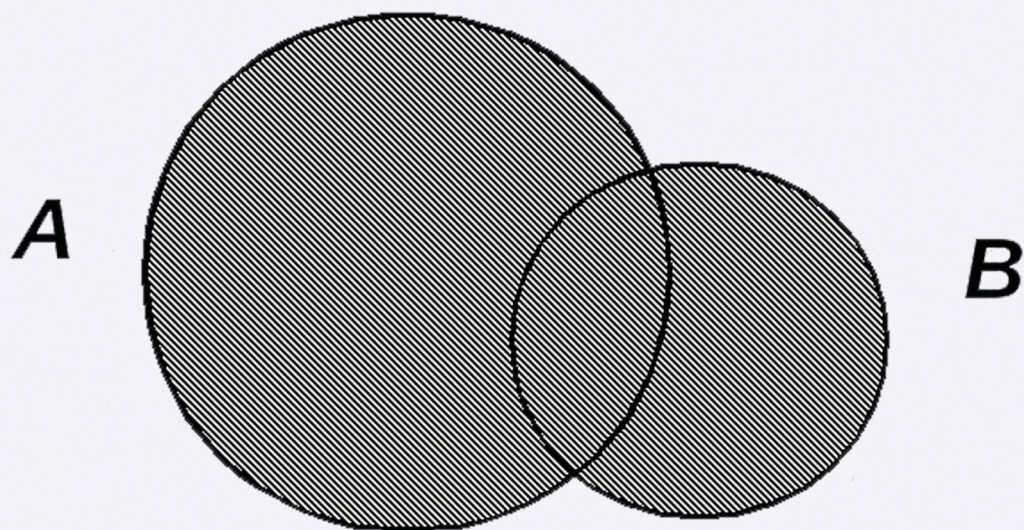




$A \cup B$

ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО
КУРСА МАТЕМАТИКИ
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ
МНОЖЕСТВ

ФГБОУ ВО «ТУВИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
КЫЗЫЛСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

*Учебно-методическое пособие
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
Педагогическое образование профиля «Начальное образование»*

Кызыл
2018

УДК 51 (075.8)
ББК 22.10 я73
О-75

*Печатается по решению учебно-методического совета
Тувинского государственного университета*

Основы начального курса математики. Элементы теории множеств: учебно-методическое пособие для студентов направления подготовки Педагогическое образование профиля «Начальное образование» / сост. Ч.М. Ондар. – Кызыл: Изд-во ТувГУ, 2018. – 41 с.

Учебно-методическое пособие содержит материал, соответствующий разделу «Элементы теории множеств» рабочей программы по основам начального курса математики. В нем рассмотрены множества и операции над ними, соответствия и отношения. Иллюстрировано примерами решения задач с подробными объяснениями.

В конце каждой главы приводятся задания для практических занятий и самостоятельной работы. Они помогут закрепить прочитанный материал, применить теоретические результаты на практике.

Рекомендуется студентам Кызылского педагогического института, обучающимся по направлению подготовки Педагогическое образование профиля «Начальное образование» (квалификация «бакалавр»). Может быть использовано педагогами, повышающими свою квалификацию, а также студентами педагогического колледжа, получающими среднее профессиональное образование по специальности «Преподавание в начальных классах».

УДК 51 (075.8)
ББК 22.10 я73

Рецензенты:

Н.М. Кара-Сал, к.п.н., доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики;

С.К. Сат, к.п.н., зав. кафедрой физико-математического и дистанционного образования Тувинского института развития образования и повышения квалификации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
Глава I. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ	5
1.1. Понятие множества и элемента множества	5
1.2. Виды множеств и способы их задания	6
1.3. Отношения между множествами	7
1.5. Объединение множеств	11
1.6. Разность множеств. Дополнение к подмножеству	11
1.7. Законы операций над множествами	13
1.8. Декартово произведение двух множеств	14
1.8. Кортеж. Декартово произведение n множеств	17
1.8. Разбиение множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы)	18
Задания для самоконтроля	19
Глава 2. СООТВЕТСТВИЯ И ОТНОШЕНИЯ	25
2.1. Соответствия между элементами двух множеств	25
2.2. Способы задания соответствий	25
2.3. Обратное и противоположное соответствия	27
2.4. Равномощные множества	30
2.5. Отношения между элементами одного множества	31
2.6. Основные свойства отношений на множестве	32
2.7. Отношение эквивалентности	34
2.8. Отношения порядка	35
Задания для самоконтроля	36
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	40

ПРЕДИСЛОВИЕ

Переход начальной школы на новый Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования, возможность выбора и конструирования собственной методики обучения, задачи всестороннего развития младших школьников средствами предмета требуют от педагога хорошей математической подготовки и прежде всего знания научных основ начального курса математики¹. Роль математики в этом профессиональном становлении переоценить трудно. Прежде всего, это связано следующими аспектами:

- *логический* – изучение математики является источником и средством интеллектуального развития человека, его умственных способностей;
- *познавательный* – с помощью математики познается окружающий мир, его пространственные формы и количественные отношения, формируются научные представления о реальном физическом пространстве;
- *прикладной* – математика является базой, обеспечивающей готовность человека к овладению смежными дисциплинами, делает более доступным для него непрерывное образование и самообразование;
- *исторический* – на примерах из истории математики прослеживается развитие не только ее самой, но и человеческой культуры в целом;
- *философско-мировоззренческий* – математика помогает осмыслить мир, в котором живет человек, его место и роль в этом мире.

В данном учебно-методическом пособии представлен материал по разделу «Элементы теории множеств» основ начального курса математики, изучаемого в условиях бакалавриата. Основная его цель дать математическое описание и уточнить смысл тех представлений, которые формируются на уроках математики с младшими школьниками. Прежде всего, это раскрытие понятий множества, отношений и операций с множествами, соответствий и отношений между элементами множеств, явное или неявное их использование в качестве основы изучения чисел, отношений и действий с ними, уравнений и т.д.

Еще одна задача данного раздела – показать студентам важность понимания сути математических понятий и фактов для целенаправленной работы по математическому развитию детей младшего школьного возраста, понимания прикладного значения математики.

Материал раздела разбит на 2 главы:

1. Множества и операции над ними.
2. Соответствия и отношения.

Каждая глава завершается заданиями для самоконтроля, что позволяет систематизировать знания по теме и усвоить их. В процессе решения заданий студенты должны овладеть компетенциями, необходимыми им для грамотного обучения математике младших школьников и их развития средствами математики.

Учебно-методическое пособие может быть использовано как для работы студентов под руководством преподавателя, так и для их самостоятельного изучения основ начального курса математики.

При написании пособия были использованы материалы различных учебников по математике для начальных классов, учебников и учебных пособий по математике для студентов педагогических вузов и колледжей Л.П. Стойловой, Н.Я. Виленкина, А.М. Пышкало, Н.Н. Лавровой, Г.М. Амаевой, М.А. Амаева, учебника по методике преподавания математики в начальной школе С.Е. Царевой, И.В. Шадриной, Н.Ф. Талызиной, а также учебных пособий по математике Т.А. Васильевой.

¹ Стойлова Л.П. Математика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – С. 3.

ГЛАВА I. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1. Понятие множества и элемента множества

Понятие о множестве возникло как абстракция того факта, что предметы окружающего нас мира встречаются не только и не столько изолированно, сколько в совокупности: множество грибов, роща берез, собрание рабочих, коллекция марок, натуральный ряд чисел и т.д.

Понятие «множество» является одним из основных понятий математики, т.е. основополагающим понятием классической математики. Это понятие принимается за исходное, базисное или основное, поэтому дать определение ему нельзя, а можно лишь пояснить на примерах. Создатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845-1918) определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью», а также «множество есть многое, мыслимое как единое». В настоящее время понятие множества используется во всех разделах математики.

Понятию множества можно дать следующее описательное определение: *множеством* называется любая совокупность произвольных объектов, собранных вместе и составляющих единое целое.

Например, в математике часто приходится рассматривать те или иные группы объектов как единое целое: *цифры*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

натуральные числа: 1, 2, 3, 4,...;

треугольники (см. рис. 1).

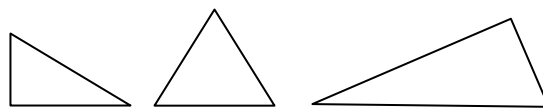


Рис. 1

Все эти различные совокупности называют *множествами*. Все сказанное не является определением понятия *множества*, а всего лишь поясняет его. В окружающей нас реальной действительности мы имеем дело с различными множествами. Так, можно говорить о множестве животных, множестве конфет, множестве жителей данного города, о множестве букв в русском алфавите и т.д. Универсальность этого понятия сделала возможным применение теории множеств не только во всех областях математики, но и в экономике, биологии и других науках.

Математический смысл понятия «множество» отличается от того, как оно используется в обыденной речи, где его связывают, как правило, с большим числом предметов или объектов. Например, мы говорим, что в лесу – множество деревьев, но если перед домом – 2 дерева, то никогда не скажем, что перед домом имеется «множество деревьев».

Предметы или объекты, составляющие данное множество, называют его *элементами*. Элементами множества могут быть разнообразные предметы: буквы, числа, функции, точки, углы, люди, цветы и т.д.

Ознакомление младших школьников с понятиями множества и элементами множества осуществляется в дочисловом периоде или в неявной форме, как, например, в УМК «Школа России», или в явной форме, в УМК «Перспектива» следующим образом: «В математике каждую группу предметов называют **множеством** (множество грибов, множество бабочек, множество фигур и т.п.). Каждый предмет из группы называют **элементом множества** (мухомор – элемент множества грибов, круг – элемент множества фигур) ¹.

Отношение между множеством и его элементами, которое мы выразили словами «является элементом», можно заменить словом «принадлежит». Например, число 3 является элементом множества натуральных чисел, или можно сказать, что число 3 принадлежит множеству натуральных чисел.

Для сокращения записи различных предложений о множествах и их элементах принята следующая символика: множества принято обозначать большими (прописными) буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots, Z$, их элементы – малыми (строчными) буквами: $a, b, c, \dots, z$, слово «принадлежит» – символом $\in$, а если элемент не принадлежит данному множеству, то отношение «не принадлежит» обозначают символом $\notin$. Тогда предложение «Объект a принадлежит множеству A » записывают так: $a \in A$. Эту запись можно прочитать иначе: «объект a является элементом множества A », «объект a лежит в множестве A », «объект a из множества A ». Предложение «объект a не принадлежит множеству A », «объект a не лежит в множестве A » или «объект a не является элементом

¹ Дорофеев Г.В. Математика 1 класс. учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе. В 2 ч. Ч.1 / Г.В. Дорофеев, Т.Н. Миракова, Т.Б. Бука. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – С.28.

множества A » в символах записывают: $a \notin A$. Например, если A – множество четных натуральных чисел, то $12 \in A$, $28 \in A$, $15 \notin A$, $-14 \notin A$, $0 \notin A$.

Для математики особую роль играют множества, элементами которых являются математические объекты (числа, точки, фигуры, величины, уравнения и др.).

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми множествами*. Для некоторых числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения:

N – множество натуральных чисел;

Z_0 – множество целых неотрицательных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

I – множество иррациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

Эти обозначения дают возможность сокращать записи математических текстов. Например: $3 \in N$ – «3 является натуральным числом»; $2,5 \notin N$ – «2,5 не является натуральным числом».

1.2. Виды множеств и способы их задания

Понятие множества в математике не совпадает с обыденным пониманием множества как большой совокупности объектов. В математике множество может содержать любое число объектов, например один или два, а может не содержать ни одного объекта.

Таким образом, в зависимости от количества элементов в множестве, множества бывают *пустые, конечные и бесконечные*.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым* и обозначают символом $\emptyset$.

Например, множество натуральных чисел, меньших 0; множество квадратов с неравными сторонами; множество решений уравнения $5 : x = 0$.

Множество называется *конечным*, если количество элементов в нем можно определить некоторым числом (причем неважно, какое это число по величине, важно, что оно существует).

Например, множество дней недели, множество букв русского алфавита, множество книг в домашней библиотеке, множество книг в библиотеке института, множество книг в библиотеках всего мира.

