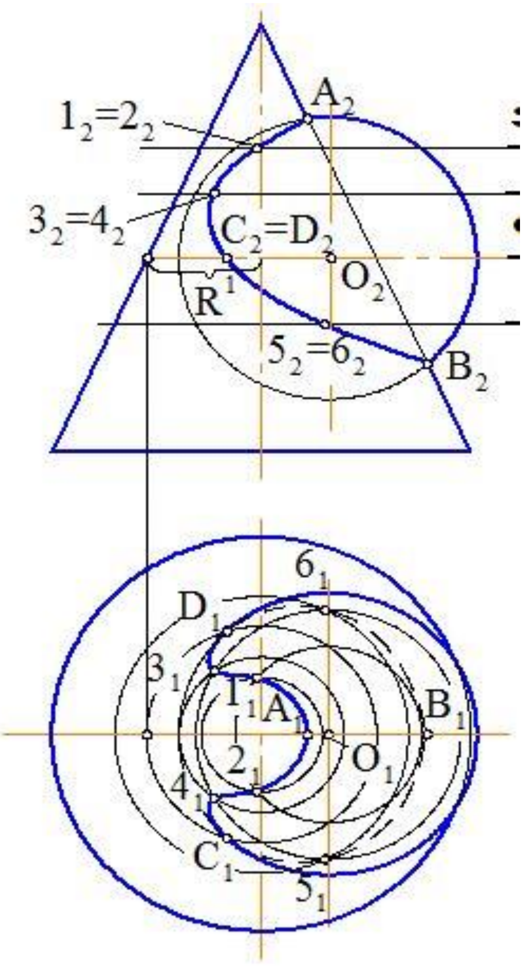
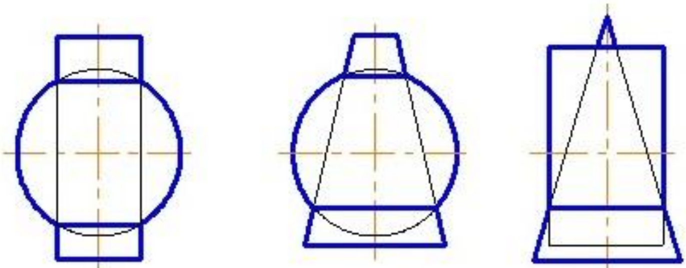


Рис. 9.13

Точки С и D, расположенные на горизонтальном очерке, отделяют видимую часть линии от невидимой. Невидимая часть показана штриховой линией. На $П_2$ проекции видимой части линии пересечения совпадает с проекцией невидимой, так как фронтальные очерки обеих поверхностей расположены в плоскости симметрии поверхностей.

9.6. Способ концентрических сфер

Этот способ широко используется при решении задач на построение линий пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями. В основе этого способа лежит следующее свойство поверхностей вращения: две соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, число которых равно числу точек пересечения их полумиридианов. Эти окружности лежат в плоскостях, перпендикулярных оси поверхностей вращения. У сферы любой диаметр можно принять за ось вращения. Следовательно, сфера с центром на оси поверхности вращения пересекает эту поверхность по одной или нескольким окружностям. Если ось поверхностей вращения параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость линия пересечения проецируется в отрезок прямой линии. На рис. 9.14, а и рис. 9.14, б показано пересечение сферы цилиндрической и конической поверхностями вращения, соответственно. На рис. 9.14, в приведены пересекающиеся соосные цилиндрическая и коническая поверхности вращения.

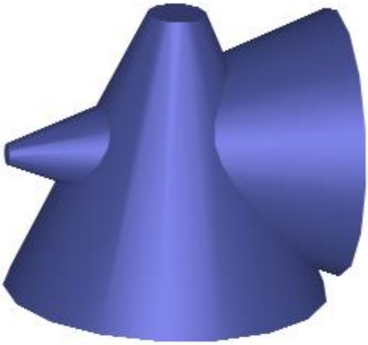


а)　　б)　　в)

Рис.9.14

Рассмотрим применение вспомогательных концентрических сфер – сфер с постоянным центром. Этот способ применяют при выполнении следующих условий:

а) пересекающиеся поверхности должны быть поверхностями вращения;



б) оси этих поверхностей должны пересекаться; точку их пересечения принимают за центр вспомогательных сфер;

в) плоскость симметрии поверхностей должна быть параллельна какой-либо плоскости проекций (в противном случае применяют преобразование чертежа).

Рис. 9.15

Рассмотрим построение линии пересечения конических поверхностей вращения. На рис. 9.15 показано наглядное изображение, а на рис. 9.16 – комплексный чертеж этих поверхностей. Поверхности и их расположение удовлетворяют приведенным выше условиям.

Прежде чем строить промежуточные точки, необходимо найти опорные точки линии пересечения. Точки A, B, K и L, а также E, F, C и D – это точки, принадлежащие контурам поверхностей. Их можно найти способом концентрических сфер или с помощью плоскостей посредников $\Sigma(\Sigma_2)$ и $\Delta(\Delta_1)$.

Рассмотрим теперь построение промежуточных точек на примере точек 5 и 6. Построения выполняем на фронтальной плоскости проекций. Сфера посредник $\Theta(\Theta_2)$ с центром в точке $O(O_2)$ пересекает конические поверхности по окружностям, которые на Π_2 проецируются в отрезки $m^i(m_2^i)$ и $n^i(n_2^i)$ (проекции двух других окружностей не показаны). Точки $5_2=6_2$ их пересечения являются фронтальными проекциями точек 5 и 6, которые принадлежат линии пересечения поверхностей, так как принадлежат каждой из этих поверхностей.

Горизонтальные проекции точек 5 и 6 находим из условия принадлежности точки поверхности. В данном случае используется принадлежность точек окружности m^i на «вертикальной» конической поверхности. Точки 5_2 и 6_2 находятся по линии проекционной связи на $m^i\,(m_1^i)$.

Аналогично можно построить любое количество точек искомой линии пересечения. Однако нужно иметь в виду, что не все сферы могут быть использованы для решения задачи. Рассмотрим предельные границы вспомогательных сфер.

Радиус сфер посредников изменяется в диапазоне

$$R_{max} \geq R \geq R_{min},$$

где R_{min} – минимальный радиус сферы, R_{max} – максимальный радиус сферы.

Сфера минимального радиуса R_{min} – это сфера, которая касается одной поверхности и пересекает другую (или тоже касается). На рис. 12.21 такая сфера касается «горизонтальной» конической поверхности. С помощью сферы минимального радиуса построены точки 1_2=2_2 и 3_2=4_2. Горизонтальные проекции точек 1, 2, 3 и 4 построены аналогично точкам 5 и 6.

Радиус максимальной сферы равен расстоянию от точки пересечения осей поверхностей до самой удаленной точки пересечения контурных образующих этих поверхностей. На рис 12.16 – $R_{max} = |O_2L_2|$.

Для установления видимости проекций линии пересечения анализируем расположение точек относительно контуров поверхностей. Так, относительно П1, видимым будет участок кривой, расположенный выше контура горизонтальной конической поверхности (вторая поверхность на видимость на П1 не влияет). Горизонтальная проекция невидимой части линии показана штриховой линией. Точки A, B и K, L принадлежат фронтальным контурам поверхностей и отделяют видимую часть линии пересечения от невидимой при проецировании на П2. Фронтальные проекции видимой и невидимой частей линии пересечения на рис. 12.16 совпадают.

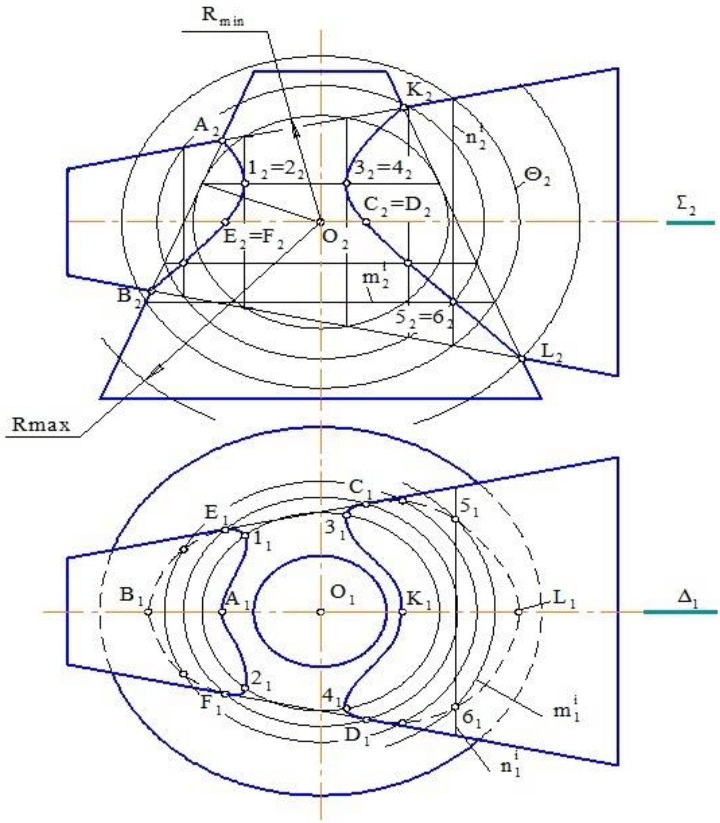


Рис. 9.16

9.7. Способ эксцентрических сфер

Способ эксцентрических сфер применяют при условии, что

1) одна из поверхностей – поверхность вращения, а другая – циклическая (имеет семейство окружностей);

2) поверхности имеют общую плоскость симметрии;

3) общая плоскость симметрии параллельна плоскости проекций (в противном случае следует применить преобразование чертежа).

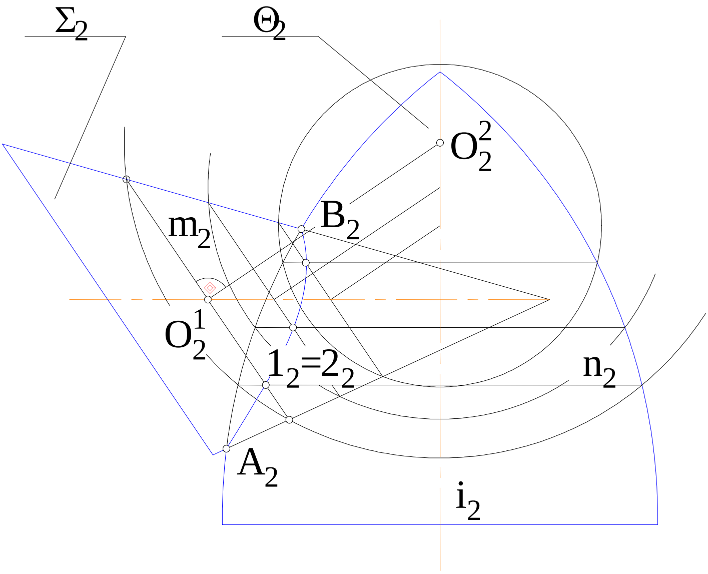


Рис. 9.17

Пример 1. Построить фронтальную проекцию линии пересечения поверхностей Σ и Θ, общая плоскость симметрии которых параллельна $П_2$ (рис. 9.17).

Решение. Заданные поверхности и их расположение удовлетворяют условиям применимости способа эксцентрических сфер, который и применяем для решения поставленной задачи.

Опорными точками являются точки $A(A_2)$ и $B(B_2)$, расположенные в пересечении очерковых образующих. Построение промежуточных точек выполняем в такой последовательности:

1) проводим на конической поверхности окружность, которая расположена в плоскости, параллельной ее основанию и на $П_2$ проецируется в отрезок – $m(m_2)$;

2) проводим перпендикуляр к плоскости окружности m через ее центр O1 и находим центр O2 сферы-посредника;

3) проводим проекции сферы с центром в точке O2 посредством крайних точек окружности m(m2);

4) строим окружность n(n2), по которой сфера пресекает поверхность вращения □;

5) определяем точки 12=22 пересечения построенных окружностей.

Проекции других точек линии пересечения определяют аналогично. На П2 проекции видимого и невидимого участков линии пересечения совпадут. Примечание. Предложите решение этой задачи, используя второе семейство окружностей на эллиптическом конусе (см. п. 12.5).