Множество, состоящее из бесконечного числа элементов называется *бесконечным*.

Например, множество точек прямой, множество натуральных чисел N .

Считают, что всякое множество определяется своими элементами, т.е. множество A считается заданным, если относительно любого объекта можно сказать, принадлежит он этому множеству A или не принадлежит. В математике используют следующие способы задания множеств.

Способ 1 – *по перечислению*. Множество считается заданным, если перечислены все элементы этого множества.

Например. 1. Если множество A состоит из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 то оно задано перечислением, поскольку все его элементы перечислены. При этом возможна запись, в которой перечисленные элементы заключаются в фигурные скобки: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Задано множество $C = \{\bigcirc \square \triangle \square\}$

Очевидно, что этот способ применим только для конечных множеств, да и то при условии, что количество элементов множества невелико.

Способ 2 – *по характеристическому свойству*. Множество считается заданным, если дан закон, правило или характеристическое свойство элементов этого множества.

Характеристическим свойством, определяющим множество, называется такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий данному множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

При таком задании множества используется следующая запись: в фигурных скобках пишут обозначение элемента, после чего ставят вертикальную черту, за ней указывают характеристическое свойство, которым обладают элементы данного множества.

Например, множество A натуральных чисел, меньших 6, запишется в символах так: $A = \{x | x \in N, x < 6\}$. Так как данное множество конечное, то его можно записать перечислением: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Этим способом можно задавать пустые множества. Например, множество B натуральных чисел, меньших 1: $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 1\} = \emptyset$.

По характеристическому свойству удобно задавать и бесконечные множества. Например, множество C натуральных чисел, не меньших 9, бесконечно, оно запишется: $C = \{x | x \in \mathbb{N}, x \geq 9\}$.

Способ 3 – по названию. Множество считается заданным, если само название множества определяет все его элементы.

Например, множество студентов группы (конечное), множество точек луча (бесконечное), множество летающих китов ($\emptyset$).

Названные способы задания множеств взаимосвязаны – если конечное множество задано с помощью характеристического свойства, то можно его элементы перечислить, и наоборот.

Очень важно умение переходить от одного способа задания множества к другому. Этому обучаются уже младшие школьники, например.

1. Запишите натуральные числа, которые больше, чем 65 и меньше, чем 75.

Множество чисел задано с помощью характеристического свойства «быть больше 65 и меньше 75». Так как данное множество конечное, то его можно записать перечислением: {66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74}.

2. Каким свойством обладают все числа ряда: 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92? Перечислены все элементы некоторого множества, обладающего характеристическим свойством: «состоять из двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 2».

1.3. Отношения между множествами

В математике изучают не только те или иные множества, но и отношения, взаимосвязи между ними.

Для наглядного изображения множеств, отношений и операций между ними английский математик и логик Джон Венн (1834-1923) предложил использовать замкнутые фигуры на плоскости. Задолго до Венна для этой же цели пользовался кругами швейцарский математик-энциклопедист, член Петербургской Академии наук, Леонард Эйлер (1707-1783). Точки внутри кругов считаются элементами множеств. Позднее такие изображения множеств на плоскости в виде геометрических фигур получили название *диаграмм Эйлера-Венна*.

В математике изучают не только те или иные множества, но и отношения, взаимосвязи между ними. Изображение двух множеств в виде кругов позволяет выявить четыре случая отношений между ними.

I. Множества A и B имеют некоторые общие элементы, т.е. существуют такие элементы x , для которых верно то, что $x \in A$ и $x \in B$. При этом не все элементы множества A принадлежат множеству B , и не все элементы множества B принадлежат множеству A .

В этом случае множества A и B находятся в отношении *пересечения*, т.е. $A \cap B \neq \emptyset$ (рис. 2).

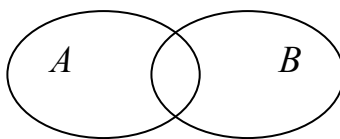


Рис. 2

Например. 1. $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{m; d; k; l\}$, d – общий элемент.

2. $X = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 10\}$, $Y = \{x | x \in \mathbb{N}, x \geq 7\}$, числа 7, 8, 9 – общие.

3. M – множество студентов, K – множество спортсменов, студенты-спортсмены – общие элементы для множеств M и K .

4. Рассмотрим множество геометрических фигур, изображенных на рисунке 3.

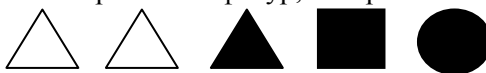


Рис. 3

Пусть C – множество изображенных треугольников, D – множество изображенных черных фигур, тогда ( – черный треугольник) – общий элемент множеств C и D .

II. Множества A и B находятся в отношении *включения*. Множество B является частью множества A , тогда говорят, что множество B включается во множество A или множество B является *подмножеством* множества A .

Множество B называется *подмножеством* множества A , если каждый элемент множества B принадлежит множеству A , и обозначают в символах так: $B \subset A$. Эту запись можно читать иначе: «Множество B включается во множество A », «Множество A включает в себя множество B », «Множества B и A находятся в отношении включения».

На диаграмме Эйлера-Венна круг, соответствующий множеству B , располагается целиком внутри круга, изображающего множество A (рис. 4.)

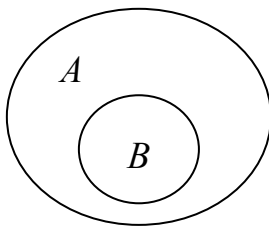


Рис. 4

Например. 1. $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{c; d\}$, $B \subset A$.

2. $X = \{x | x \in \mathbb{N}, x > 5\}$, $Y = \{x | x \in \mathbb{N}, x \geq 10\}$, $Y \subset X$.

3. M – множество студентов ТуВГУ, K – множество студентов КПИ, $K \subset M$.

4. Рассмотрим множество геометрических фигур, изображенных на рисунке 5:

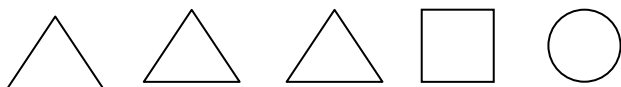


Рис. 5

Пусть C – множество изображенных геометрических фигур, D – множество изображенных треугольников, тогда каждый элемент множества D является элементом множества C . Говорят, что множество D является подмножеством множества C .

Согласно данному определению подмножества, пустое множество является подмножеством любого множества A : $\emptyset \subset A$; кроме того, любое множество A является подмножеством самого себя: $A \subset A$. Различают два вида подмножеств: само множество A и $\emptyset$ называют *несобственными подмножествами*, а все остальные подмножества, если они существуют, – *собственными подмножествами* множества A .

Например, для множества $A = \{a; b; c\}$ можно указать два несобственных подмножества – A и $\emptyset$, и собственные подмножества – $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$, которых, как видим, будем шесть.

С понятием подмножества младшие школьники встречаются, выполняя, например, задания: «Назови среди данных чисел однозначные», «Среди данных прямоугольников найди прямоугольники».

III. Множества A и B совпадают, т.е. все элементы множества A принадлежат множеству B , и все элементы множества B принадлежат множеству A . в этом случае говорят, что множества A и B равны, т.е. множества A и B находятся в отношении *равенства*.

Два множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B , и каждый элемент множества B принадлежит множеству A , т.е. $A \subset B$ и $B \subset A$.

Обозначается: $A = B$. Читается: «Множество A равно множеству B ». В символах определение записывают: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ и $B \subset A$. На диаграмме Эйлера-Венна круги, изображающие множества A и B , полностью совпадают (рис. 6).

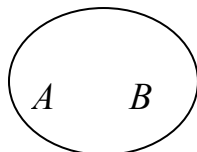


Рис. 6

Например. 1. $A = \{1; 4; 9; 16\}$, $B = \{1^2; 2^2; 3^2; 4^2\}$, $A = B$.

2. $X = \{x | x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 9\}$, $Y = \{x | x \in \mathbb{Z}_0, x < 10\}$, $X = Y$.

3. M – множество квадратов, K – множество ромбов с прямыми углами, $M = K$.

4. Рассмотрим множество геометрических фигур, изображенных на рисунке 7:

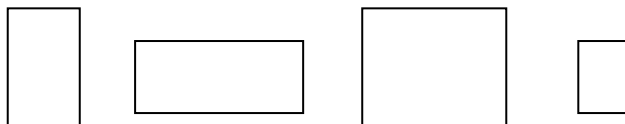


Рис. 7

Пусть C – множество изображенных на рисунке прямоугольников, D – множество изображенных на рисунке четырехугольников. Так как множества C и D состоят из одних и тех же элементов, то $C=D$.

IV. Множества A и B не имеют общих элементов, т.е. из того, что для любого $x \in A$ следует, что $x \notin B$, а из того, что $y \in B$, вытекает, что $y \notin A$. Поэтому в кругах Эйлера-Венна нет точек (элементов), принадлежащих одновременно и множеству A , и множеству B . Про такие множества говорят, что они *не пересекаются*, т.е. $A \cap B = \emptyset$ и изображают на диаграмме Эйлера-Венна в виде непересекающихся кругов (рис. 8).

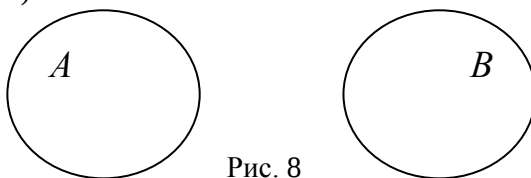


Рис. 8

Например. 1. $A = \{a; в; c\}$, $B = \{x; y; z\}$.

2. $X = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 20\}$, $Y = \{x | x \in \mathbb{N}, x \geq 25\}$.

3. M – множество деревьев, K – множество домов.

4. Рассмотрим множество геометрических фигур, изображенных на рисунке 9:



Рис. 9

Пусть C – множество изображенных треугольников, D – множество изображенных квадратов, тогда C и D – непересекающиеся множества.

Таким образом, любые два множества могут находиться в одном из следующих отношений:

- 1) множества *не пересекаются*; 2) множества пересекаются или находятся *в отношении пересечения*;
- 3) одно множество является подмножеством другого или они находятся *в отношении включения*;
- 4) множества равны, т.е. находятся *в отношении равенства*.

Иногда рассматривают множества, которые являются подмножествами одного и того же множества.

Множество, относительно которого другие множества являются его подмножествами, называется *универсальным*, и обозначается буквой J и на диаграмме Эйлера-Венна изображается прямоугольником.

Например. 1. Множество геометрических фигур – универсальное для множества треугольников, четырехугольников, многоугольников, кругов.

2. Множество четырехугольников – универсальное для множества трапеций, квадратов, прямоугольников, ромбов, параллелограммов.

3. Множество треугольников – универсальное для множества прямоугольных треугольников, остроугольных треугольников, тупоугольных треугольников.

4. Множество R действительных чисел является универсальным для множеств Q , Z , Z_0 , N , так как $Q \subset R$, $Z \subset R$, $Z_0 \subset R$ и $N \subset R$.

Из элементов двух и более множеств можно образовывать новые множества, которые являются результатом определенных операций над множествами. Над множествами выполняют операции *пересечения*, *объединения*, *вычитания*, *декартова умножения*.

1.4. Пересечение множеств

Пусть даны множества: $A = \{a; b; c; d\}$ и $B = \{b; d; k; m\}$. Образует из них новое множество C , которому будут принадлежать общие элементы множеств A и B . Получим: $C = \{b; d\}$, которое называется *пересечением множеств A и B* .

Пусть даны множества A и B .

Пересечением множеств A и B называется множество, элементы которого принадлежат множеству A и множеству B одновременно.

Пересечение множеств A и B обозначается: $A \cap B$. Тогда определение пересечения множеств можно записать в символах: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Операцию, при помощи которой находят пересечение множеств, называют *пересечением*.

Проиллюстрируем пересечение множеств A и B на диаграммах Эйлера-Венна (рис. 10). Если у множеств A и B нет общих элементов, результатом пересечения будет пустое множество (рис. 10 б): $A \cap B = \emptyset$.

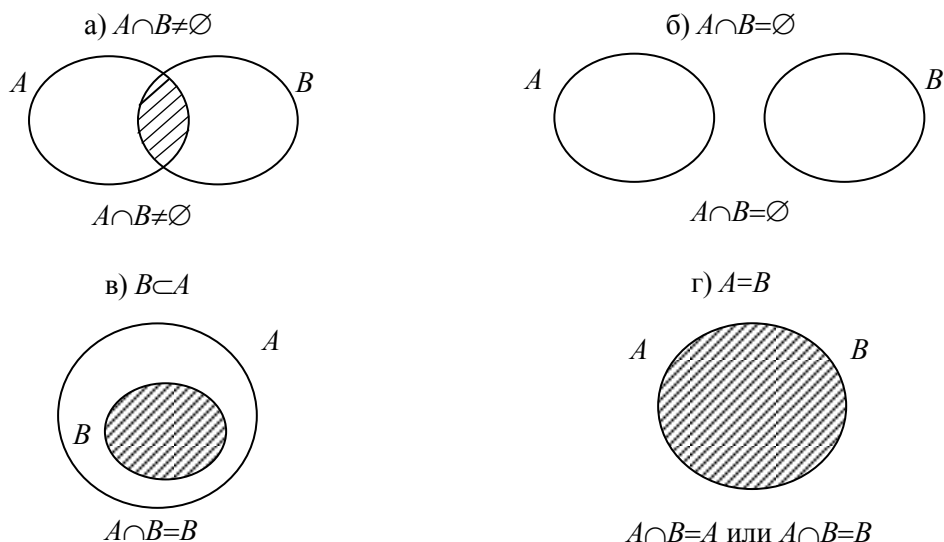


Рис. 10

Рассмотрим примеры на нахождение пересечения множеств, заданных разными способами.

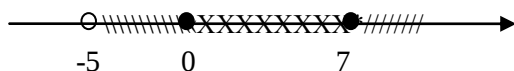
1. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{1, 3, 6, 9, 18\}$.

Образует множество, состоящее из общих элементов множеств A и B . Вновь полученное множество $\{1, 3, 6\}$ называется пересечением множеств A и B , т.е. $A \cap B = \{1, 3, 6\}$.

2. $X = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, $Y = \{x | x \in \mathbb{R}, -5 < x \leq 7\}$.

Для наглядности изобразим данные множества на координатной прямой (рис. 11).

а) с помощью штриховки:



или

б) с помощью дуг:



Рис. 11

Находим пересечение множеств X и Y : $X \cap Y = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 7\} = [0; 7]$.

3. A – множество четных натуральных чисел, B – множество двузначных чисел.

Из определения пересечения множеств следует, что характеристическое свойство множества $A \cap B$ составляется из характеристических свойств данных множеств с помощью союза «и», т.е. характеристическое свойство множества A – «состоять из четных натуральных чисел», а характеристическое свойство множества B – «состоять из двузначных чисел». Тогда получим: $A \cap B$ – множество четных натуральных чисел и двузначных чисел, короче: $A \cap B$ – множество четных двузначных натуральных чисел (союз «и» в таком случае можно опустить). Полученное множество $A \cap B$ не пусто. Например, $28 \in A \cap B$, так как 28 – четное и двузначное число.

4. Рассмотрим рисунок 12.

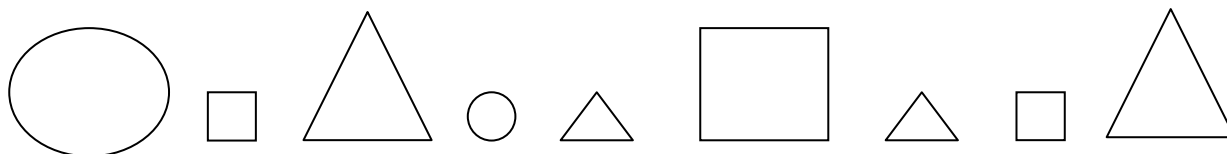


Рис. 12

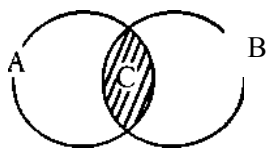


Рис. 13

Пусть A – множество изображенных треугольников, B – множество больших фигур, C – множество больших треугольников, тогда множество C можно рассматривать как пересечение множеств A и B (рис.13): $A \cap B = C$.

1.5. Объединение множеств

Пусть даны множества: $A=\{a; b; c; d\}$ и $B=\{b; d; k; m\}$. Образует из них новое множество C , элементы которого будут принадлежать хотя бы одному из данных множеств, т.е. множеству A или множеству B . Получим: $C=\{a; b; c; d; k; m\}$, которое называют *объединением множеств A и B* .

Пусть даны множества A и B .

Объединением множеств A и B называют множество, элементы которого принадлежат хотя бы одному из данных множеств, т.е. множеству A или множеству B .

Объединение множеств A и B обозначается: $A \cup B$. Тогда определение объединения множеств можно записать в символах: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Операцию, при помощи которой находят объединение множеств, называют *объединением*.

Проиллюстрируем объединение множеств A и B на диаграммах Эйлера-Венна (рис. 14).

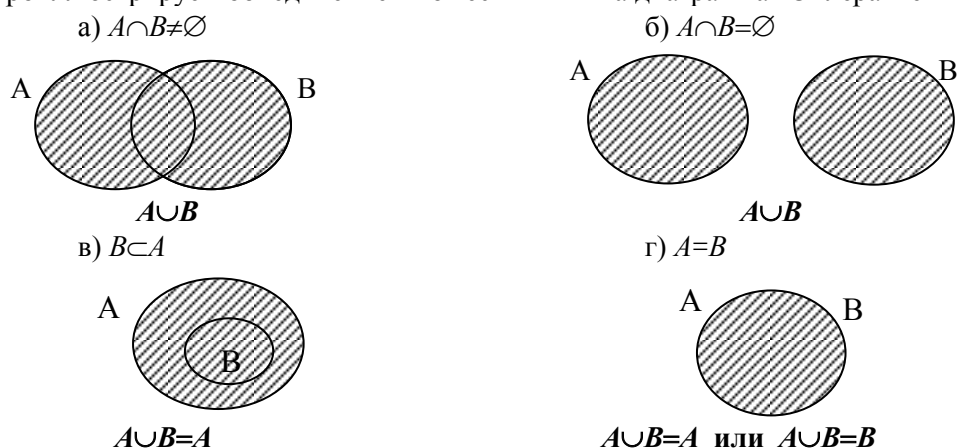


Рис. 14

Рассмотрим примеры на нахождение объединения множеств, заданных разными способами.

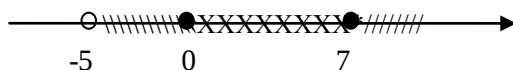
1. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{1, 3, 6, 9, 18\}$.

Образует новое множество, состоящее из элементов множеств A и B . Вновь полученное множество $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ называется объединением множеств A и B , т.е. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$. Заметим, что общие элементы множеств A и B в объединении записываются только один раз.

2. $X = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, $Y = \{x | x \in \mathbb{R}, -5 < x \leq 7\}$.

Для наглядности изобразим данные множества на координатной прямой (рис. 15)

а) с помощью штриховки:



или

б) с помощью дуг:

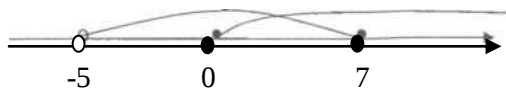


Рис. 15

Находим объединение множеств X и Y : $X \cup Y = \{x | x \in \mathbb{R}, x > -5\} = (-5; +\infty)$.

3. A – множество четных натуральных чисел, B – множество двузначных чисел.

Из определения объединения множеств следует, что характеристическое свойство множества $A \cup B$ составляется из характеристических свойств элементов множеств A и B с помощью союза «или». Тогда получим: $A \cup B$ – множество четных натуральных чисел или двузначных чисел, короче: $A \cup B$ – множество четных или двузначных натуральных чисел. Полученное множество будет бесконечным, но всегда легко определить, содержится то или иное число во множестве $A \cup B$ или нет. Например, $8 \in A \cup B$, (так как 8 – четное число), $28 \in A \cup B$, (так как 28 – четное и двузначное число), $75 \in A \cup B$, (так как 75 – двузначное число).

1.6. Разность множеств. Дополнение к подмножеству

Если заданы два множества, то можно не только найти их пересечение и объединение, но и разность.

Пусть даны множества A и B .

Разностью множеств $A \setminus B$ называется множество, элементы которого принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B .

Разность множеств A и B обозначают: $A \setminus B$. Определение разности множеств A и B в символах записывается: $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Операцию, при помощи которой находят разность множеств, называют *вычитанием*.

Проиллюстрируем разность множеств A и B на диаграммах Эйлера-Венна (рис. 16).

Пусть даны множества A и B , причем множество B является подмножеством множества A (B включается в A).

Дополнением к подмножеству B до множества A называется множество, элементы которого принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B .

Дополнение к подмножеству B до множества A обозначается: B'_A . Символическое определение будет иметь вид: $B'_A = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

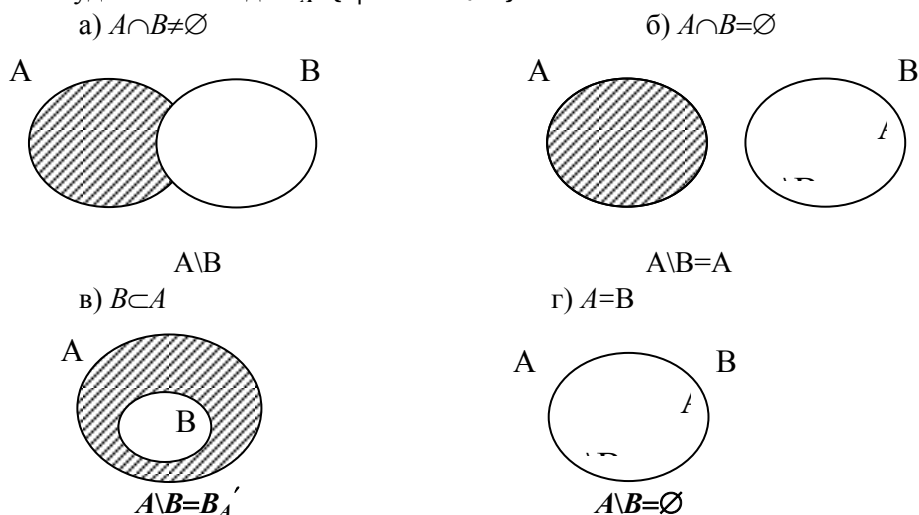


Рис. 16

Если множество B включается в универсальное множество J , то дополнение к подмножеству B до универсального множества обозначается B' (рис. 17).

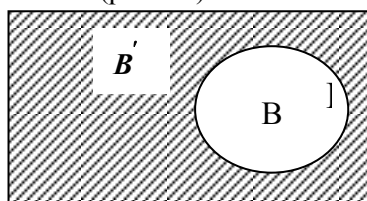


Рис. 17

Нахождение дополнения к подмножеству является частным случаем *вычитания множеств*, т.е. Нахождение дополнения к подмножеству является частным случаем *вычитания множеств*, т.е. операции, с помощью которой находят разность множеств.

Рассмотрим примеры на нахождение разности множеств.

1. $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$, $A \setminus B = \{1; 3; 5\}$, а $B \setminus A = \{6; 8\}$.

2. $X = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 8\}$, $Y = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. Найдем $X \setminus Y$ и $Y \setminus X$, для чего изобразим данные множества X и Y на координатной прямой (рис. 18):

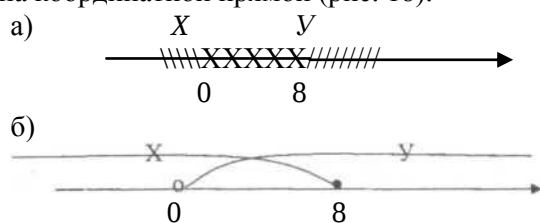


Рис. 18

$$X \setminus Y = \{x | x \in X \text{ и } x \notin Y\} = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 0\} = (-\infty; 0];$$

$$Y \setminus X = \{x | x \in Y \text{ и } x \notin X\} = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 8\} = (8; +\infty).$$

3. A – множество четных натуральных чисел, B – множество чисел, кратных 4.

Из определения разности множеств A и B следует, что элементы множества $A \setminus B$ обладают характеристическим свойством множества A , но не обладают характеристическим свойством B ,

значит: $A \setminus B$ – множество четных натуральных чисел, не кратных 4. Например, $6 \in A \setminus B$ (6 – четно и 6 не делится на 4, т.е. $6 \in A$ и $6 \notin B$), $18 \in A \setminus B$ (18 – четно и не делится на 4).