9.8. Пересечение поверхностей второго порядка

В общем случае две поверхности второго порядка пересекаются по пространственной кривой четвертого порядка. Следует отметить, что при некоторых особых положениях относительно друг друга поверхности второго порядка могут пересекаться по плоским кривым второго порядка, то есть пространственная кривая пересечения распадается на две плоские кривые. Условия распадения кривой четвертого порядка на две кривые второго порядка формулируются в виде следующих теорем.

Теорема 1. Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и еще по одной плоской кривой. Иллюстрацией этой теоремы является рис. 9.18, на котором показаны фронтальные проекции сферы и эллиптического конуса, пересекающихся по двум окружностям – $m(m_2)$ и $n(n_2)$. Окружность m параллельна основанию (плоскости окружности) конической поверхности, а окружность n построена в соответствии с теоремой 1.

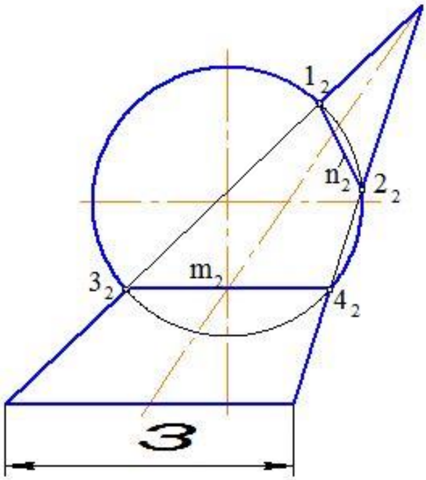


Рис. 9.18

Теорема 2 (теорема о двойном соприкосновении). Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках, то линия их взаимного пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка.

Плоскости этих кривых пройдут через прямую, соединяющую точки касания. На рис. 9.19 показано построение линии пересечения конической поверхности вращения и эллиптического цилиндра (оси поверхностей пересекаются и параллельны $П_2$). Линии пересечения – эллипсы – лежат во фронтально-проецирующих плоскостях, проходящих через прямую АВ, соединяющую точки касания А и В, а также точки 1, 2 и 3, 4 (точки пересечения очерков поверхностей).

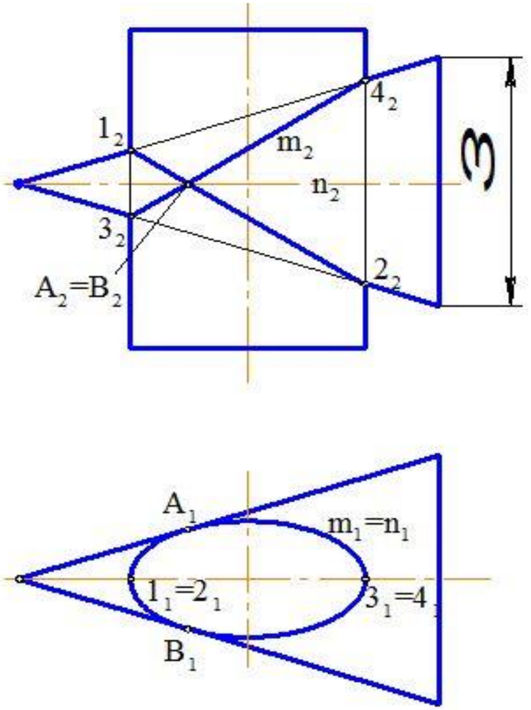


Рис .9.19

Теорема 3 (теорема Монжа). Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их взаимного пересечения распадается на две плоские кривые. Плоскости этих кривых пройдут через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания. Эта теорема является частным случаем теоремы 2. Если оси пересекающихся поверхностей вращения параллельны какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость кривые линии проецируются в отрезки прямых.

На рис. 9.20 приведен пример построения линии пересечения двух конических поверхностей вращения, оси которых пересекаются и параллельны $П_2$. Исходные поверхности описаны вокруг сферы и имеют с ними касание по окружностям $t(t_2)$ и $k(k_2)$. Эти окружности пересекаются в точках

1 и 2. Плоскости линий пересечения проходят через прямую 12 и точки пересечения очерков поверхностей A, D, B и C.

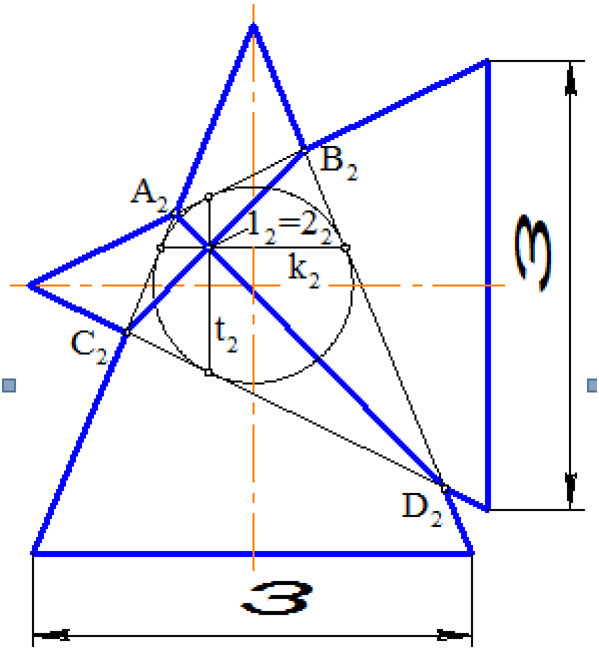


Рис. 9.20

ГЛАВА 10. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Определение. Если поверхность, представляемую в виде тонкой, гибкой и нерастяжимой пленки, можно путем изгибания совместить с плоскостью без разрывов и складок, то поверхность, обладающая этим свойством, называется развертывающейся, а фигура, полученная в результате совмещения поверхности с плоскостью, называется разверткой. В математике доказано, что к развертывающимся относятся лишь три группы линейчатых поверхностей: конические, цилиндрические и торсовые (поверхности касательных к пространственной кривой). У этих поверхностей вдоль каждой прямолинейной образующей существует единственная касательная плоскость, у остальных линейчатых поверхностей вдоль образующей прямой существует бесконечное множество таких плоскостей. Изгибание поверхности на плоскость приводит к соответствию, устанавливаемому между множеством точек поверхности и множеством точек ее развертки. Это соответствие обладает следующими свойствами:

1) точке поверхности соответствует единственная точка развертки и наоборот;
2) длины соответственных линий поверхности и ее развертки равны;
3) углы, образованные линиями на поверхности, равны углам, образованным соответствующими линиями на развертке;
4) площади соответственных фигур на поверхности и на развертке равны.

Из приведенных свойств вытекают следствия:

1) прямая линия поверхности преобразуется в прямую линию развертки;
2) 2) параллельные линии поверхности преобразуются в параллельные прямые ее развертки.

Для развертывающихся линейчатых поверхностей строятся графически приближенные развертки, поскольку в процессе построения развертки эти поверхности заменяются (аппроксимируются) вписанными или описанными многогранными поверхностями. Точные развертки аппроксимирующих многогранных поверхностей принимаются за приближенные развертки развертывающихся поверхностей. Для поверхностей, которые не являются развертывающимися, строятся условные развертки по следующей схеме:

НП $\Rightarrow$ РП $\Rightarrow$ ГП ~ ТР, где НП – неразвертывающая поверхность, РП – развертывающаяся поверхность, ГП – гранная поверхность, ТР – точная развертка, $\Rightarrow$ – этап аппроксимации предыдущей поверхности последующей. Поскольку в результате последовательных аппроксимаций исходная поверхность заменяется гранной, то рассмотрим вначале построения точных разверток гранных поверхностей.

10.1. Развертки гранных поверхностей

Определение. Разверткой гранной поверхности называется множество соединенных в плоскости многоугольников, конгруэнтных (равных) соответственно ее граням. Под соединением понимается последовательное размещение многоугольников развертки, которое соответствует последовательному расположению граней поверхности.

Задача. Дана пирамида SABC (рис. 10.1). Построить развертку ее поверхности.

Основание ABC пирамиды принадлежит плоскости проекций Π_1, поэтому $\Delta A_1B_1C_1$ – его НВ. Для определения НВ боковых ребер пирамиды воспользуемся методом прямоугольного треугольника (см. п. 8.1). $SS_0 \perp x$ – общая разность высот концов ребер данной пирамиды. Откладывая от точки S по оси X отрезки
$SB = S_1B_1$, $SC = S_1C_1$, $SA = S_1A_1$, получаем S_0B, S_0C, S_0A – НВ ребер пирамиды. Затем в стороне, используя известные правила построения треугольника по его сторонам, выполняем собственно построения развертки пирамиды.

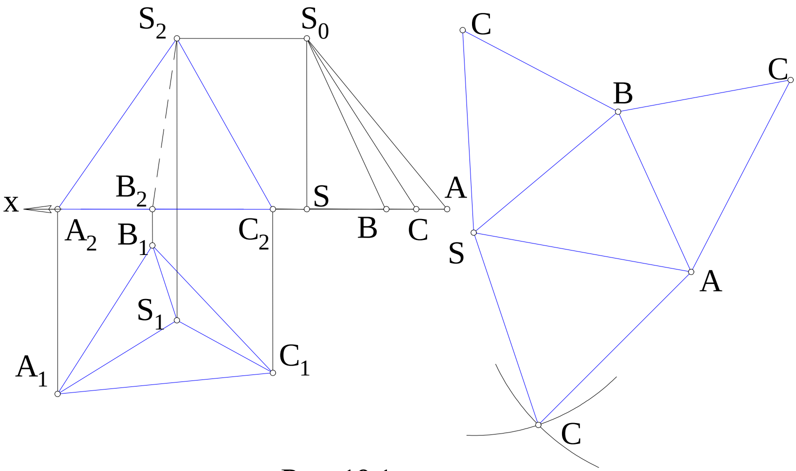


Рис. 10.1

Задача. Дана трехгранная призма $ABCA^1B^1C^1$ (рис. 10.2). Построить развертку призмы.

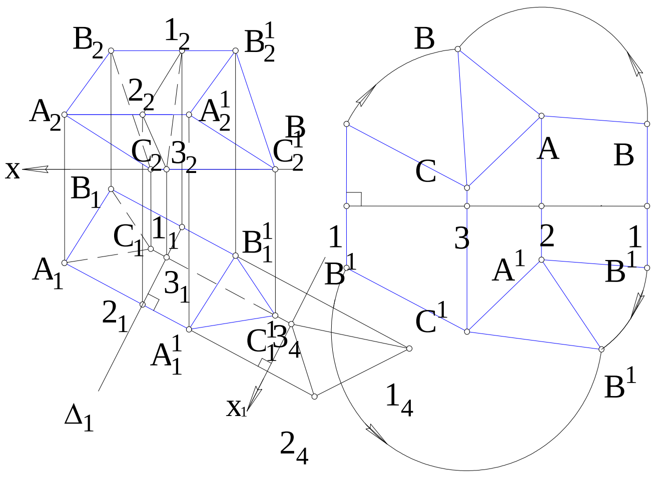


Рис. 10.2

Для построения развертки применим метод нормального сечения. Метод применим для призматических поверхностей, у которых боковые ребра представляют собой линии уровня. Последовательность построений в методе нормального сечения следующая:

1) призма рассекается плоскостью Δ перпендикулярно ее ребрам;

2) определяются НВ сторон многоугольника, по которым плоскость Δ пересекает поверхность призмы;

3) многоугольник как ломаная линия разворачивается в отрезок прямой, внутри которой отмечаются точки, соответствующие вершинам многоугольника;

4) через эти точки проводятся прямые, перпендикулярные отрезку – развертке многоугольника;

5) на перпендикулярных прямых от указанных точек откладываются отрезки, представляющие НВ соответствующих отрезков ребер пирамиды;

6) концы отрезков ребер последовательно соединяются отрезками прямых линий;

7) к построенной развертке боковой поверхности достраиваются НВ многоугольников – оснований призмы.