4. Рассмотрим пример на нахождение дополнения к подмножеству. Например, $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $B = \{2; 4; 6\}$, $B \subset A$. $B'_A = \{1; 3; 5; 7\}$.

При обучении младших школьников действию вычитания педагог опирается на понятие дополнения одного множества до другого.

Например: «У Маши было 5 яблок, 2 яблока она отдала брату. Покажи, сколько яблок осталось у Маши?» (Рис. 19.)

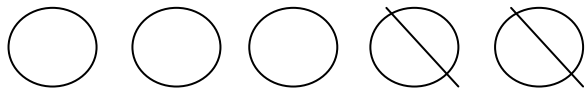


Рис. 19

Из исходного множества A ребенок удаляет подмножество B и считает количество элементов в оставшемся множестве, которое называется *дополнением множества B до множества A* .

Замечание. Если в выражении есть знаки операций пересечения и объединения множеств и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение – более «сильная» операция, чем объединение.

Аналогично условились считать, что пересечение – более «сильная» операция, чем вычитание. Например, порядок выполнения действий в выражении $A \cup B \cap C$ такой: сначала находят пересечение множеств B и C , а затем – объединение множества A с полученным множеством. А в выражении $A \setminus B \cap C$ порядок следующий: сначала находят пересечение множеств B и C , а затем из множества A вычитают полученное множество.

Что касается объединения и вычитания множеств, то их считают равноправными. Например, в выражении $A \setminus B \cup C$ сначала находят разность множеств A и B , а затем находят объединение полученного множества с множеством C .

1.7. Законы операций над множествами

Для рассмотренных операций над множествами необходимо отметить следующее. Если операцию, при помощи которой находят разность множеств, называют вычитанием, то для пересечения и объединения множеств ситуация иная: здесь операции, при помощи которых находят пересечение и объединение множеств, называются также соответственно пересечением и объединением, т.е. не существует других терминов для этих операций.

Для операций пересечения и объединения множеств выполняются одинаковые законы, поэтому рациональнее рассматривать их одновременно.

I. Закон коммутативности

а) пересечения множеств: $(\forall A, B) (A \cap B = B \cap A)$,

б) объединения множеств: $(\forall A, B) (A \cup B = B \cup A)$.

I а) читаем: «Для любых множеств A и B пересечение множеств A и B равно пересечению множеств B и A ».

I б) читаем: «Для любых множеств A и B объединение множеств A и B равно объединению множеств B и A ».

Название этого закона произошло от латинского слова «commutatio», что означает «перемена», поэтому, закон иначе называется переместительным свойством (от перемены мест множеств их пересечение или объединение не меняется).

II. Закон ассоциативности

а) пересечения множеств: $(\forall A, B, C) [A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C]$,

б) объединения множеств: $(\forall A, B, C) [A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C]$.

II а) читаем: «Для любых множеств A, B, C пересечение множества A с пересечением множеств B и C равно пересечению множества C с пересечением множеств A и B ».

II б) читаем: «Для любых множеств A, B, C объединение множества A с объединением множеств B и C равно объединению множества C с объединением множеств A и B ».

Название закона произошло от латинского слова «associatio», что означает «сочетание, соединение», поэтому он иначе называется сочетательным (от перемены мест скобок пересечение или объединение множеств не меняется).

III. Закон дистрибутивности

а) пересечения множеств относительно объединения:

$(\forall A, B, C) [A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)]$,

б) объединения множеств относительно пересечения:

$$(\forall A, B, C) [A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)].$$

III а) читаем: «Для любых множеств A, B, C пересечение множества A с объединением множеств B и C равно объединению пересечения множеств A и B с пересечением множеств A и C ».

III б) читаем: «Для любых множеств A, B, C объединение множества A с пересечением множеств B и C равно пересечению объединения множеств A и B с объединением множеств A и C ».

Название закона произошло от латинского слова «distributio», что означает «распределение», поэтому иначе его называют распределительным свойством.

Замечание. Если обратиться к операциям над числами и свойствам этих операций, то закон коммутативности пересечения (объединения) сопоставим с переместительным свойством умножения (сложения), закон ассоциативности пересечения (объединения) сопоставим с сочетательным свойством умножения (сложения), дистрибутивный закон пересечения относительно объединения – с распределительным свойством умножения относительно сложения при условии, что в качестве операции, аналогичной пересечению, рассматривать умножение, а для объединения – сложение. Но для дистрибутивного закона объединения относительно пересечения аналогичного свойства у операций над числами нет.

Действительно, наличие такого свойства означало бы, что для всех чисел a, b, c выполняется равенство $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$, что невозможно.

IV. Законы де Моргана

Законы названы именем шотландского математика де Моргана (1806- 1871 гг.).

$$1 \text{ а) } (\forall A, B) [A \cap (A \cup B) = A], \quad 1 \text{ б) } (\forall A, B) [A \cup (A \cap B) = A],$$

$$2 \text{ а) } (\forall A) (A \cap A' = \emptyset), \quad 2 \text{ б) } (\forall A) (A \cup A' = J),$$

$$3 \text{ а) } (\forall A, B) [(A \cap B)' = A' \cup B'], \quad 3 \text{ б) } (\forall A, B) [(A \cup B)' = A' \cap B'].$$

Закон 3 а) читаем: «Для любых множеств A и B дополнение к пересечению множеств A и B равно объединению дополнений к множествам A и B ».

Закон 3 б) читаем: «Для любых множеств A и B дополнение к объединению множеств A и B равно пересечению дополнений к множествам A и B ».

Относительно вычитания множеств из всех рассмотренных законов выполняется закон дистрибутивности пересечения множеств относительно вычитания: $(\forall A, B, C) [A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)]$, который читаем: «Для любых множеств A, B, C пересечение множества A с разностью множеств B и C равно разности пересечения множеств A и B с пересечением множеств A и C ». Этот закон сопоставим с распределительным свойством умножения относительно вычитания чисел: для любых чисел a, b, c верно равенство:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

1.8. Декартово произведение двух множеств

Рассмотрим пример. Число 25 записывается с помощью двух цифр 2 и 5. Эти цифры следует записывать в определенном порядке: сначала 2, потом 5. Если их переставить местами, то получится другое число 52, которое не равно 25.

В математике говорят, что 25 – *упорядоченная пара* чисел.

Упорядоченной парой называют два элемента, записанные в определенном порядке. Упорядоченную пару элементов x и y будем записывать следующим образом: $(x; y)$.

Понятие пары часто используется в обыденной речи: пара глаз, пара перчаток, пара носков, пара туфель, танцевальная пара и т.п., но, здесь порядок элементов не всегда играет существенную роль.

В число 55 входят две одинаковые цифры. Они образуют упорядоченную пару $(5; 5)$. Таким образом, в упорядоченных парах элементы могут повторяться.

Пусть дано множество A и $x, y \in A$, составим упорядоченную пару элементов $(x; y)$.

Для упорядоченной пары $(x; y)$ элементы x и y называются *компонентами* или *координатами* этой пары.

Упорядоченные пары $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ называются *совпадающими*, если их соответствующие компоненты равны, т.е. $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Поэтому, если $x \neq y$, то упорядоченные пары $(x; y)$ и $(y; x)$ будут различными.

Пример 1. Составить из элементов множества $A = \{a; b; c\}$ все упорядоченные пары. Таких пар будет 9: $(a; b)$, $(a; c)$, $(b; c)$, $(b; a)$, $(c; a)$, $(c; b)$, $(a; a)$, $(b; b)$, $(c; c)$.

Пример 2. Пусть даны два множества: $A=\{a; b; c\}$ и $B=\{4; 5\}$. Поставим задачу: образовать из элементов этих множеств упорядоченные пары так, чтобы первая компонента пары принадлежала множеству A , а вторая компонента принадлежала множеству B . Все эти пары составляют множество: $\{(a;4), (a;5), (b;4), (b;5), (c;4), (c;5)\}$, которое называют *декартовым произведением данных множеств* A и B и обозначают $A \times B$.

Пусть даны множества A и B .

Декартовым произведением множеств A и B называется множество упорядоченных пар элементов x, y таких, что элемент x принадлежит множеству A , элемент y принадлежит множеству B .

В символах это определение можно записать: $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Операцию, при помощи которой находят декартово произведение множеств, называют *декартовым умножением*.

Это название связано с именем французского математика Рене Декарта (1596-1650).

Если множества A и B равны, то $A \times B = A \times A = \{(x; y) \mid x, y \in A\}$ и $A \times A = A^2$ – называется *декартовым квадратом*.

Например, $A = \{m; n; p\}$, $A \times A = \{(m; n), (m; p), (n; p), (n; m), (p; m), (p; n), (m; m), (n; n), (p; p)\} = A^2$.

Теперь возьмем примеры, на которых рассмотрим, как можно найти и изобразить декартово произведение множеств.

Пример 3. Пусть даны множества: $A = \{1; 2; 3\}$ и $B = \{4; 5\}$. Так как оба множества конечные, то легко перечислить упорядоченные пары для декартова произведения, т.е. записать $A \times B$ а) *по определению*:

$A \times B = \{(1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5)\}$.

б) Удобно находить $A \times B$ в *таблице*, где в первом столбце записываем элементы множества A , в первой строке – элементы множества B , а на пересечении строк и столбцов записываем упорядоченные пары, первая компонента которых – элемент множества A , а вторая компонента – элемент множества B .

Таблица 1

$A \backslash B$	4	5
1	(1; 4)	(1; 5)
2	(2; 4)	(2; 5)
3	(3; 4)	(3; 5)

Находить декартово произведение двух множеств в таблице удобно, поскольку она не даст возможности пропустить какую-либо упорядоченную пару.

в) Можно изобразить данные множества A и B также на *координатной плоскости*, где элемент множества A отмечаем на оси Ox , а элемент множества B – на оси Oy . Изобразив каждую упорядоченную пару чисел точкой на координатной плоскости, получим фигуру (*график*), которая и будет наглядно представлять декартово произведение множеств. В данном примере мы имеем шесть точек – график декартова произведения множеств (рис. 20).

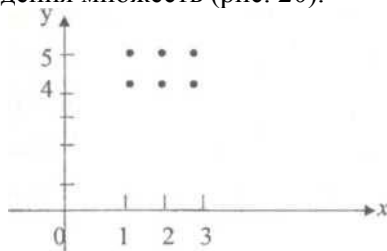


Рис. 20

Таким образом, декартово произведение двух конечных числовых множеств, можно найти: а) *перечислением упорядоченных пар по определению декартова произведения*; б) *в таблице также перечислением пар*; в) *на координатной плоскости в виде графика*.

Следует обратить внимание, что если множества A и B – конечные, но числовыми не являются, то декартово произведение множеств A и B на координатной плоскости изобразить уже нельзя. А если множества A и B числовые и хотя бы одно из них бесконечное, то тогда единственная возможность найти декартово произведение данных множеств – на координатной плоскости.

Пример 4. Найти декартово произведение множеств A и B , если:

а) $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{1; 4\}$;

б) $A = [2; 6]$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$;

в) $A = [2; 6]$, $B = [1; 4]$.

Для случая а) перечислить все элементы $A \times B$ невозможно, так как множество B – бесконечное. Но можно представить себе процесс образования этого декартова произведения: в каждой паре первая компонента – либо 2, либо 4, либо 6, а вторая компонента – любое действительное число из промежутка от 1 до 4. Все пары, первая компонента которых есть число 2, а вторая принимает значения от 1 до 4 включительно, изображаются на координатной плоскости отрезком CD ; пары, первая компонента которых есть число 4, а вторая принимает значение от 1 до 4, – отрезком MN ; а пары, первая компонента которых равна 6, а вторая – любое действительное число из промежутка $[1; 4]$, – отрезком FQ (рис. 21). Таким образом, для случая а) декартово произведение множеств A и B изображается на координатной плоскости в виде отрезков CD , MN и FQ , которые параллельны оси Oy .

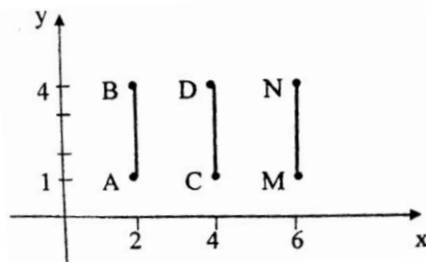


Рис. 21

В случае б) множество A является бесконечным, а B – конечным, т.е. декартово произведение множеств A и B на координатной плоскости будет изображаться тоже отрезками, но уже параллельными оси Ox , так как первая компонента пар принимает любые действительные значения от 2 до 6, а вторая компонента – либо 1, либо 2, либо 3, либо 4 (рис.22).

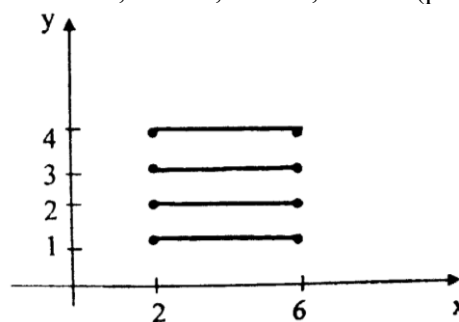


Рис. 22

Случай в) отличается от рассмотренных случаев а) и б) тем, что здесь оба множества A и B являются бесконечными. Первая компонента пар, принадлежащих $A \times B$, принимает любые действительные значения из промежутка от 2 до 6 включительно, а вторая компонента – любые действительные значения от 1 до 4 включительно. Поэтому точки, изображающие декартово произведение множеств A и B , образуют прямоугольник $ABCD$ (рис.23). Чтобы подчеркнуть, что элементы $A \times B$ изображаются точками этого прямоугольника, его нужно заштриховать.

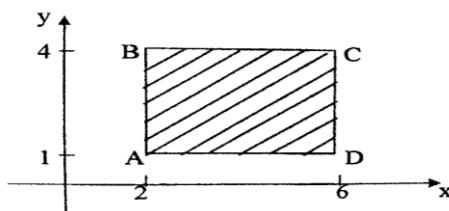


Рис. 23

Не все законы, которые выполнялись для пересечения и объединения множеств, присущи декартову умножению множеств.

I. $(\forall X) (X \times \emptyset = \emptyset \times X = \emptyset)$, т.е. декартово произведение любого множества X и пустого множества равно пустому множеству.

Доказательство здесь очевидно, так как невозможно образовать упорядоченные пары из элементов любого множества X и пустого множества, в котором нет ни одного элемента. Следовательно, $X \times \emptyset = \emptyset$.

Аналогично, $\emptyset \times X = \emptyset$.

II. Закон коммутативности не выполняется для декартова умножения множеств: $(\forall X, Y) (X \neq Y \Rightarrow X \times Y \neq Y \times X)$.

Читаем: «Для любых неравных множеств X и Y декартово произведение множеств X и Y не равно декартову произведению множеств Y и X ».

Рассмотрим пример. Пусть даны множества: $X = \{0; 1; 2\}, Y = \{a; b\}$.

Найдем $X \times Y$ и $Y \times X$ и сравним их.

$X \times Y = \{(0; a), (0; b), (1; a), (1; b), (2; a), (2; b)\}$,

$Y \times X = \{(a; 0), (a; 1), (a; 2), (b; 0), (b; 1), (b; 2)\}$.

Сравним элементы в $X \times Y$ и $Y \times X$. Среди них нет равных, они отличаются либо составом элементов, либо порядком следования элементов. Поэтому, $X \times Y \neq Y \times X$, т.е. в декартовом произведении нельзя переставлять множества местами.

III. Закон ассоциативности не выполняется для декартова умножения множеств: $(\forall X, Y, Z) [X \times (Y \times Z) \neq (X \times Y) \times Z]$.

Читаем: «Для любых множеств X, Y, Z декартово произведение множества X на декартово произведение множеств Y и Z не равно декартову произведению множества Z на декартово произведение множеств X и Y ».

Например, найдем $X \times (Y \times Z)$, $(X \times Y) \times Z$ и сравним их, если $X = \{1; 2\}$, $Y = \{a; b\}$, $Z = \{*, \Delta\}$.

$X \times (Y \times Z) = \{(1; (a; *)), (1; (a; \Delta)), (1; (b; *)), (1; (b; \Delta)), (2; (a; *)), (2; (a; \Delta)), (2; (b; *)), (2; (b; \Delta))\}$.

$(X \times Y) \times Z = \{((1; a); *), ((1; a); \Delta), ((1; b); *), ((1; b); \Delta), ((2; a); *), ((2; a); \Delta), ((2; b); *), ((2; b); \Delta)\}$. Сравнивая пары множеств $X \times (Y \times Z)$ и $(X \times Y) \times Z$, видим, что они различны, следовательно, $X \times (Y \times Z) \neq (X \times Y) \times Z$, т.е. в декартовом произведении нельзя переставлять местами скобки, от этого результат изменяется.

IV. Закон дистрибутивности декартова умножения множеств относительно объединения множеств: $(\forall X, Y, Z) [X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)]$.

Читаем: «Для любых множеств X, Y, Z декартово произведение множества X с объединением множеств Y и Z равно объединению декартова произведения множеств X и Y и декартова произведения множеств X и Z ».

Например, даны множества: $X = \{a; b\}$, $Y = \{c; d\}$, $Z = \{m; n\}$.

Найдем $X \times (Y \cup Z)$ и $(X \times Y) \cup (X \times Z)$ и сравним результаты.

а) $X \times (Y \cup Z)$

1) $Y \cup Z = \{c; d; m; n\}$,

2) $X \times (Y \cup Z) = \{(a; c); (a; d); (a; m); (a; n); (b; c); (b; d); (b; m); (b; n)\}$.

б) $(X \times Y) \cup (X \times Z)$

1) $X \times Y = \{(a; c); (a; d); (b; c); (b; d)\}$,

2) $X \times Z = \{(a; m); (a; n); (b; m); (b; n)\}$,

3) $(X \times Y) \cup (X \times Z) = \{(a; c); (a; d); (b; c); (b; d); (a; m); (a; n); (b; m); (b; n)\}$.

Сравнивая множества $X \times (Y \cup Z)$ и $(X \times Y) \cup (X \times Z)$, видим, что они равны.

V. Закон дистрибутивности декартова умножения множеств относительно вычитания множеств: $(\forall X, Y, Z) [X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z)]$.

Читаем: «Для любых множеств X, Y, Z декартово произведение множества X на разность множеств Y и Z равно разности декартова произведения множеств X и Y и декартова произведения множеств X и Z ».

1.8. Кортеж. Декартово произведение n множеств

В математике и других науках рассматривают не только упорядоченные пары, но и упорядоченные наборы из трех, четырех и более элементов. Например, запись числа 367 – это упорядоченный набор из трех элементов, а запись слова «телефон» – это упорядоченный набор из 7 элементов.

Пусть даны множества $A_1, A_2, \dots, A_n$. Возьмем какой-нибудь элемент x_1 из множества A_1 , x_2 – из A_2 , ..., x_n – из A_n . Выбранные элементы расположим по порядку $(x_1; x_2; \dots; x_n)$. Тем самым мы получили упорядоченную энку элементов, выбранных из множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Вместо слов «упорядоченная n -ка» говорят короче – «кортеж» и различают по длине (французское слово «кортеж» означает торжественное шествие, например, кортеж машин).

Число n называют длиной кортежа, а элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ – его компонентами.

Упорядоченной n -кой элементов или кортежом длины n называют n элементов, записанные в определенном порядке.

Например. 1. Кортеж цифр числа 367 имеет вид: $(3, 6, 7)$ – это кортеж длины 3.

2. Слово «телефон» имеет вид: (т, е, л, е, ф, о, н) – это кортеж длины 7, составленный из множества букв русского алфавита.

3. Предложение «У меня зазвонил телефон» – кортеж длины 4, составленный из множества слов русского языка. Каждое из этих слов – кортеж. Таким образом, компонентами кортежа могут быть и кортежи.

Используя понятие кортежа, можно определить понятие декартова произведения трех, четырех и, вообще, n множеств.

Пусть даны множества $A_1, A_2, \dots, A_n$. Из элементов этих множеств образуем кортежи длины n , первая компонента которых принадлежит множеству A_1 , вторая – A_2 , ..., n -ая – множеству A_n .

Множество таких кортежей называют декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ и обозначают $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множество всевозможных кортежей вида $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, первая компонента которых принадлежит множеству A_1 , вторая – множеству A_2 , ..., n -я – множеству A_n .

В символах декартова произведения n множеств запишется:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}.$$

Например, для множеств $A_1 = \{1; 2\}$, $A_2 = \{3; 4\}$, $A_3 = \{5\}$ найдем $A_1 \times A_2 \times A_3$. Получим: $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(1; 3; 5), (1; 4; 5), (2; 3; 5), (2; 4; 5)\}$.

1.8. Разбиение множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы)

В процессе изучения предметов и явлений окружающего мира мы постоянно сталкиваемся с классификацией. Классификация широко используется в биологии, химии, математике, языке и во многих других науках. Она облегчает процесс усвоения знаний.

Например, классификация листьев растений по строению, частей речи, членов предложения, чисел, геометрических фигур и т.д.

Классификация – это действие распределения объектов по классам на основании сходств объектов внутри класса и их отличия от других классов, т.е. классификация в любой области человеческой деятельности связана с разбиением множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы).

Для определения разбиения множества на попарно непересекающиеся подмножества, или классы используются понятия подмножества, объединения и пересечения множеств.

Говорят, что множество X разбито на попарно непересекающиеся подмножества или классы $X_1, X_2, \dots, X_n$, если выполнены следующие условия:

1) каждое подмножество не пусто, т.е. $X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset, \dots, X_n \neq \emptyset$;

2) пересечение любых двух подмножеств пусто (никакие два подмножества попарно не пересекаются);

3) объединение всех подмножеств совпадает с множеством X , т.е. $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = X$.

Пример 1. Множество X – множество треугольников, A, B, C – его подмножества. A – множество остроугольных треугольников, B – множество прямоугольных треугольников, C – множество тупоугольных треугольников. Можно ли говорить о разбиении множества X на классы A, B, C ?

Чтобы дать положительный ответ на поставленный вопрос, необходимо убедиться в том, что все условия разбиения множества X на классы выполняются. Действительно, во-первых, каждое из подмножеств A, B и C не пусто. Во-вторых, множества A, B и C попарно не пересекаются: не существует треугольников, являющихся одновременно остроугольными и тупоугольными, также как и треугольников, являющихся одновременно тупоугольными и прямоугольными, остроугольными и прямоугольными. И, в-третьих, если объединить множества остроугольных треугольников с множеством тупоугольных и множеством прямоугольных треугольников, то получим множество всех треугольников, т.е. множество X .

Итак, множество всех треугольников разбивается на классы остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников.

Классификацию для этого примера можно представить следующей схемой (рис. 24):

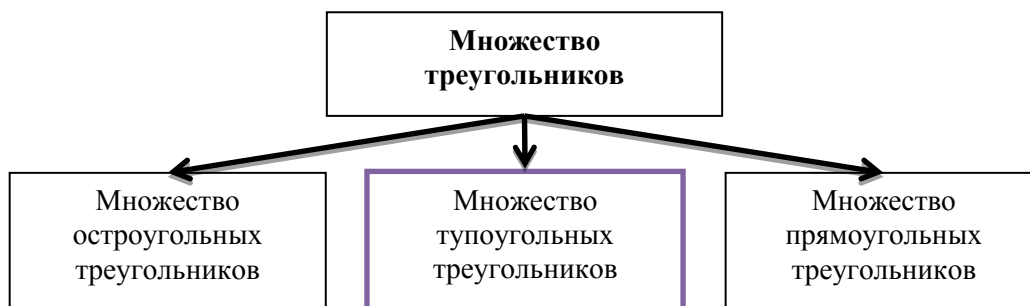


Рис. 24

На диаграмме Эйлера-Венна это разбиение на классы изображено на рисунке 25.