Применим изложенную последовательность к нашей задаче. Поскольку ребра призмы AA^1, BB^1, CC^1 по условию задачи являются горизонталями, то $A^1A^1_1$, $B^1B^1_1$, $C^1C^1_1$ есть НВ этих ребер. Рассечем боковую поверхность призмы плоскостью Δ, перпендикулярной ее ребрам. Поскольку ребра являются горизонталями, то $\Delta \perp \Pi_1$ и Δ_1 – горизонтальный след плоскости Δ. $1_1 2_1 3_1$ и $1_2 2_2 3_2$ – проекции нормального сечения призмы. Проекция $\Delta\ 1_4 2_4 3_4$ представляет собой НВ нормального сечения, построенную методом замены плоскостей проекций, где $x_1 \parallel \Delta_1$. В стороне от КЧ, на горизонтальной прямой, последовательно располагаем отрезки $13 = 1_4 3_4$, $32 = 3_4 2_4$, $21 = 2_4 1_4$ и проводим через их концы вертикальные прямые. На этих прямых откладываем отрезки:

$1B = 1_1B_1$, $1B^1 = 1_1B_1^1$; $3C = 3_1C_1$, $3C^1 = 3_1C_1^1$; $2A = 2_1A_1$, $2A^1 = 2_1A_1^1$.

Многоугольник $BCABB^1A^1C^1B^1$ представляет собой развертку боковой поверхности заданной призмы. Достроив к ней ΔABC и $\Delta A^1C^1B^1$, получаем полную развертку призмы.

Задача. Дана призма $ABCA^1C^1B^1$ (рис. 10.3). Построить ее развертку.

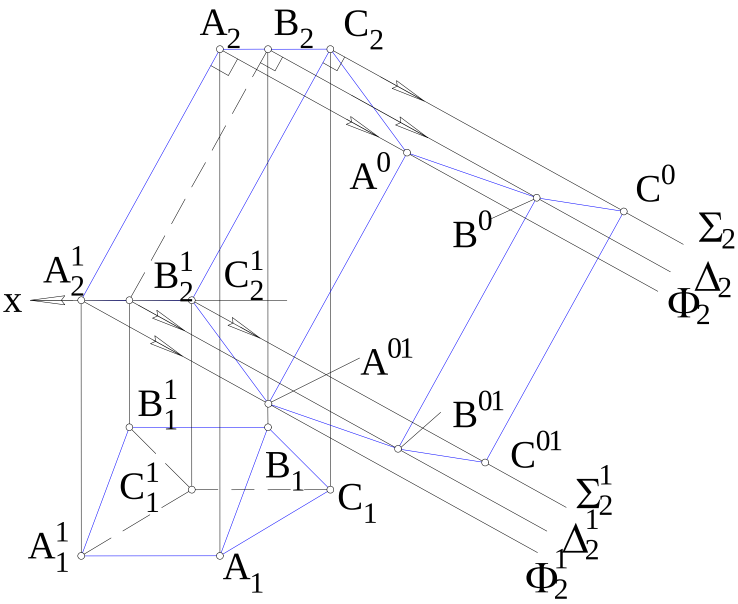


Рис. 10.3

Для построения развертки призмы можно использовать известный метод раскатки. Его применение возможно для таких призматических поверхностей, у которых боковые ребра и плоскости оснований являются прямыми и плоскостями уровня. Суть метода заключается в последовательном вращении граней призмы вокруг ее боковых ребер до положения совмещения с плоскостью, которая проходит через одно из ребер и параллельна плоскости проекций, т.е. каждая грань оставляет свой «отпечаток» в этой плоскости. Множество последовательно полученных и расположенных «отпечатков» в плоскости представляет собой развертку боковой поверхности призмы. Рассмотрим решение данной задачи. Боковые ребра призмы являются фронталями, а плоскости оснований – горизонтальными плоскостями уровня.

Условия задачи соответствуют методу раскатки. Пусть первое вращение – вращение грани ACC^1A^1, происходит вокруг оси CC^1. Повернем эту грань до совмещения с плоскостью развертки, проходящей через ребро CC^1 и параллельной плоскости проекций $П_2$. В этом случае вершины A и A^1 будут вращаться в проецирующих плоскостях $Ф \perp П_2$ и $Ф^1 \perp П_2$ соответственно, которые перпендикулярны ребру AA^1. Совмещенные положения A^0 и A^{01} вершин A и A^1 будут принадлежать фронтальным следам $Ф_2$ и $Ф_2{}^1$ плоскостей $Ф$ и $Ф^1$ соответственно и отстоять от точек C_2 и $C_2{}^1$ на расстоянии $C_2A^0 = C_2{}^1A^{01} = A_1C_1 = A_1{}^1C_1{}^1$. Следующим вращением вокруг оси A^0A^{01} добиваемся совмещения грани ABB^1A^1 с плоскостью развертки. При этом совмещенные положения B^0 и B^{01} вершин B и B^1 соответственно будут принадлежать фронтальным следам Δ_2 и $\Delta_2{}^1$ плоскостей $\Delta \perp П_2$ и $\Delta^1 \perp П_2$ и отстоять от точек A^0 и A^{01} на расстоянии $B^0A^0 = B^{01}A^{01} = B_1A_1 = B_1{}^1A_1{}^1$. Последнее, третье вращение, будет происходить вокруг оси B^0B^{01} и позволит получить совмещение грани BCC^1B^1 с плоскостью развертки, при этом совмещенные положения C^0 и C^{01} вершин C и C^1 будут принадлежать фронтальным следам Σ_2 и $\Sigma_2{}^1$ проецирующих плоскостей $\Sigma \perp П_2$ и $\Sigma^1 \perp П_2$ и отстоять от точек B^0 и B^{01} на расстоянии $C^0B^0 = C^{01}B^{01} = C_1B_1 = C_1{}^1B_1{}^1$. Полученный в итоге построений многоугольник $C_2A^0B^0C^0C^{01}B^{01}A^{01}C_2{}^1$ будет представлять собой развертку боковой поверхности заданной призмы.

10.2. Приближенные развертки развертывающихся поверхностей

Построение приближенных разверток выполняется в следующей последовательности:

1) заданную развертывающуюся линейчатую поверхность заменяют (аппроксимируют) гранной поверхностью;

2)строят точную развертку гранной поверхности;

3)точную развертку принимают за приближенную развертку заданной поверхности.

Для некоторых линейчатых развертывающихся поверхностей нет необходимости в их замене гранными поверхностями. Так, например, отсек цилиндрической поверхности вращения радиуса r и высотой h имеет разверткой прямоугольник со сторонами h и 2πr (рис. 10.4).

Разверткой конической поверхности вращения высотой h и основанием радиуса r является сектор радиуса R = $\sqrt{r^2 + h^2}$ с углом α = $\dfrac{2\pi r}{R}$ (рис. 10.5). Рассмотрим пример построения приближенных разверток.

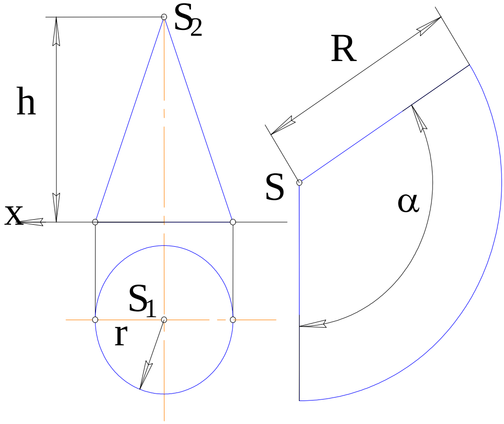


Рис. 10.5

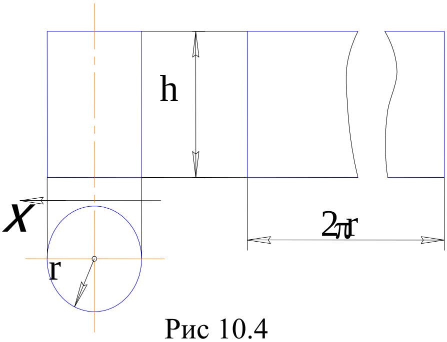


Рис 10.4

Задача. Дан отсек конической поверхности (рис. 10.6). Построить его приближенную развертку.

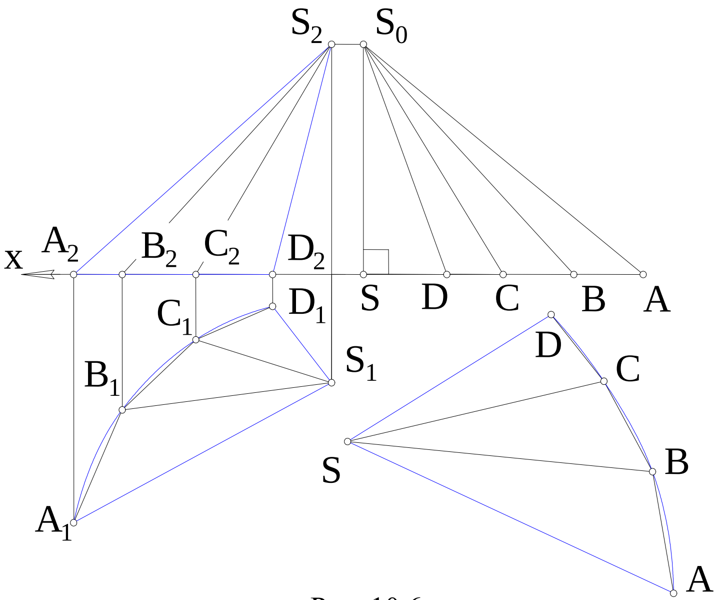


Рис. 10.6

Плоскую кривую линию – направляющую конической поверхности вначале заменяют вписанной ломаной линией $ABCD(A_1B_1C_1D_1,\ A_2B_2C_2D_2)$, которая по условию задачи принадлежит плоскости проекций $П_1$ и поэтому $A_1B_1C_1D_1$ – ее НВ. Затем соединяют вершины ломаной с вершиной S конической поверхности и получают вписанную пирамидальную поверхность SABCD, которой заменяют данную коническую поверхность. Используя метод прямоугольного треугольника, строят диаграмму НВ ребер вписанной пирамидальной поверхности. При этом SS_0 – общая разность высот концов ребер пирамиды; $SD = S_1D_1$, $SC = S_1C_1$, $SB = S_1B_1$, $SA =$
$= S_1A_1$; S_0D, S_0C, S_0B, S_0A – представляют собой НВ ребер пирамиды. SDCBA развертка боковой поверхности заданного конического отсека.

Задача. Дан отсек поверхности эллиптического цилиндра (рис. 10.7). Построить развертку ее боковой поверхности.

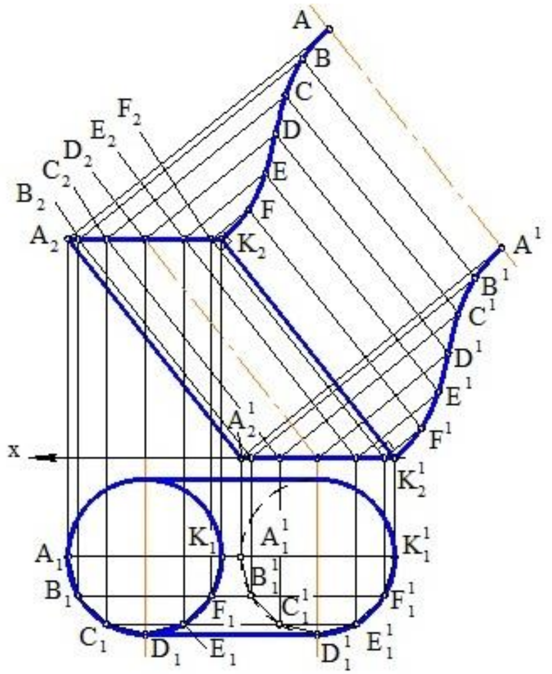


Рис. 10.7

Впишем в данную поверхность некоторую призматическую поверхность, разделив направляющую линию цилиндра – окружность, на равное число частей, например на 12 (на рисунке, в силу симметричности заданной поверхности, для простоты построений выполнено деление половины поверхности на 6 частей). Боковые ребра вписанной призмы являются фронталями, а ее основания – многоугольники принадлежат горизонтальным плоскостям уровня. По этой причине боковые ребра проецируются на $П_2$ в НВ, а многоугольники оснований – в НВ на $П_1$.

Отмеченные условия задачи соответствуют методу раскатки для построения развертки вписанной призмы. Поскольку призма имеет плоскость симметрии, проходящую через линию центров образующих эллиптический цилиндр окружностей и являющуюся фронтальной плоскостью уровня, то для сокращения построений выполним построения развертки только половины призмы. Вращение призмы по методу раскатки следует начинать с ребра $КК^1$ ($К_1К_1^1$, $К_2К_2^1$). Поэтому плоскостью развертки призмы будет фронтальная плоскость уровня, проходящая через ребро $КК^1$. Последовательным вращением вокруг ребер призмы добиваемся совмещения всех ее граней с плоскостью развертки. При этом $К_2F = К_2^1F^1 = К_1^1F_1^1 = К_1F_1$; $FE = F^1E^1 = F_1^1E_1^1 = F_1E_1$ и т. д. Полученный многоугольник ABCD… $D^1C^1B^1A^1$ представляет собой точную развертку половины боковой поверхности вписанной призмы, которая в свою очередь определяет приближенную развертку соответствующей половины поверхности эллиптического цилиндра.