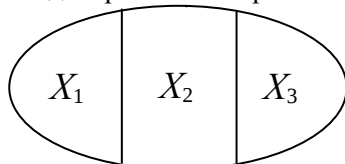


Рис. 25

Большое значение в математических упражнениях младших школьников имеет умение правильно классифицировать предметы.

Пример 2. Множество X – множество треугольников, A , B , C – его подмножества. A – множество равнобедренных треугольников, B – множество равносторонних треугольников, C – множество разносторонних треугольников. Можно ли говорить о разбиении множества X на классы A , B , C ?

Проверим, выполняются ли условия разбиения множества X на классы. Так как среди равнобедренных треугольников есть равносторонние, то множества A и B попарно пересекаются, а значит, второе условие разбиения не выполняется.

Следовательно, множество треугольников нельзя разбить на классы равнобедренных, равносторонних и разносторонних треугольников.

Пример 3. Задание ученику: «Собери красные кубики в красную коробку, синие – в синюю, а зеленые – в зеленую».

Ученик разбивает множество кубиков на три класса (подмножества) по признаку цвета (характеристическому свойству).

Другими словами, классификация будет правильной, если все элементы заданного множества будут распределены по классам, и каждый элемент будет находиться только в одном классе.

Задания для самоконтроля

Изучив тему «Множества и операции над ними», студент должен *уметь*:

- определять вид множества;
- переходить от одного способа задания множеств к другому;
- устанавливать отношения между множествами и изображать их на диаграммах Эйлера-Венна;
- выполнять операции над множествами и изображать их на диаграммах Эйлера-Венна;
- находить число элементов в пересечении, объединении и разности конечных множеств;
- находить декартово произведение двух множеств разными способами;
- находить декартово произведение n множеств;
- вычислять число элементов в декартовом произведении двух и более конечных множеств;
- производить разбиение множества на классы (по одному или нескольким свойствам);
- оценивать правильность выполненной квалификации;
- применять знания по теме для анализа материала учебников математики для начальной школы.

Проверить сформированность названных умений можно, выполнив *следующие задания*.

1. M – множество музыкальных инструментов эстрадного оркестра. Принадлежат ли этому множеству:

а) барабан; б) гитара; в) струна гитары; г) балалайка?

2. Назовите элементы множества электроприборов, имеющих в вашем доме.

3. Из каких элементов состоит множество предметов, изучаемых в педагогическом институте на 1 курсе?

4. A – множество геометрических фигур на плоскости. Принадлежат ли этому множеству:

а) пятиугольник; б) прямая; в) куб; г) окружность; д) точка?

5. C – множество предметов мебели в кабинете, где проходят ваши занятия по математике. Выясните, какие из следующих утверждений истинны:
- доска принадлежит множеству C ;
 - учительский стол является элементом множества C ;
 - множеству C принадлежит шкаф с наглядными пособиями;
 - окно не является элементом множества C ;
 - дверь принадлежит множеству C .
6. N – множество натуральных чисел, K – множество четных натуральных чисел, M – множество натуральных чисел, делящихся на 3. Запишите, используя символ $\in$, каким множествам принадлежат числа 4, 12, 79, -15. Запишите, используя символ $\notin$, каким из данных множеств не принадлежат эти числа.
7. Запишите, используя символы: а) число 14 – натуральное; б) число -7 не является натуральным; в) число 0 – рациональное; г) число 0,2301 – действительное.
8. Установите, в каких из следующих предложений идет речь об отношении принадлежности (или непринадлежности) элемента множеству; в каждом таком случае укажите это множество:
- слово «дом» – имя существительное;
 - Маша – студентка;
 - число 12 – натуральное;
 - отрезок AB – геометрическая фигура;
 - Число 5,4 – не является натуральным;
9. Даны множества:
 A – множество частей света;
 B – множество океанов на земном шаре;
 C – множество месяцев в году;
 D – множество букв в слове «параллелограмм».
- Сформулируйте характеристическое свойство элементов каждого из данных множеств.
 - Задайте данные множества, перечислив их элементы.
10. Укажите характеристическое свойство элементов каждого из следующих множеств:
 M – {вторник, среда, воскресенье, суббота, понедельник, четверг, пятница};
 P – {Москва, Киев, Таллин, Рига, Вильнюс, Кишинев, Тбилиси, Ереван, Минск, Душанбе, Фрунзе, Баку, Ташкент}.
11. Выясните, каково характеристическое свойство элементов множества, и перечислите его элементы:
- множество однозначных чисел;
 - множество натуральных делителей числа 24;
 - множество двузначных чисел, делящихся на 10.
12. Даны множества: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{12, 11, 10, 9, 8, 7\}$, $C = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$. Сформулируйте характеристическое свойство элементов каждого из этих множеств.
13. Запишите следующие множества по характеристическому свойству, используя символы, и определите вид каждого множества:
- множество натуральных чисел, меньших 20;
 - множество натуральных чисел, не меньших 15;
 - множество натуральных чисел, больших 7;
 - множество натуральных чисел, не больших 12;
 - множество натуральных чисел, больших 7 и меньших 14.
14. Разбейте следующие множества на конечные и бесконечные:
- $A = \{x \mid x \in N, x < 5\}$;
 - $B = \{x \mid x \in N, x > 5\}$;
 - C – множество точек на отрезке AB ;
 - D – множество вершин квадрата;
 - E – множество треугольников;
 - K – множество двузначных чисел.
15. Прочитайте записи и изобразите на координатной прямой следующие множества, определив вид каждого множества:
- $A = \{x \mid x \in R, 3 < x < 6\}$;
 - $B = \{x \mid x \in Z, -5 < x < 2\}$;
 - $C = \{x \mid x \in R, 3 < x < 6\}$;
 - $M = \{x \mid x \in Z_0, x < 5\}$;
 - $N = \{x \mid x \in N, 2 < x < 7\}$;
 - $Q = \{x \mid x \in R, 0 < x < 4\}$;

- г) $D = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 6\}$; к) $P = \{x | x \in \mathbb{Z}_0, -3 < x < 3\}$;
 д) $E = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 3\}$; л) $S = \{x | x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 3\}$;
 е) $F = \{x | x \in \mathbb{R}, x < 5\}$; м) $T = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 7\}$.

16. Задайте по характеристическому свойству множества, выделенные штриховкой на координатной прямой (рис. 26):

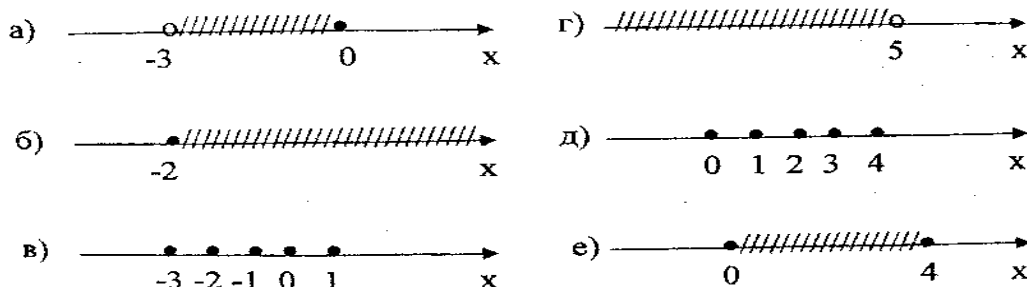


Рис. 26

17. Какое множество задано в каждом из следующих случаев:

- а) множество городов на Луне;
 б) множество динозавров в московском зоопарке;
 в) множество натуральных чисел, меньших нуля;
 г) множество решений уравнения $3(x + 2) = 8 + 3x$;
 д) множество треугольников со сторонами длиной 4, 5 и 10 см.

18. Известно, что элементы множества U обладают свойством «быть прямоугольником с конгруэнтными сторонами». Из каких геометрических фигур состоит множество U ? Можно ли указать другое характеристическое свойство элементов множества U ?

19. Покажите, что в следующих задачах речь идет (по существу) о задании множества при помощи характеристического свойства его элементов:

- а) запишите все однозначные числа;
 б) запишите числа, которые больше, чем 65, и меньше, чем 75;
 в) увеличьте каждое нечетное однозначное число в 2 раза.
 20. Даны два множества: $X = \{2; 4; 6\}$ и $U = \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Верно ли, что:

- а) множества X и U пересекаются;
 б) множество X является подмножеством множества U ;
 в) множество $C = \{4; 0; 6; 8; 2\}$ равно множеству U ?

21. Установите, в каком отношении находятся множества A и B если $A = \{a; b; c; d\}$, а множество B таково: а) $B = \{k; l; m\}$; б) $B = \{b; c; e; f; k\}$; в) $B = \{d; f; c; b; a\}$; г) $B = \{b; d\}$.

22. Изобразите на диаграмме Эйлера-Венна множества A и B , если:

- а) A – множество двузначных чисел, $B = \{3; 43; 34; 56; 105\}$;
 б) A – множество двузначных чисел, B – множество четных чисел;
 в) A – множество двузначных чисел, B – множество трехзначных чисел;
 г) A – множество двузначных чисел, B – множество натуральных чисел, не меньших 10.

23. Выпишите пары множеств, находящихся в отношении включения, если: A – множество квадратов, B – множество параллелограммов, C – множество ромбов, D – множество прямоугольников. Верно ли, что если L – подмножество D и D – подмножество B , то A – подмножество B ?

24. X – множество правильных многоугольников, U – множество четырехугольников, M – множество прямоугольников. Установите отношения, существующие между данными множествами X , U и M , и изобразите их при помощи диаграмм Эйлера-Венна.

25. Даны множества: A – множество параллелограммов, B – множество ромбов, C – множество прямоугольников.

а) Установите отношения, существующие между данными множествами, и изобразите их при помощи кругов Эйлера.

б) Укажите среди следующих утверждений истинные: всякий ромб есть параллелограмм; всякий ромб есть прямоугольник; некоторые ромбы являются прямоугольниками; некоторые ромбы не являются прямоугольниками; все ромбы не являются прямоугольниками.

26. Приведите примеры множеств, изображенных на диаграммах Эйлера-Венна (рис. 27), задавая их: 1) перечислением; 2) по характеристическому свойству; 3) по названию.

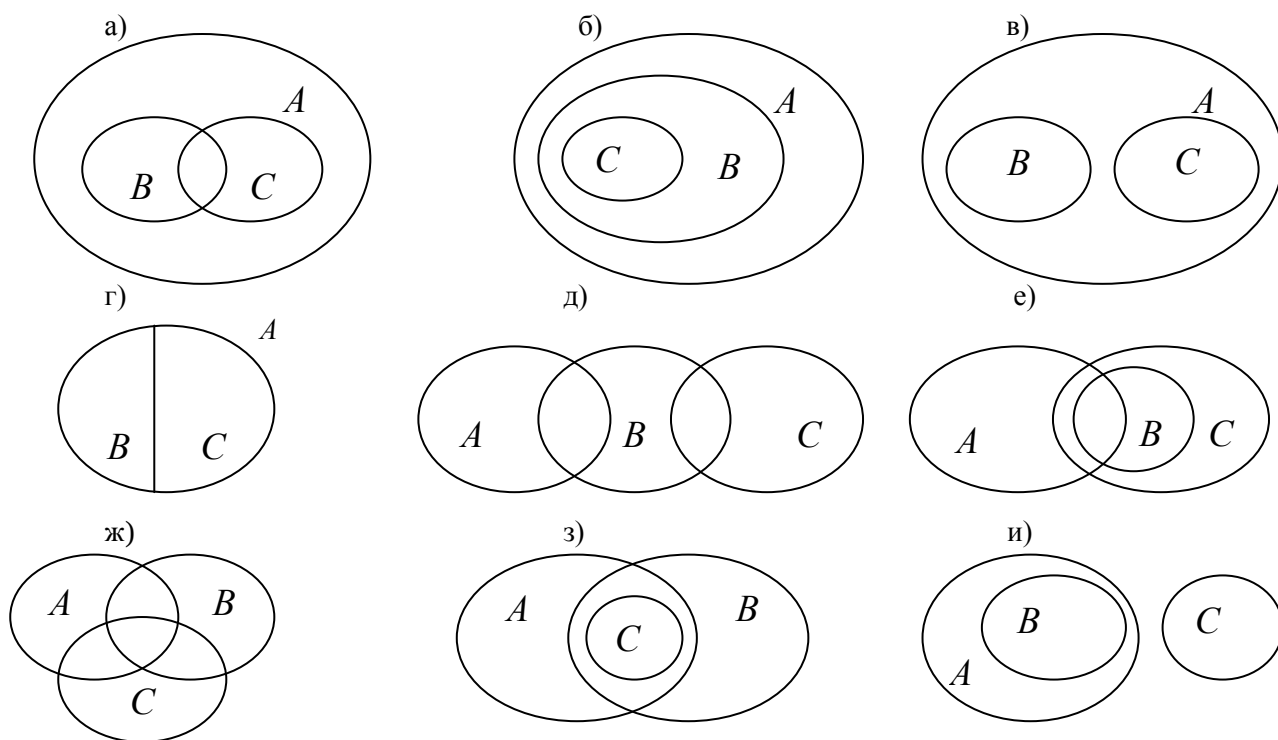


Рис. 27

27. M – множество треугольников, у которых высота, проведенная из вершины на основание, является биссектрисой;

K – множество равносторонних треугольников;

L – множество равнобедренных треугольников;

P – множество треугольников, у которых все высоты конгруэнтны.

Есть ли среди множеств M , K , L и P пары равных множеств?

28. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если:

а) $A = \{a; b; c; d; e; f\}$, $B = \{b; e; f; k; m\}$;

б) $A = \{10; 14; 15; 17; 18\}$, $B = \{17; 14\}$;

в) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, x > -3\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R}, -5 < x < 0\}$;

г) A – множество ромбов, B – множество параллелограммов. Изобразить каждую пару множеств на диаграмме Эйлера-Венна и заштриховать $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

29. Найдите дополнение: а) множества четных натуральных чисел до множества N ; б) множества отрицательных целых чисел до множества Z ; в) множества Z до Q .

30. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, A' , B' , если:

а) $A = [-4; 5]$, $B = [3; 8]$;

б) $A = (-\infty; 2]$, $B = [-2; +\infty)$;

в) $A = (-\infty; 4]$, $B = [6; +\infty)$;

г) $A = \emptyset$, $B = (6; +\infty)$.

31. Даны множества: A – множество чисел, кратных 2, B – множество чисел, кратных 3, C – множество чисел, кратных 5, причем A , B , C – подмножества N натуральных чисел. Укажите характеристические свойства элементов следующих множеств:

а) $A \cup B \cup C$;

в) $(A \cap B)'$;

д) $B \setminus C$;

б) $A \cap B \cap C$;

г) $(B \cap C)'$;

е) $A \setminus C$.

Назовите по три числа, принадлежащих каждому из этих множеств.

32. Запишите множество букв слова «параллелограмм». Запишите кортеж букв этого слова. Определите длину кортежа.

33. Сколько цифр в записи числа 178877? Запишите множество цифр этого числа. Запишите кортеж цифр данного числа и определите его длину.

34. Покажите, что решение нижеприведенных задач приводит к образованию декартова произведения множеств:

а) Запишите различные двузначные числа, используя цифры 1, 2, 3, 4. Сколько их будет?

б) Запишите все дроби, числителем которых является цифра из множества $X = \{3; 4\}$, а знаменателем – цифра из множества $Y = \{5; 6; 7\}$. Сколько должно получиться дробей?

35. Даны множества $A=\{a; b; c; d\}$ и $B=\{e; f; g\}$. Найдите декартово произведение множеств.
36. Дано множество $A=\{1; 2; 3; 4\}$. Найдите декартов квадрат A^2 .
37. Найдите $X \times Y$ и $Y \times X$, если: а) $X=\{a; b; c\}$, $Y=\{k; 1\}$; б) $X=\{a; b; c\}$, $Y=\{d\}$.
38. Даны множества: $X=\{1; 2\}$ и $Y=\{4; 5\}$. Найдите $X \times Y$ и $Y \times X$, постройте их графики на координатной плоскости. Одинаковы ли они?
39. Изобразите на координатной плоскости элементы декартова произведения множеств X и Y , если:
- | | |
|--|-----------------------------|
| а) $X=\{-1; 0; 1; 2\}$, $Y=\{2; 3; 4\}$; | е) $X=R$, $Y=[-2; 2]$; |
| б) $X=\{-1; 0; 1; 2\}$, $Y=[2; 4]$; | ж) $X=[-3; 2]$, $Y=R$; |
| в) $X=[-1; 2]$, $Y=\{2; 3; 4\}$; | з) $X=\{2\}$, $Y=R$; |
| г) $X=[1; 7]$, $Y=[2; 6]$; | и) $X=R$, $Y=\{-3\}$; |
| д) $X=(-3; 2]$, $Y=(0; 5)$; | к) $X=\{2\}$, $Y=\{-3\}$. |
40. Изобразите на координатной плоскости элементы декартова произведения множеств X и Y , если:
- а) $X=\{x | x \in N, x < 3\}$, $Y=\{y | y \in Z, -3 < y < 2\}$;
- б) $X=\{x | x \in N, x < 4\}$, $Y=\{y | y \in R, 0 < y < 3\}$;
- в) $X=\{x | x \in R, -3 < x \leq 2\}$, $Y=\{y | y \in Z_0, y < 2\}$;
- г) $X=\{x | x \in R, x \geq 0\}$, $Y=\{y | y \in R, -2 < y < 2\}$.
41. Из множества $P=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ выделили подмножества A , B и C . Выясните, в каком случае произошло разбиение множества P на классы:
- а) $A=\{1; 3; 5\}$, $B=\{2; 4; 6; 8\}$, $C=\{7; 9\}$;
- б) $A=\{5\}$, $B=\{3; 4; 8; 9\}$, $C=\{1; 6\}$;
- в) $A=\{1; 3; 5\}$, $B=\{2; 4; 6; 8\}$, $C=\{5; 7; 9\}$;
- г) $A=\{1; 3\}$, $B=\{4; 6; 8\}$, $C=\{5; 6; 9\}$.
42. Проверьте, выполнены ли условия классификации, если:
- а) множество углов разбили на острые, тупые и прямые;
- б) множество звуков русского языка – на гласные и согласные;
- в) множество животных – на диких и на домашних животных;
- г) множество студентов факультета – на первокурсников, отличников и студентов;
- д) множество деревьев – на лиственные и хвойные.
43. Укажите классы разбиения множества треугольников, получающиеся при рассмотрении на этом множестве двух свойств: «быть равнобедренным треугольником» и «быть прямоугольным треугольником».
44. Назовите три подмножества, на которые разбивается множество точек плоскости при построении на ней:
- а) окружности; б) прямой.
45. Множество слов {строитель, садовый, снеговик, посадить, снежный, построить, снежок} разбили на подмножества следующим образом:
 $C_1=\{\text{построить, посадить}\}$, $C_2=\{\text{садовый, снежный}\}$, $C_3=\{\text{снеговик, снежок, строитель}\}$.
 Произошло ли разбиение данного множества слов на классы? Можно ли разбить данное множество на классы другим способом?
46. Из множества всех треугольников плоскости выделили следующие подмножества треугольников:
- а) равнобедренные, равносторонние, прямоугольные;
- б) остроугольные, тупоугольные, прямоугольные;
- в) равносторонние, тупоугольные, прямоугольные.
- Выясните, в каком из данных случаев произошло разбиение множества всех треугольников на классы.
47. Приведите примеры разбиения множества X на классы, если
- а) X – множество учащихся класса;
- б) X – множество растений;
- в) X – множество цветов;
- г) X – множество учебных дисциплин, изучаемых на факультете;
- д) X – множество дней в году;
- е) $X=R$; $X=Z_0$; $X=N$;
- ж) X – множество прямых плоскости
48. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в

виде трех вертикальных полос одинаковой ширины разных цветов – зеленого, черного и желтого. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг?

49. Назовите классы разбиения множества P – учащихся школы, полученные с помощью свойств «быть шахматистом», «быть лыжником», «быть волейболистом», если никто из шахматистов не увлекается лыжами, но все волейболисты играют в шахматы.

50. О какой операции и над какими множествами идет речь в следующих задачах.

а) Из корзины взяли 4 яблока и 3 груши. Сколько всего фруктов взяли из корзины?

б) У Тани было 5 марок. Две марки она наклеила на конверт. Сколько марок осталось у Тани?

в) Сколько столов понадобится 27 ученикам, если за каждый стол могут сесть 3 человека?

Проектная задача. «Множества в начальном обучении математике».

1. Установите, в каких учебниках математики для начальных классов теоретико-множественные понятия изучаются в явном виде, а в каких – неявно. Выводы обоснуйте.

2. Назовите теоретико-множественные понятия, которые школьники изучают в явном виде. Приведите примеры заданий, которые они выполняют для усвоения этих понятий.

3. Выясните, с какой целью теоретико-множественные понятия включены в учебники математики для 1–4 классов.

ГЛАВА 2. СООТВЕТСТВИЯ И ОТНОШЕНИЯ

2.1. Соответствия между элементами двух множеств

Понятие соответствия между множествами относится к числу фундаментальных понятий математики. Изучая окружающий мир, математика рассматривает не только сами объекты, но и связи между ними, которые называют *соответствиями* между элементами двух множеств, *отношениями* между элементами одного множества.

Формирование почти всех понятий развития математических представлений у дошкольников сопровождается рассмотрением тех соответствий и отношений, которые существуют между изучаемыми объектами. Например, при вычислении длины предметов устанавливаются соответствия между предметами и числами, которые являются значениями их длины; изучая понятие натурального числа, мы говорим об отношениях «больше», «меньше», «равно»; изучая отрезки, рассматриваем отношения «длиннее», «короче», «равно». Со многими соответствиями и отношениями учащиеся начальных классов встречаются при решении текстовых задач. Поэтому неслучайно одной из начальных задач математической подготовки младших школьников является выработка умения сравнивать множества путем установления соответствий между его элементами.

Пусть даны множества X и Y .

Соответствием между элементами множеств X и Y называется всякое подмножество декартова произведения этих множеств.

Иными словами, соответствие – это *тройка множеств* (X, Y, Γ) , где Γ является подмножеством декартова произведения множеств X и Y , т.е. $\Gamma \subset X \times Y$. Множество X называют *областью отправления*, Y – *областью прибытия*, а Γ – *графиком соответствия*.

Соответствие между элементами двух множеств X и Y называют *бинарными* (слово «бинарный» происходит от лат. слова «bis», означающего *дважды*), и показывает, что речь идет о двух множествах X и Y).

Соответствия обозначают большими буквами латинского алфавита R, S, T и др. Например, если упорядоченная пара элементов $(x; y) \in \Gamma$ соответствия R , то говорят, что элементу x множества X соответствует элементу множества Y и пишут xRy . При этом элемент $y \in Y$ называют *образом* элемента $x \in X$, а элемент $x \in X$ – *прообразом* элемента $y \in Y$. Используя введенные обозначения можно записать в символах определения графика соответствия $R: \Gamma = \{(x; y) | x \in X, y \in Y, xRy\}$. Читаем: «Графиком Γ называется множество упорядоченных пар $(x; y)$ таких, что элемент x принадлежит множеству X , элемент y принадлежит множеству Y и элемент x находится в соответствии R к элементу y ». Например, если $X = \{1; 2; 3; 4\}$, $Y = \{-1; 4; 9\}$ и между элементами этих множеств задано соответствие xRy : « $x < y$ », то график $\Gamma = \{(1; 4), (1; 9), (2; 4), (2; 9), (3; 4), (3; 9), (4; 9)\}$.

Запись xRy , является обобщением записи многих соответствий и отношений, употребляемых в математике. Сравните, например, запись xRy с записью отношений между числами: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

Наряду с записью xRy используется запись $R(x; y)$, а это – обозначение двухместного предиката (высказывательной формы с двумя переменными).

2.2. Способы задания соответствий

Способ 1 – задание соответствия двухместным предикатом.

Соответствие задают, указав характеристическое свойство всех пар, которые находятся в данном соответствии. Это свойство формулируется с помощью двухместного предиката.