10.3. Условные развертки не развертывающихся поверхностей

Рассмотрим несколько примеров, следуя указанной ранее схеме построения условной развертки поверхности.

Задача. Дана поверхность вращения (рис. 10.8). Построить ее развертку. Очевидно, данная поверхность не является развертывающейся и для нее можно построить лишь условную развертку. Разделим поверхность вращения осевыми плоскостями Δ^i, где i = 1, 2, 3, …, на равное число частей (отсеков) и выберем одну из них (например, шестую часть), ограниченную проецирующими плоскостями Δ^1 и Δ^2 , имеющими горизонтальные следы Δ_1^1 и Δ_2^1. Примем очерковую линию $t(t_1, t_2)$ за направляющую линию цилиндрической поверхности с отрезками ее фронтально - проецирующих образующих между плоскостями Δ^1 и Δ^2.

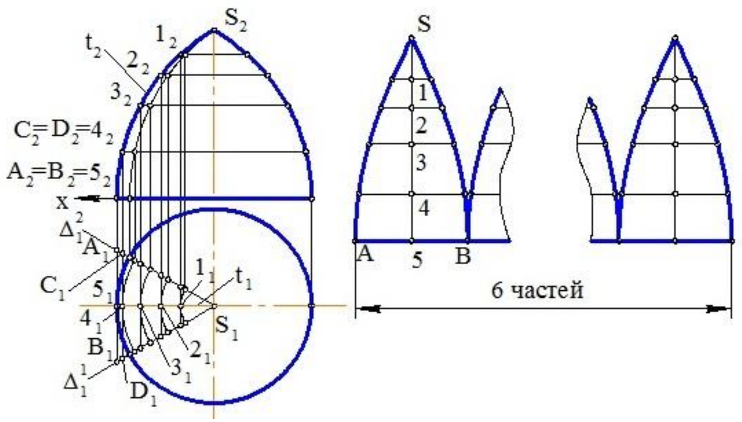


Рис. 10.8

Отсеком этой поверхности выполнена аппроксимация выбранной части исходной поверхности. В соответствии со схемой построения условной развертки выполним вторую аппроксимацию, заменив отсек цилиндрической поверхности отсеком призматической поверхности. Для этого выберем на направляющей t ряд точек, например S, 1, 2, 3, 4, 5, и проведем через них фронтально проецирующие образующие, например, AB э 5. Отрезки этих прямолинейных образующих между осевыми плоскостями Δ^1 и Δ^2 заменяют соответствующие отрезки параллелей (окружностей) исходной поверхности и являются ребрами призматической поверхности, а ломаная линия S12345, вписанная в линию t, является направляющей линией этой поверхности. Точная развертка призматической поверхности, вписанной в цилиндрическую поверхность, будет служить приближенной разверткой описанной цилиндрической поверхности и условной разверткой отсека исходной поверхности вращения. Для построения развертки отсека вписанной призматической поверхности проведем в стороне от исходного КЧ горизонтальную линию и выберем на ней точку 5. По обе стороны от точки 5 отметим горизонтально и симметрично точки A и B такие, что AB = A_1B_1. Вертикально от точки A отложим отрезок 54 = 5_24_2. Затем от точки 4 горизонтально и симметрично отметим точки C и D такие, что

$CD = C_1D_1$ и т. д. В итоге построений получаем два ряда тачек, симметричных относительно линии 5S. Соединив точки каждого ряда лекальными кривыми, получим условную развертку выделенного отсека исходной поверхности. Присоединив к ней такие же (равные) развертки остальных отсеков, получим полную условную развертку поверхности.

ГЛАВА 11. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В переводе с греческого языка слово «аксонометрия» означает измерение по осям. Особенностью аксонометрического проецирования является то, что вместе с фигурой на плоскость проецируется и пространственная система координат, связанная с этой фигурой. При этом ни одна из осей системы координат не проецируется в точку. Использование аксонометрического проецирования позволяет повысить наглядность изображения фигуры.

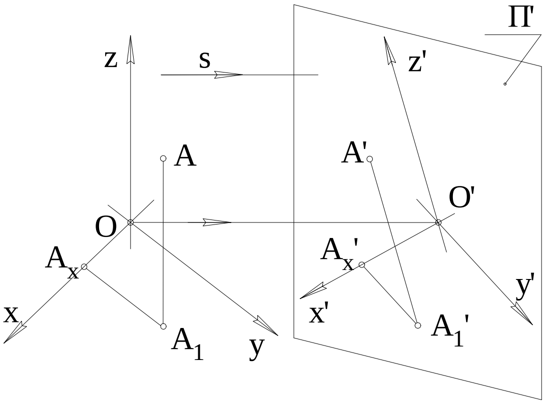


Рис. 11

Рассмотрим проекционную схему получения аксонометрической проекции простейшей фигуры – точки (рис. 11). Точка А и пространственная система координат Oxyz связаны координатной ломаной OA_xA_1A, звеньями которой являются координатные отрезки $|OA_x| = |x_A|$, $|A_xA_1| = |y_A|$, $|A_1A| = |z_A|$. Плоскость П' – аксонометрическая плоскость, s – направление проецирования. Все проецирующие прямые параллельны s. Если прямая s не перпендикулярна П', то имеем косоугольное проецирование и получим косоугольную аксонометрическую проекцию. Если прямая s перпендикулярна П', то имеем ортогональное проецирование и получим ортогональную (прямоугольную) аксонометрическую проекцию.

В дальнейшем рассматривается ортогональное проецирование и ортогональные аксонометрические проекции.

На плоскости П' после проецирования получим: A' – аксонометрическая проекция точки A; O'x'y'z' – аксонометрическая система координат (проекция системы Oxyz); x', y', z' – аксонометрические оси (проекции осей x, y, z); A_1' – аксонометрическая проекция горизонтальной проекции точки A, или вторичная проекция точки A; $O'A_x'$ A_1' A' – аксонометрическая координатная ломаная (проекция ломаной OA_xA_1A). Звенья аксонометрической координатной ломаной параллельны соответствующим аксонометрическим осям, так как параллельные прямые проецируются в параллельные прямые.

Пусть угол между осью x и осью x' (проекция x на П') равен α, между y и y' – β, между z и z' – γ. Если отрезок расположен на оси x или на линии параллельной оси x, то его угол наклона к плоскости П' равен α, если – на оси y, то – β, если – на оси z, то – γ. Тогда $|O'A_x'| = |OA_x|\cos\alpha$, $|A_x'A_1'| = |A_xA_1|\cos\beta$, $|A_1'A'| = = |A_1A|\cos\gamma$. Введем следующие обозначения: $u = \cos\alpha$; $v = \cos\beta$; $w = \cos\gamma$. Числа u, v, w называются коэффициентами искажения по аксонометрическим осям x', y', z' соответственно. Зная координаты точки $A(x_A; y_A; z_A)$ и коэффициенты u, v, w, можно найти аксонометрические координаты точки $A' (x_A';y_A';z_A')$: $x_A' = x_Au$; $y_A' = = y_Av$; $y_A' = y_Aw$. Для коэффициентов искажения справедлива зависимость

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2, \qquad (11.1)$$

которую принимаем без доказательства.

Поскольку проекции фигуры на параллельные плоскости равны, то вместо П' (рис. 14.1) можно взять любую плоскость ей параллельную. Для повышения наглядности ортогональных аксонометрических проекций положительные полуоси осей x, y, z располагают в одном полупространстве относительно аксонометрической плоскости, проведенной через начало координат (рис. 11, точка O). При этом углы α, β, γ будут более нуля, но менее девяноста градусов. Тогда коэффициенты u, v, w (косинусы этих углов) будут менее единицы, но более нуля.

Если известны коэффициенты искажения u, v, w, то легко найти углы α, β, γ (α = arcos u, β = arcos v, γ = arcos w). Зная коэффициенты искажения u, v, w и определив по ним углы α, β, γ, можно найти углы между аксонометрическими осями. Формула (11.1) для расчета проекции угла, которая при проецировании прямого угла ($\varphi = 90^0$) на плоскость П' ($\varphi_1 = \varphi\,'$) имеет вид

$$\cos\varphi\,' = -\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta. \qquad (11.2)$$

Например, угол между осями x и y равен 90°, т.е. (x,y) = 90°, он проецируется на плоскость П' в угол между осями x' и y'. По формуле (11.2) $\cos(x',y') = -\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$, где α – угол между x и x', β – угол между y и y'. По величине косинуса найдем угол между аксонометрическими осями x' и y'. Аналогично можно найти и два других угла.

Обратим внимание на то, что углы между аксонометрическими осями более 90° (тупые), т.е. прямые углы между осями проецируются в тупые углы между аксонометрическими осями. Действительно, в формуле (11.1) тангенсы острых углов более нуля, значит, косинус проекции угла отрицателен, т.е. проекция угла более 90°.

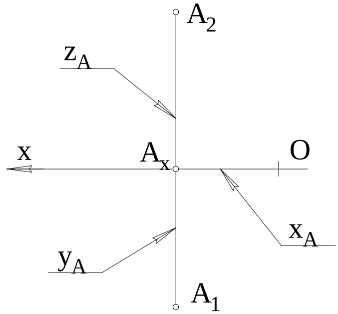


Рис. 11.1

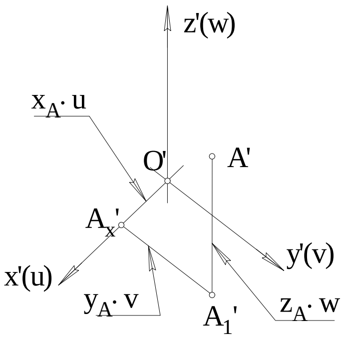


Рис.11.2

Рассмотрим построение аксонометрической проекции точки А по комплексному чертежу этой точки (рис. 14.1). Пусть на аксонометрической плоскости П' известно положение осей x', y', z' и известны коэффициенты искажения по этим осям u, v, w (рис. 11.1). Обратим внимание на то, что на рис. 11.2 аксонометрическая плоскость является плоскостью чертежа. Ось z' всегда располагается вертикально. Замерив на комплексном чертеже соответствующие отрезки, узнаем координаты x_A, y_A, z_A. Умножим координаты на коэффициенты искажения, построим аксонометрическую координатную ломаную $OA_x'A_1'A'$ и аксонометрическую проекцию точки А – точку А'. Если какая – либо координата менее нуля (отрицательная), то аксонометрический координатный отрезок (звено аксонометрической координатной ломаной) откладывается в противоположную сторону относительно положительного направления, указанного стрелкой на аксонометрической оси.

11.1. Ортогональная (прямоугольная) изометрическая проекция

Ортогональная изометрическая проекция (изометрия) является ортогональной аксонометрической проекцией при u = v = w. По формуле (14.1) получим u =v = w = 0,82. По формуле (11.2) определим, что угол между любыми осями 120°.

Построение изометрии точки выполняется так же, как показано на рис. 11.1, 11.2. Каждую координату точки необходимо умножить на 0,82. Такая изометрия называется точной или теоретической. Если изометрию точки выполнить в масштабе 1,22: 1, то координату точки нужно умножить на 0,82 (коэффициент искажения по оси), а затем умножить на 1,22 (увеличение из-за выполнения в масштабе), и тогда изометрическая координата, например, x_A' равна $0{,}82 \cdot 1{,}22 \cdot x_A = x_A$. Значит, при выполнении изометрии в масштабе 1,22 : 1 (масштаб приведения) можно координаты точки не умножать на коэффициенты искажения, а брать их такими же, как на комплексном чертеже. Изометрия, выполненная в масштабе 1,22 : 1, называется приведенной или практической, коэффициенты искажения при этом u = v = w = 1.

На рис. 11.3 показан комплексный чертеж куба со срезанной вершиной. На рис. 11.4 построена его приведенная изометрия.

Рядом с изометрией дана схема расположения изометрических осей с указанием коэффициентов искажения и масштаба приведения. На рис. 14.4 в качестве системы координат, связанной с кубом, взята Gtqr, а не система координат Oxyz комплексного чертежа, как на рис. 11.3, 11.4. Система Gtqr задана своими проекциями $G_1t_1q_1r_1$ и $G_2t_2q_2r_2$. Теперь эта система проецируется в изометрическую систему координат, и относительно нее берутся координаты вершин куба. Изометрию куба легко построить, если построить изометрию его вершин и соединить их. Постройте, в качестве упражнения, изометрию куба, связав с ним систему координат комплексного чертежа Oxyz, которая в этом случае будет проецироваться в изометрическую систему координат.

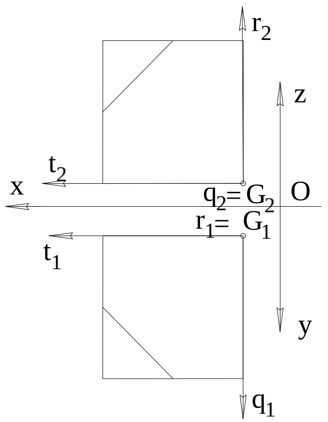


Рис. 11.3

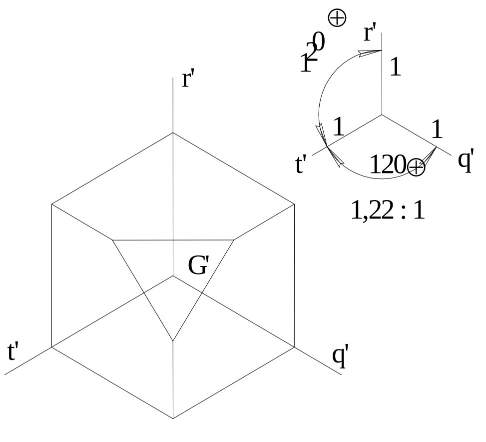


Рис. 11.4

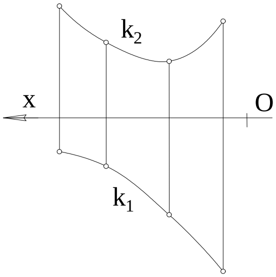


Рис. 11.5

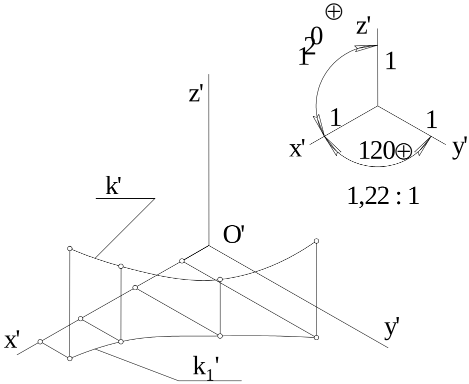


Рис. 11.6

На рис. 11.5 показан комплексный чертеж кривой k. На рис. 11.6 построена приведенная изометрия этой кривой. В качестве системы координат, связанной с кривой, взята система координат комплексного чертежа Oxyz, которая проецируется в изометрическую систему координат O'x'y'z'. Для построения изометрии кривой необходимо построить изометрию ряда ее точек и соединить их кривой линией. Так можно построить изометрию любой кривой, но для построения изометрии окружности удобно использовать специальные методы.

Пусть окружность диаметром d расположена в плоскости Oxy (или в плоскости, параллельной Oxy). Эта окружность проецируется на аксонометрическую плоскость в эллипс. Все диаметры эллипса, кроме одного, будут меньше диаметра окружности. Большой диаметр эллипса равен диаметру окружности и является проекцией диаметра окружности, расположенного на линии уровня, параллельной аксонометрической плоскости П'. Большой диаметр расположен на проекции линии уровня. Линия уровня «сохранит» не только длину диаметра d окружности, но и прямой угол с прямой линией, которая ей перпендикулярна (теорема о проецировании прямого угла). Ось z перпендикулярна плоскости Oxy, а значит, перпендикулярна любой прямой этой плоскости, в том числе и линии уровня. Тогда аксонометрическая проекция линии уровня, на которой расположен большой диаметр эллипса, перпендикулярна проекции оси z – аксонометрической оси z'. Малый диаметр эллипса перпендикулярен большому диаметру.

При выполнении изометрии в масштабе 1,22 : 1 большой диаметр будет равен 1,22d. Малый диаметр равен 0,71d (принимаем без вывода). Эллипс строится по большому и малому диаметрам. Повторяя все сказанное выше, для плоскостей Oxz и Oyz, получим расположение эллипсов, показанное на рис. 11.7. Окружность t, расположенная в плоскости Oxy или ей параллельной плоскости, проецируется на П' в эллипс t', который является изометрией окружности t. Изометрией окружности n, принадлежащей плоскости Oxz или ей параллельной плоскости, будет эллипс n'. Изометрией окружности k, принадлежащей плоскости Oyz или ей параллельной плоскости, будет эллипс k'. Изометрии окружностей, принадлежащих плоскостям Oxy, Oxz, Oyz или им параллельным плоскостям, строятся в такой последовательности: строится изометрия центра окружности; строятся большой и малый диаметры; по большому и малому диметрам строится ряд точек эллипса; точки эллипса соединяются плавной кривой.

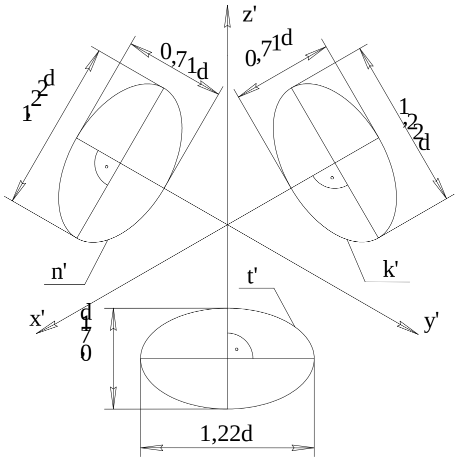


Рис. 11.7

Если окружность принадлежит плоскости общего положения, то прямой, перпендикулярной этой плоскости, на изометрии нет. Поэтому необходимо на комплексном чертеже через центр окружности провести отрезок прямой перпендикулярной плоскости окружности. Затем построить изометрию этого отрезка и провести большой диаметр перпендикулярно изометрии этого отрезка, через изометрию центра окружности. Большой диаметр равен 1,22d, где d – диаметр окружности. Далее, на комплексном чертеже окружности взять любую точку окружности и построить ее изометрию. Теперь на изометрии есть большой диаметр эллипса и одна его точка. Значит, можно выполнить построение эллипса по большому диаметру и точке.

11.2. Ортогональная (прямоугольная) диметрическая проекция

Ортогональная диметрическая проекция (диметрия) является ортогональной аксонометрической проекцией при u = w, v = 0,5u. По формуле (11.8) получим:
u = w = 0,94: v = 0,47. По формуле (14.2) определим, что угол между осями x' и y' равен $97^0$10', угол между осями x' и y' равен 131°25'.

Построение диметрии точки выполняется так же, как показано на рис. 11.8, 11.9. Коэффициенты искажения: u = w = 0,94; v = 0,47. Такая диметрия называется точной (теоретической). Точно так же, как в изометрии, вводится масштаб приведения, который в этом случае равен 1,06 : 1, так как 0,94·1,06 ≈ 1. Коэффициенты искажения при этом u = w = 1, v = 0,5. Диметрия, выполненная в масштабе 1,06: 1, называется приведенной (практической) диметрией.

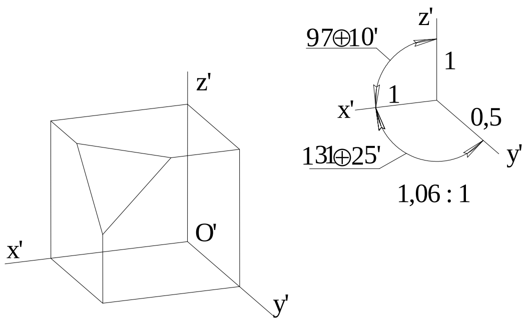


Рис. 11.8

На рис. 11.8 показана диметрия куба со срезанной вершиной, комплексный чертеж которого приведен на рис. 11.8. Рядом с диметрией дана схема расположения диметрических осей с указанием коэффициентов искажения и масштаба приведения. На рис. 11.9 показана диметрия кривой k, комплексный чертеж которой приведен на рис. 11.9

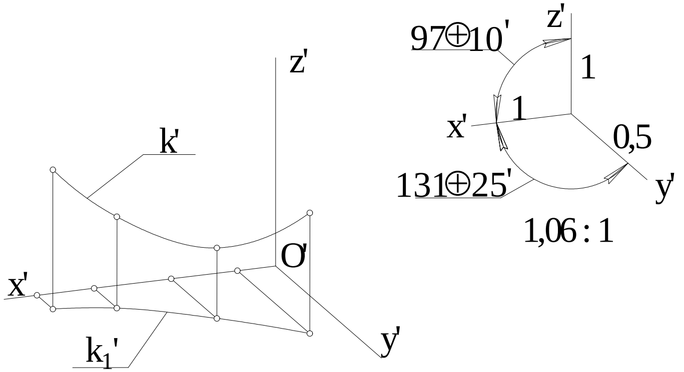


Рис. 11.9

Окружности t, n, k, расположенные в плоскостях Oxy, Oxz, Oyz или им параллельных плоскостях, проецируются в эллипсы t', n', k' (рис. 11.10). Большие диаметры равны 1,06d, так как масштаб приведения 1,06 : 1. Малый диаметр у t' и k' равен 0,35d, у n' – 0,94d (принимаем без вывода).

Диметрия окружности, принадлежащей плоскости общего положения, строится так же, как и изометрия. Большой диаметр эллипса равен 1,06d, где d – диаметр окружности.

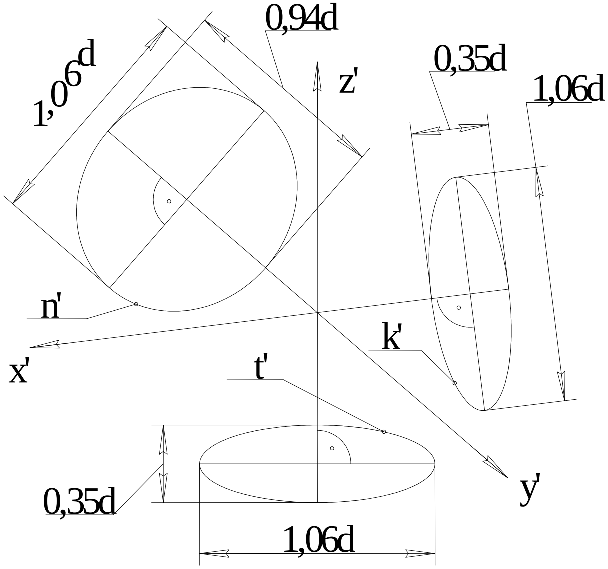


Рис. 11.10

В построении изометрии и диметрии фигуры много общего, так как изометрия и диметрия – это частные случаи (конкретные виды) прямоугольной аксонометрической проекции, но есть и отличия, вызванные тем, что у изометрии и диметрии разные коэффициенты искажения по осям.

В курсе инженерной графики при выполнении изометрии и диметрии деталей для повышения наглядности делается вырез части детали. На рис. 11.10, 11.11 показаны изометрия и диметрия куба с цилиндрическим отверстием. Направление штриховки в каждой из плоскостей определяется по треугольнику штриховки, который добавлен к изображению осей. Вершины треугольников штриховки лежат на осях и удалены от начала координат на расстояния, пропорциональные коэффициентам искажения. В изометрии эти расстояния равны между собой (u = v = w = 1), в диметрии расстояние по оси y в два раза меньше, чем по осям x и z (u = w =1, v = 0.5).

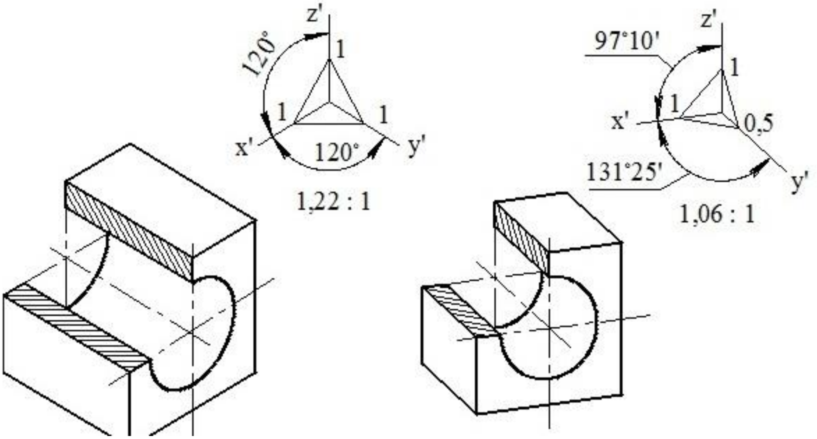
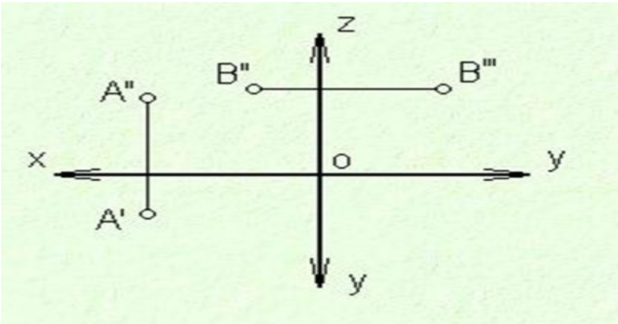


Рис.11.11

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Какие геометрические элементы включает в себя аппарат проецирования?
2. Назовите условие принадлежности точки плоскости Н.
3. Построить проекции точек по их координатам: А(55, 20, 15); В(30, -10, 25); С(10, 0, 10).
4. Построить точку А по ее координатам (-20, -20, 15). В каком октанте расположена точка А?
5. Построить недостающие проекции точек А и В.

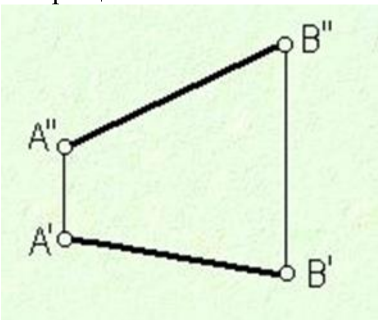


6. Какими элементами пространства можно задать плоскость?

7. Какие плоскости называются проецирующими? Что характерно для комплексного чертежа такой плоскости?

8. Построить линию пересечения треугольников АВС и DEK, координаты точек которых заданы: A(117, 90, 9); B(52, 25, 79); C(0, 83, 48); D(68, 110, 85); E(135, 19, 36); K(14, 52, 0). Определить видимость данных треугольников в проекциях.

9. Определить натуральную величину отрезка АВ и угол его наклона к фронтальной плоскости проекций V. Задачу решить способом вращения.



10. Найти точку пересечения плоскости Σ(a // b) и прямой (MK), указать видимость. Определить угол между прямой и плоскостью (рис.1).

11. Найти точки пересечения прямой e с поверхностью тора, указать видимость проекций прямой (рис. 2).

12. Построить линию пересечения поверхностей: а) рис. 3; б) рис. 4.

13. На прямой линии (CD) найти точку, равноудаленную от концов отрезка AB, если A(70; 30; 10), B(35; 15; 40), C(90; 20; 35), D(40; 30; 45).

14. Построить проекцию A_2B_2 отрезка AB, если его натуральная величина равна 70 мм и A(80; 30; 30), B(30; 60; …).

15. Построить равносторонний треугольник ABC, если задана его сторона AB и известно, что плоскость треугольника составляет 45° с плоскостью проекций $П_2$, A(125; 30; 20), B(80; 30; 40). Определить число решений.

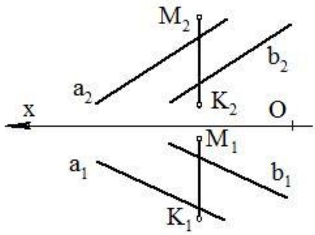


Рис.1

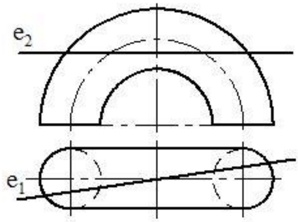


Рис .2

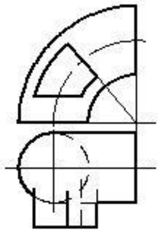


Рис. 3

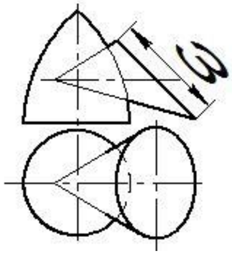


Рис.4

ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа по начертательной геометрии представляет собой выполненные чертежи (эпюры). Задания на контрольную работу индивидуальные. Вариант контрольной работы соответствует сумме двух последних цифр студенческого билета, например, студенческий билет имеет номер 332032, следовательно, студент выполняет задания по варианту №5. *Если номер заканчивается двумя нулями выбирают вариант 1.*

Контрольная работа представляется в деканат в полном объеме. Преподаватель рецензирует сданную работу, отмечает недостатки, если таковые имеются. На титульном листе преподаватель делает пометку о «зачете» или «незачете» работы, указывая при этом какие листы надо исправить или переделать. Если контрольная работа не зачтена, студент исправляет работу в соответствии с замечаниями и отдает ее на повторную рецензию.

Чертежи (эпюры) контрольной работы выполняются на листах чертежной бумаги (форматы указаны в рекомендациях к выполнению конкретных заданий). На форматах выполняют рамку. Для эпюров в правом нижнем углу выполняют основную надпись (см. рис. 4).

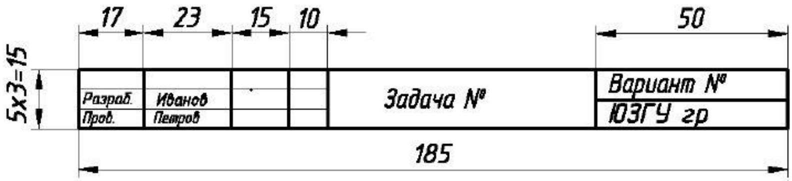


Рис. 4. Основная надпись для эпюров

Для машиностроительных чертежей основную надпись выполняют по ГОСТ 2.104 (рис. 4)

Эпюры выполняются с помощью чертежных принадлежностей сначала карандашом тонкими линиями, последующая обводка осуществляется карандашом или цветными шариковыми ручками.

При обводке шариковыми ручками исходные данные обводятся черным цветом, результат - красным, а линии построения синим или зеленым. Точки на эпюрах вычерчиваются полым кругом диаметром 1 – 2 мм. Видимые поверхности геометрических тел можно выделить бледными тонами красок, используя при этом цветные карандаши или акварельные краски.

Чертежи выполняются карандашом.

СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Титульный лист

Графическая работа (ГР.01) «Титульный лист» выполняется на формате А3.

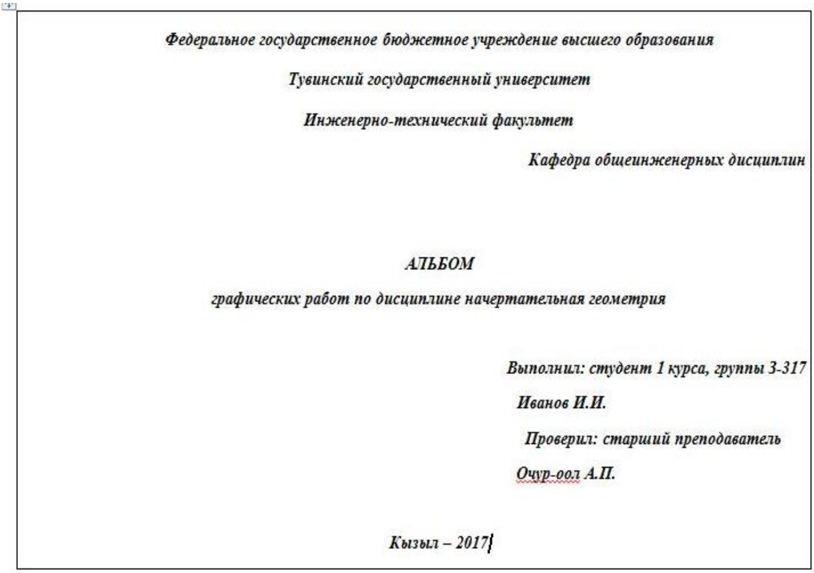
Цель работы: изучить шрифт по ГОСТ 2.304-81, приобрести навыки в выполнении текстовых надписей на чертеже.

Порядок выполнение работы: на формате А3 начертить рамку, отступив слева 20 мм, а сверху, снизу, справа по 5 мм, разлиновать строчки для написания текста по упрощенной сетке в соответствии с номером шрифта, как показано на рисунке 5.

а *б*

Рис. 5 Выполнение шрифта по упрощенной сетке
а – выполнение упрощенной сетки; *б* – выполнение шрифта.

Пример выполнения титульного листа и рекомендуемые номера шрифта для написания текста показаны на рисунке 5.



Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования

Тувинский государственный университет

Инженерно-технический факультет

Кафедра общеинженерных дисциплин

АЛЬБОМ

графических работ по дисциплине начертательная геометрия

Выполнил: студент 1 курса, группы 3-317

Иванов И.И.

Проверил: старший преподаватель

Очур-оол А.П.

Кызыл – 2017

Рис. 6. Пример выполнения титульного листа

Расчетно-графическая работа №1

Цель работы: приобретение навыков в решении комплексных задач.

Задание:

1) по заданным координатам вершин треугольников (табл.1) построить их проекции;
2) построить линию пересечения двух треугольников. Определить видимость;
3) определить натуральную величину треугольника *ABC*.

Указания к решению задачи. Работа выполняется на формате А3. Расположение задачи на формате А3 зависит от направления замены плоскостей проекций при определении натуральной величины треугольника *ABC*. Линия пересечения треугольников – прямая строится по двум общим точкам, при этом дважды решается задача на пересечение стороны одного треугольника со вторым треугольником, т.е. задача на пересечение прямой с плоскостью. Пример выполнения расчетно-графической работы (РГР) № 1 на рис. 5.

Задача на определение точки пересечения прямой с плоскостью решается по общему алгоритму:

1) заключить прямую во вспомогательную проецирующую плоскость;
2) определить линию пересечения вспомогательной плоскости с заданной;
3) отметить точку пересечения прямой с плоскостью;
4) определить видимость.

Пример решения задачи на определение точки пересечения прямой m с плоскостью α, заданной треугольником АВС, показан на рис. 7. Заключим прямую m во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость α.

Плоскость α пересекает треугольник *ABC* по прямой (12), лежащей одновременно в плоскости треугольника *ABC* и в плоскости α.

Таким образом, в плоскости α лежат прямые (12) и m, которые пересекаются в точке К. Точка К является искомой точкой пересечения прямой m с плоскостью.

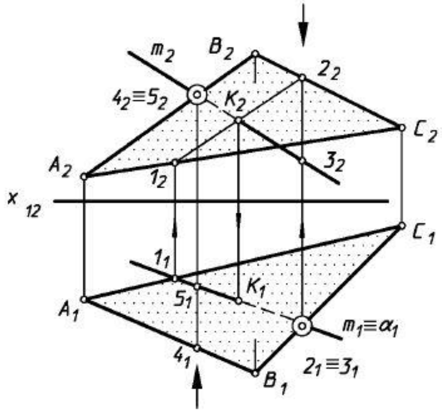


Рис. 7. Определение точки пересечения прямой с плоскостью

Для определения видимости прямой относительно горизонтальной плоскости проекций выбираем пару горизонтально – конкурирующих точек 2, 3 (условно считаем, что точка 3 принадлежит прямой m, а точка 2 – прямой BC) и определяем их фронтальные проекции.

Точка 2 имеет большую координату z, т.е. эта точка находится ближе к наблюдателю и закрывает точку 3 относительно плоскости π1. Следовательно, отрезок прямой (31К1), содержащий невидимую точку, будет невидим до точки К (находится под плоскостью ABC).

Аналогично определяется видимость относительно π2, используя пару фронтально-конкурирующих точек 4, 5.

Натуральная величина треугольника ABC определяется способом замены плоскостей проекций, при этом треугольник ABC приводится в положение, когда он будет параллелен дополнительной плоскости проекций.

При выполнении первой замены новая плоскость проекций π4 располагается перпендикулярно главной линии плоскости (горизонтали или фронтали). При этом треугольник проецируется на плоскость π4 в прямую линию, т.е. занимает проецирующее положение. При выполнении второй замены новая плоскость проекций π5 располагается параллельно треугольнику ABC.

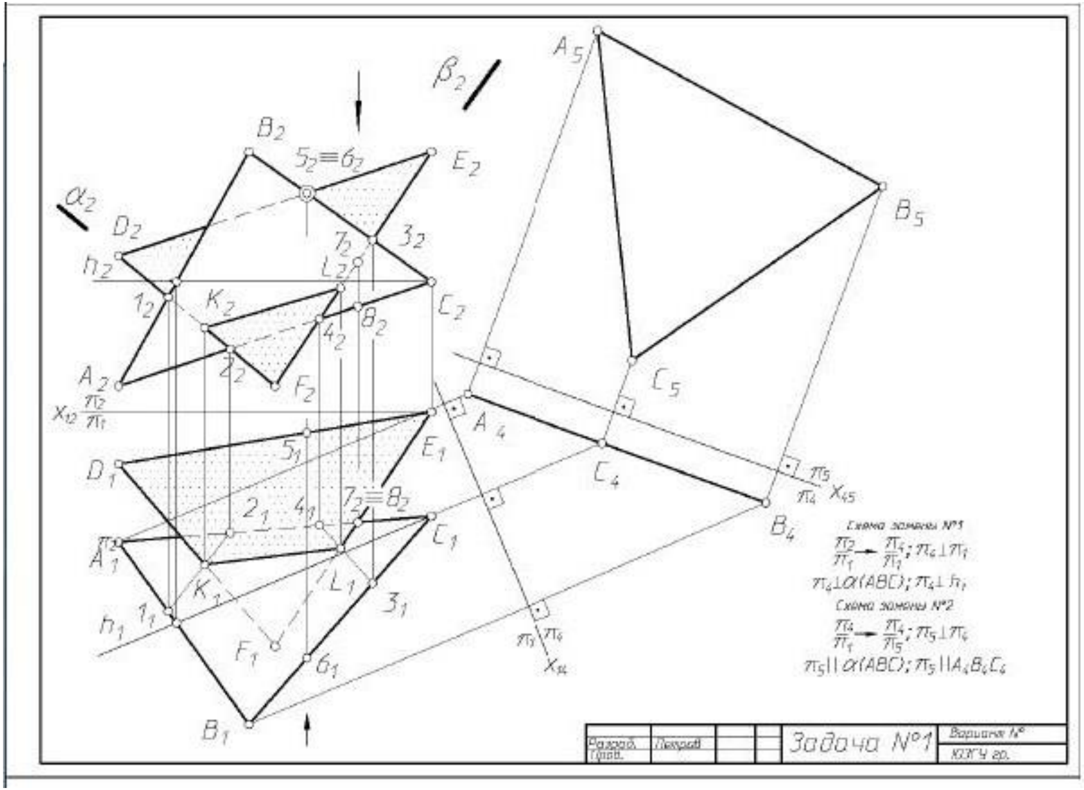


Рис. 8 Пример выполнения Расчетно-графической работы № 1

Таблица.1 (размеры, мм)

№ варианта	X_A	$У_A$	Z_A	X_B	$У_B$	Z_B	X_C	$У_C$	Z_C	X_D	$У_D$	Z_D	X_E	$У_E$	Z_E	X_K	$У_K$	Z_K
1	117	90	9	52	25	79	0	83	48	68	110	85	135	19	36	14	52	0
2	120	90	10	50	25	80	0	85	50	70	110	85	135	20	35	15	50	0
3	115	90	10	52	25	80	0	80	45	64	105	80	130	18	35	12	50	0
4	120	92	10	50	20	75	0	80	46	70	115	85	135	20	32	10	50	0
5	117	9	90	52	79	25	0	48	83	68	85	110	135	36	19	14	0	52
6	115	7	85	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	20	20	15	0	50
7	120	10	90	48	82	20	0	52	82	65	80	110	130	38	20	15	0	52
8	116	8	88	50	78	25	0	46	80	70	85	108	135	36	20	15	0	52
9	115	10	92	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	35	20	15	0	50
10	18	10	90	83	79	25	135	48	82	67	85	110	0	36	19	121	0	52
11	20	12	92	85	89	25	135	50	85	70	85	110	0	35	20	120	0	52
12	15	10	85	80	80	20	130	50	80	70	80	108	0	35	20	120	0	50
13	16	12	88	85	80	25	130	50	80	75	85	110	0	30	15	120	0	50
14	18	12	85	85	80	25	135	50	80	70	85	110	0	35	20	120	0	50
15	18	90	10	83	25	79	135	83	48	67	110	85	0	19	36	121	52	0
16	18	40	75	83	117	6	135	47	38	67	20	0	0	111	48	121	78	86
17	18	75	40	83	6	107	135	38	47	67	0	20	0	48	111	121	86	78
18	117	75	40	52	6	107	0	38	47	135	0	20	86	48	111	15	68	78

Расчетно-графическая работа №2

Цель работы: приобретение навыков в решении задач на пересечение геометрических тел проецирующей плоскостью.

Задание: построить три проекции комбинированного тела проецирующей плоскостью. Построить натуральную величину фигуры сечения.

Данные к РГР №2 приведены в таблице 2.

Пример выполнения РГР №2 приведен на рисунке 10

Заданная фигура, состоящая из прямой четырехугольной призмы (основание) и прямого кругового цилиндра, пересекается фронтально-проецирующей плоскостью α.

Фронтальная проекция сечения совпадает с фронтальным следом плоскости α, а горизонтальная проекция – с горизонтальным очерком заданных поверхностей, т.к. боковые поверхности призмы и цилиндра – горизонтально-проецирующие.

В сечении призмы плоскостью получаем прямоугольник 1, 1', 2, 2'.

Цилиндр пересекается плоскостью по эллипсу. Линию пересечения кривой поверхности с плоскостью строим по точкам. Точки 3, 3' находятся на нижнем основании цилиндра. Их фронтальные проекции совпадают с фронтальными проекциями точек 2, 2'. Точки 5,5' определяют малую ось эллипса и на профильной плоскости проекций принадлежат очерковым образующим.

Верхнее основание цилиндра пересекается плоскостью по фронтально-проецирующей прямой 7, 7'. Для уточнения линии пересечения на чертеже взяты две пары промежуточных точек.

Аксонометрическую проекцию усеченного тела начинаем с построения проекции призмы и цилиндра. Затем наносим точки 1,1' ? 7, 7' и соединяем их в определенной последовательности.

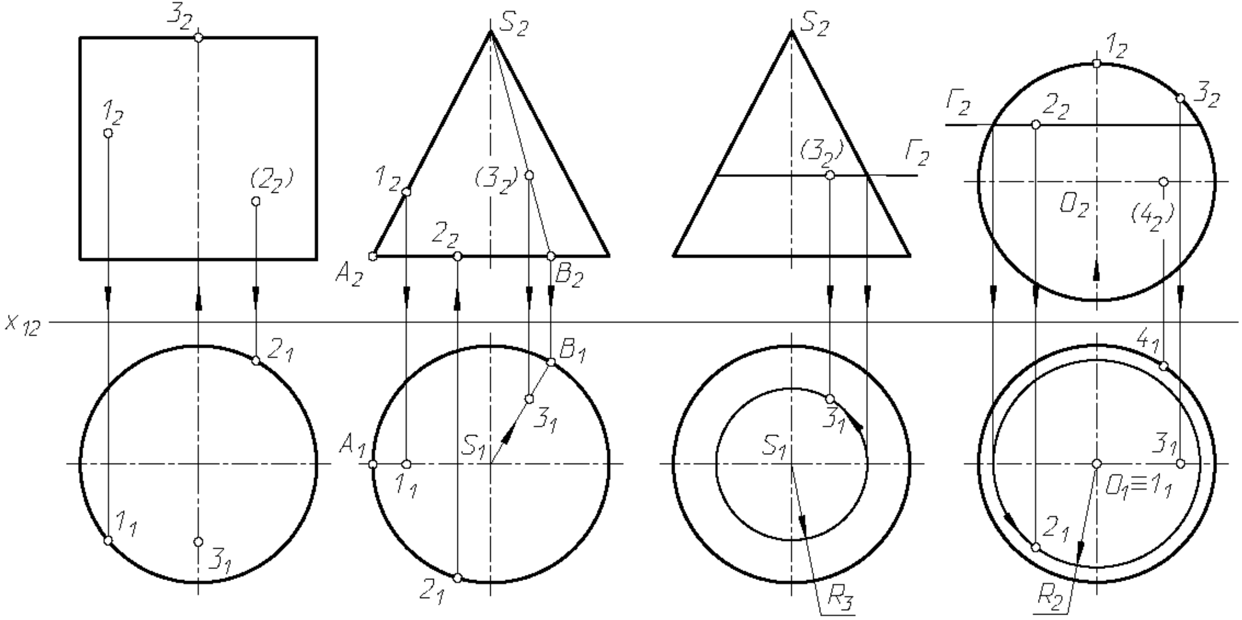
В правом верхнем углу формата изображаем аксонометрический знак.

Методические рекомендации.

Построение линии пересечения поверхности плоскостью стоится по точкам, поэтому ниже показано определение недостающих проекций точек на некоторых поверхностях. Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии поверхности. Для поверхностей вращения в качестве таких линий удобно брать параллели.

Прямой круговой цилиндр (рис. 9, *а*). Заданы фронтальные проекции точек 1, 2 и горизонтальная проекция точки 3, причём точки 1 и 2 принадлежат боковой поверхности, точка 3 – верхнему основанию. Необходимо построить их недостающие проекции. Поскольку все образующие прямого кругового цилиндра являются горизонтально проецирующими, горизонтальные проекции точек 1 и 2 принадлежат горизонтальному очерку цилиндра. Основания цилиндра являются горизонтальными плоскостями. Поэтому фронтальная проекция точки 3 принадлежит прямой, в которую проецируется верхнее основание.

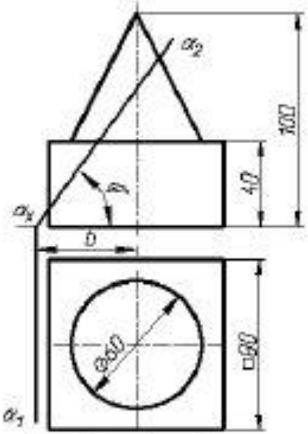
Прямой круговой конус (см. рис. 9, *б*). Точка 1 (12) принадлежит очерковой образующей конуса (главному меридиану), точка 2 (21) – основанию конуса. Горизонтальная проекция точки 1 принадлежит горизонтальной проекции главного меридиана, а фронтальная проекция точки 2 – фронтальной проекции основания. Недостающая проекция 31 точки 3 построена на рисунке с помощью образующей *SB*. Этот способ построения целесообразен, если наклон образующей к горизонтальной оси близок к 45?. Во всех остальных случаях предпочтительным считается способ построения точек с помощью параллелей (см. рис. 9, *в*). *Сфера* (см. рис. 9, *г*). Точки 1 (11, 12) и 3 (31, 32) принадлежат главному меридиану; точка 4 (41, 42) – экватору, а точка 2 – параллели радиуса *R*2, на горизонтальной проекции которой находим недостающую проекцию 21.



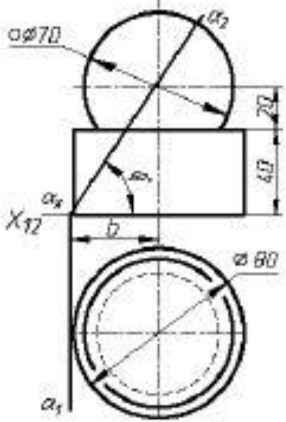
а *б* *в* *г*

Рис. 9 Точки на поверхностях вращения:
а – цилиндрической; *б, в* – конической; *г* – сферы

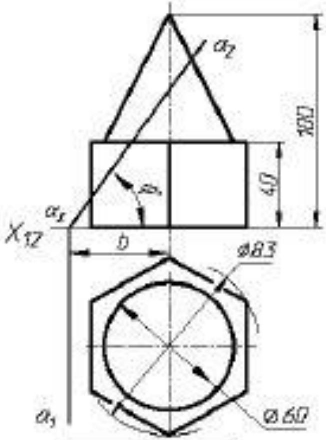
Таблица 2 (размеры, мм)



№ вар	φ	b
13	54	50
14	60	36



№ вар	φ	b
15	63	45
16	74	35



№ вар	φ	b
17	63	46
18	70	31

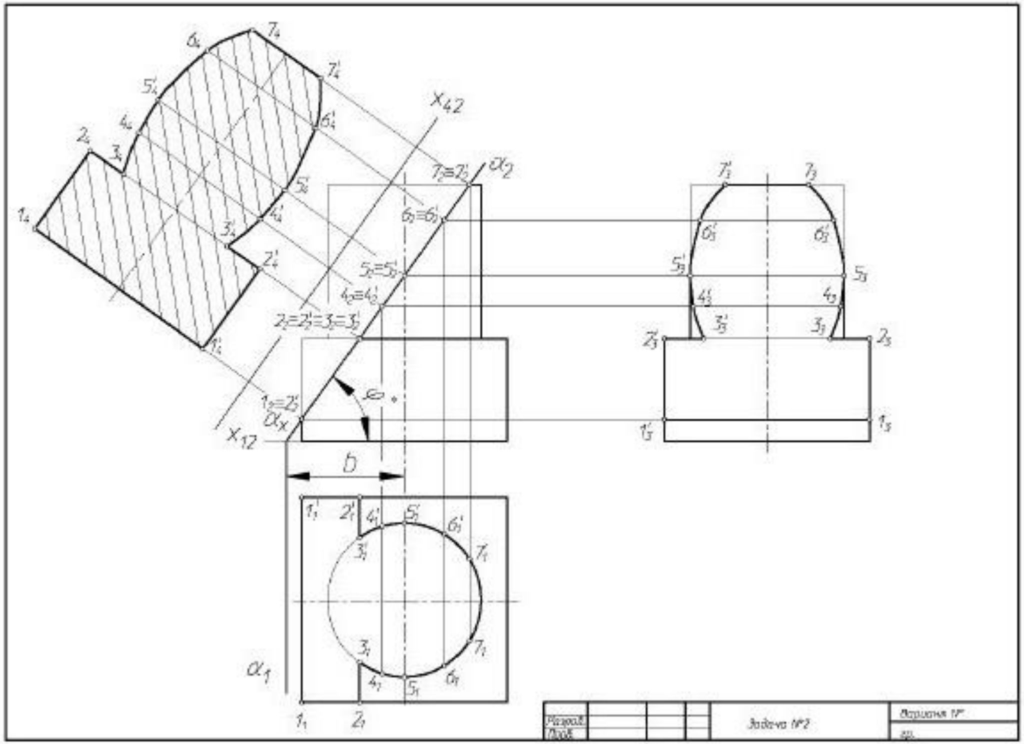


Рис. 10. Пример выполнения РГР №2

Расчетно-графическая работа №3

Цель работы: приобретение навыков в решении задач на пересечение поверхностей.

Задание: Построить линию пересечения двух поверхностей (исходные данные выбирают в соответствии с вариантом из таблицы 3. Размеры наносить не нужно.

Указания к решению задачи.

Построение линии пересечения поверхностей в общем случае сводится к нахождению общих точек, принадлежащих данным поверхностям.

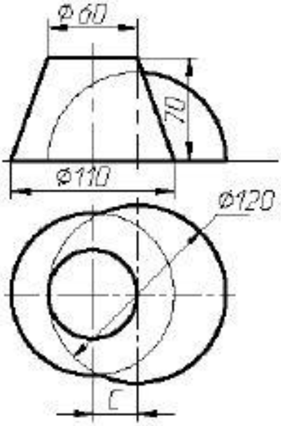
Линия пересечения поверхностей представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на две части (и более). Эти части могут быть и плоскими кривыми. В случае пересечения многогранников линия пересечения представляет собой ломаную линию.

Для решения задачи на пересечение поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей рекомендуется выполнить следующие основные этапы:

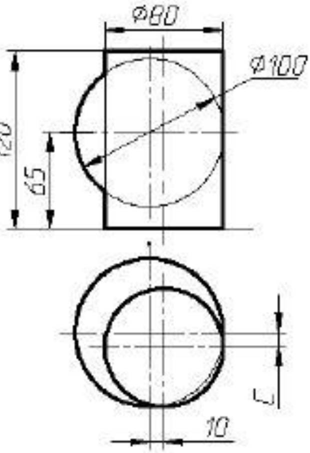
- анализ поверхностей. Необходимо выяснить, какие поверхности заданы, как эти поверхности расположены относительно друг друга и относительно плоскостей проекций;
- выбор вспомогательных секущих плоскостей. Плоскости выбираем таким образом, чтобы они пересекали заданные поверхности по простым линиям (прямым, окружностям);
- нахождение характерных точек – точек, определяющих характер линии пересечения: точки на образующих поверхностей, высшие и низшие, левые и правые, ближние и дальние, а также точки, определяющие границы видимости линии пересечения на плоскостях проекций. В первую очередь определяем точки, не требующие дополнительных построений при нахождении их недостающих проекций;
- определение промежуточных (случайных) точек, позволяющих более точно построить проекции линии пересечения поверхностей (их количество зависит от требуемой степени точности);
- построение линии пересечения с учетом видимости;
- установление видимости очерков поверхностей.

Пример выполнения РГР №3 приведен на рисунке 11.

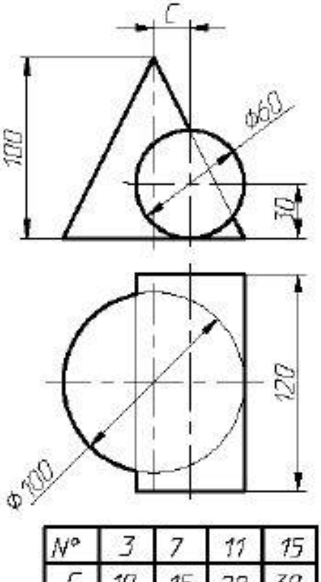
Таблица 3 (размеры, мм)



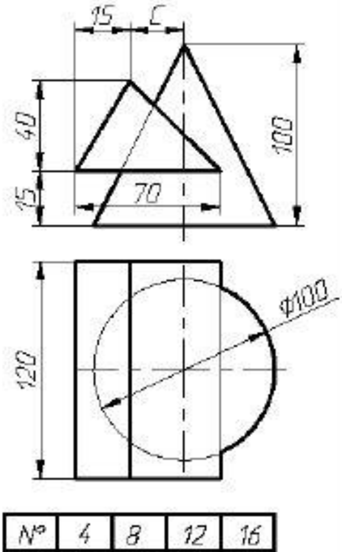
№	1	5	9	13	17
C	60	65	50	75	45



№	2	6	10	14	18
C	40	50	30	45	25



№	3	7	11	15
C	10	15	20	30



№	4	8	12	16
C	25	20	15	10

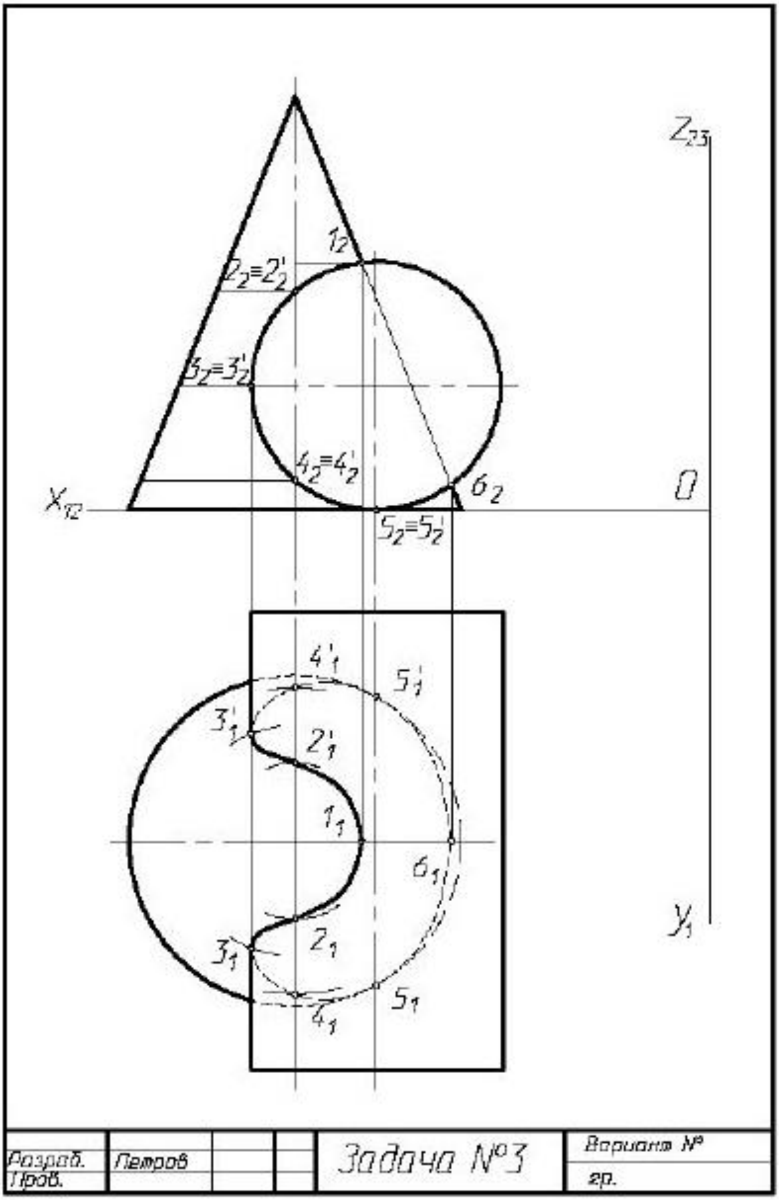


Рис. 11. Пример выполнения РГР №3

Вопросы к экзамену по начертательной геометрии

1. Центральное и параллельное проецирование.
2. Метод Монжа. Проецирование точки на две и три плоскости проекций.
3. Положение точки в различных четвертях пространства.
4. Прямые уровня. Свойства эпюра прямых уровня.
5. Проецирующие прямые. Свойства эпюра проецирующих прямых.
6. Определение натуральной величины отрезка прямой. Способ прямоугольного треугольника.
7. Взаимное положение прямых. Способ конкурирующих точек.
8. Способы задания плоскости на чертеже.
9. Положение плоскости относительно плоскостей проекций.
10. Проецирующие плоскости и их свойства.
11. Плоскости уровня и их свойства.
12. Следы плоскости.
13. Принадлежность прямой и точки плоскости.
14. Главные линии плоскости.
15. Пересечение прямой с плоскостью. Общий алгоритм решения задачи.
16. Общий случай пересечения плоскостей.
17. Параллельность прямой и плоскости.
18. Параллельность двух плоскостей.
19. Перпендикулярность двух плоскостей.
20. Сущность преобразования проекций. Характеристика способов преобразования ортогональных проекций.
21. Способ замены плоскостей проекций. Основные задачи преобразования.
22. Гранные поверхности. Образование.
23. Точка и прямая на поверхности многогранника.
24. Пересечение многогранника проецирующей плоскостью.
25. Пересечение прямой с многогранником. Общий алгоритм решения задачи.
26. Пересечение многогранников. Способ ребер. Способ граней.
27. Поверхности вращения. Образование.
28. Точка на поверхности вращения. Определение видимости.
29. Пересечение поверхности вращения проецирующей плоскостью.

30. Конические сечения. Примеры построения конических сечений.
31. Цилиндрические сечения
32. Пересечение прямой с поверхностью вращения.
33. Пересечение поверхностей. Способ вспомогательных секущих плоскостей. План решения задачи.
34. Соосные поверхности. Пересечение соосных поверхностей.
35. Пересечение поверхностей. Способ вспомогательных концентрических сфер. План решения задачи.
36. Частные случаи пересечения поверхностей. Теорема о двойном касании. Теорема Монжа.
37. Способы построения разверток.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Начертательная геометрия

Учебно-методическое пособие

Составитель:
Очур-оол Аржана Петровна

Редактор *М.Н. Донгак*
Дизайн обложки *К.К. Сарыглар*

Сдано набор: 05.10.2017
Подписано в печать: 30.11.2017
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная
Физ. печ.л. 8,5. Усл. печ.л 7,9.
Заказ № 1329 Тираж 50 экз.

667000, г. Кызыл, ул. Ленина,36
Тувинский государственный университет
Издательство ТувГУ