Например, пусть даны множества $X = \{-3; 1; 3\}$ и $Y = \{-2; 0; 2\}$. С помощью предиката можно задать, скажем, такое соответствие $R(x; y)$: « $x < y$ », которое можно записать еще и так: « x меньше y ».

Данный способ задания соответствий является наиболее распространенным.

Способ 2 – задание соответствия записью графика.

Соответствие задают, указав его график $\Gamma = \{(x; y) | x \in X, y \in Y, xRy\}$. Другими словами, соответствие R считается заданным, если заданы множества X, Y и Γ . Предыдущее соответствие $R(x; y)$ можно задать так: $\Gamma = \{(-3; -2), (-3; 0), (-3; 2), (1; 2)\}$, где $X = \{-3; 1; 3\}$, $Y = \{-2; 0; 2\}$.

Способ 3 – задание соответствия таблицей.

Соответствие задают, записав упорядоченные пары элементов, связанные данным соответствием, в таблице, где по вертикали в первом столбце пишут элементы множества X , по горизонтали в первой строке – элементы множества Y .

Например, рассмотренное выше соответствие $R(x; y)$: « $x < y$ » можно задать с помощью следующей таблицы (табл. 2).

Таблица 2

$X \backslash Y$	-2	0	2
-3	$(-3;-2)$	$(-3;0)$	$(-3;2)$
1			$(1;2)$
3			

Примерами задания соответствий с помощью таблицы являются: расписание занятий, график дежурства, расписание консультаций и т.п.

Способ 4 – задание соответствия графиком на координатной плоскости.

Если множества X и Y – числовые множества, то соответствие R между их элементами можно задать, отметив точки его графика Γ на координатной плоскости, для этого элементы множества X изображают по оси Ox , элементы множества Y – по оси Oy . В этом случае говорят, что построен график соответствия R .

Этот способ удобен при задании соответствий между элементами бесконечных числовых множеств.

На рис. 28 построен график соответствия $R(x; y)$: « $x < y$ », заданного между элементами множеств $X = \{-3; 1; 3\}$ и $Y = \{-2; 0; 2\}$, а на рис. 29 – график соответствия $S(x; y)$: « $x = y$ », заданного между элементами множеств $X = R$ и $Y = R$, т.е. графиком этого соответствия является прямая – биссектриса I и III координатных углов.

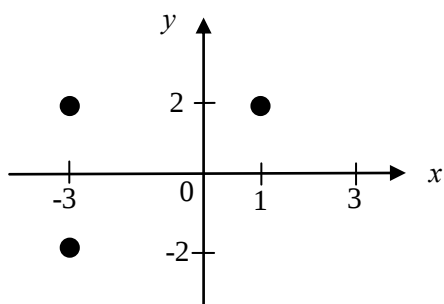


Рис. 28

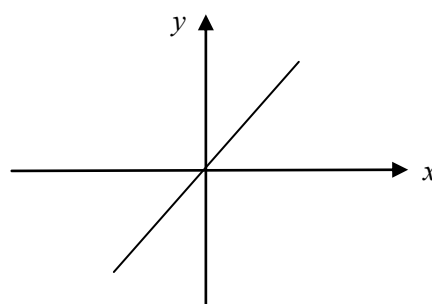


Рис. 29

Способ 5 – задание соответствия с помощью графа.

Если множества X и Y конечные, то бинарное соответствие между ними можно задать при помощи *ориентированного графа* (греч. слово «grapho» означает «пишу»).

Графом называется особый чертеж, на котором множества изображают в виде овалов, их элементы – точками и стрелками соединяют элементы множеств X и Y , находящиеся в заданном соответствии.

Это довольно наглядный способ задания соответствий.

На рис. 30 показан граф соответствия $R(x; y)$: « $x < y$ », заданного между элементами множеств $X = \{-3; 1; 3\}$ и $Y = \{-2; 0; 2\}$.

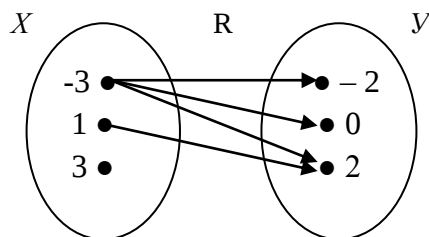


Рис.30

С опорой на граф соответствия рассмотрим новые понятия.

Множество X_1 всех элементов из X , имеющих непустые образы, т.е. таких, что из них выходит хоть одна стрелка, называется *областью (множеством) определения* соответствия R .

Итак, само множество X является областью отправления, а область определения X_1 является его подмножеством ($X_1 \subset X$ или $X_1 = X$).

Множество Y_1 всех элементов из Y , имеющих непустой прообраз, т.е. таких, что в них кончается хоть одна стрелка, называется *множеством значений* соответствия R .

Множество Y является областью прибытия, а множество значений Y_1 ($Y_1 \subset Y$ или $Y_1 = Y$).

Для соответствия R , изображенного на рис. 30, множество определения $X_1 = \{-3; 1\}$, а множество значений $Y_1 = \{-2; 0; 2\}$ и $Y_1 = Y$.

Необходимо отметить, что все рассмотренные способы задания соответствий связаны между собой: от любого из них можно перейти к другому способу, что мы и осуществили выше с соответствием $R(x; y): \langle x < y \rangle$.

Например, ребенку предлагается задание: «Угости кукол чаем. Дай каждой кукле по чашке. Всем ли куклам хватило чашек?» Выполняя это задание, ребенок устанавливает соответствие между множеством кукол и множеством чашек, образуя пары из элементов данных множеств.

Рассмотрим еще пример. Пусть дано соответствие $S(x; y): \langle x : y \rangle$, где $x \in X = \{0; 2; 6\}$, $y \in Y = \{1; 3; 4\}$, т.е. соответствие задано двухместным предикатом. Зададим его другими способами.

Запишем график соответствия: $\Gamma = \{(0; 1); (0; 3); (0; 4); (2; 1); (6; 1); (6; 3)\}$.

Зададим соответствие S в таблице 3.

Таблица 3

$X \backslash Y$	1	3	4
0	(0; 1)	(0; 3)	(0; 4)
2	(2; 1)		
6	(6; 1)	(6; 3)	

Изобразим данное соответствие графиком на координатной плоскости (рис.31) и построим граф соответствия S (рис. 32).

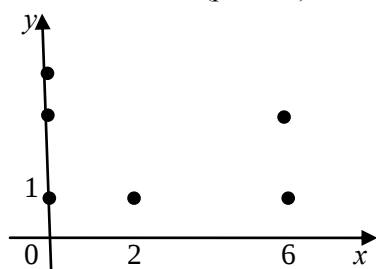


Рис. 31

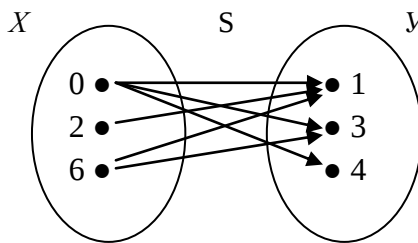


Рис. 32

Решение многих логических задач сводится к переходу от одного способа задания соответствия к другому, чаще – от задания характеристическим свойством к заданию перечислением, как, например, при решении следующей задачи.

Задача. Оля, Таня и Наташа живут на разных этажах. На каком этаже живет каждая девочка, если известно, что Таня не живет на первом этаже, а Оля живет выше Наташи и Тани?

Решение: В задаче надо указать пары (девочка, этаж). Из того, что Таня живет не на первом этаже, следует, что на первом этаже могли бы жить Наташа или Оля. Но Оля живет этажом выше Наташи, следовательно, она не может жить на первом этаже. Значит, на первом этаже живет Наташа, на втором – Таня, на третьем – Оля.

Очень полезны при формировании умения решать не только логические, но и любые другие задачи, специальные задания на установление соответствия. Они полезны при формировании числовых представлений, вычислительных навыков, геометрических представлений, при формировании любого понятия.

2.3. Обратное и противоположное соответствия

Каждому бинарному соответствию между множествами X и Y отвечает бинарное соответствие между множествами Y и X .

Например, можно сказать: «Прямая x касается окружности y » – это будет соответствие между множеством X прямых и множеством Y окружностей. Но если прямая касается окружности, то и окружность, в свою очередь, касается прямой, и мы получим соответствие «Окружность y касается прямой x », которое является *обратным соответствием* для данного соответствия. При переходе к обратному соответствию области отправления и прибытия меняются ролями: область отправления становится областью прибытия, и, наоборот – область прибытия становится областью отправления. В парах $(x; y)$, входящих в график данного соответствия, компоненты также меняются местами – вместо $(x; y)$ надо писать $(y; x)$.

Пусть задано соответствие xRy между множествами X и Y .

Для соответствия xRy , заданного между элементами x и y , где $x \in X$, $y \in Y$, соответствие yRx , заданное между элементами y и x , называется *обратным соответствием*.

Обычно вместо yRx пишут $yR^{-1}x$ или $R^{-1}(x;y)$ – это и будет обозначением обратного соответствия.

Сформулируем для некоторых соответствий обратные соответствия.

Например, $R(x;y): \langle x > y \rangle$, $R^{-1}(x;y): \langle y < x \rangle$; $S(x;y): \langle x = y \rangle$, $S^{-1}(x;y): \langle y = x \rangle$.

Рассмотрим пример, на котором выясним, в какой связи находятся способы задания данного и обратного соответствий.

Пример 1. Дано соответствие $R(x;y): \langle x > y \rangle$, где $x \in X = \{1; 4; 7\}$, $y \in Y = \{0; 2; 3\}$. Его график $\Gamma = \{(1; 0); (4; 0); (7; 0); (4; 2); (4; 3); (7; 2); (7; 3)\}$.

Для обратного соответствия $R^{-1}(x;y): \langle y < x \rangle$ графиком будет множество $\Gamma^{-1} = \{(0; 1); (0; 4); (0; 7); (2; 4); (3; 4); (2; 7); (3; 7)\}$. Таким образом, чтобы получить график обратного соответствия, нужно в графике Γ данного соответствия компоненты в каждой паре поменять местами.

Изобразим данное соответствие $R(x;y)$ в таблице 4а, а обратное $R^{-1}(x;y)$ в таблице 4б.

Таблица 4а

$X \backslash Y$	0	2	3
1	(1; 0)		
4	(4; 0)	(4; 2)	(4; 3)
7	(7; 0)	(7; 2)	(7; 3)

Таблица 4б

$Y \backslash X$	1	4	7
0	(0; 1)	(0; 4)	(0; 7)
2		(2; 4)	(2; 7)
3		(3; 4)	(3; 7)

Итак, чтобы построить таблицу для обратного соответствия, нужно столбец для обозначения элементов множества X и строку с элементами множества Y поменять местами, тем самым и компоненты всех пар поменяются местами.

Теперь построим граф для данного соответствия $R(x;y)$ (рис. 33а) и граф обратного соответствия $R^{-1}(x;y)$ (рис. 33б).

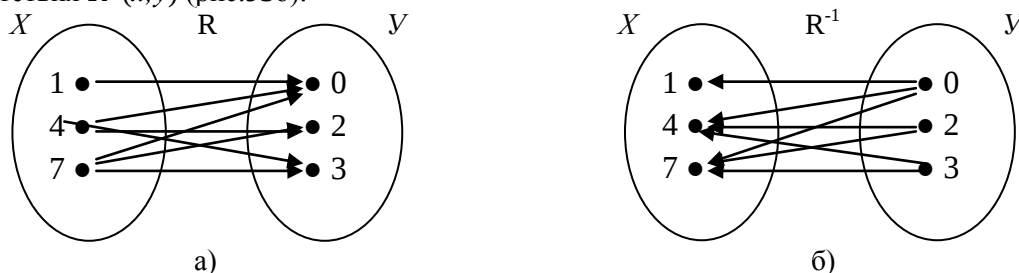


Рис. 33

Значит, чтобы построить граф обратного соответствия, нужно в графе данного соответствия изменить направление всех стрелок на противоположное.

Осталось построить на координатной плоскости графики данного соответствия $R(x;y)$ (рис. 34а) и обратного соответствия $R^{-1}(x;y)$ (рис. 34б).

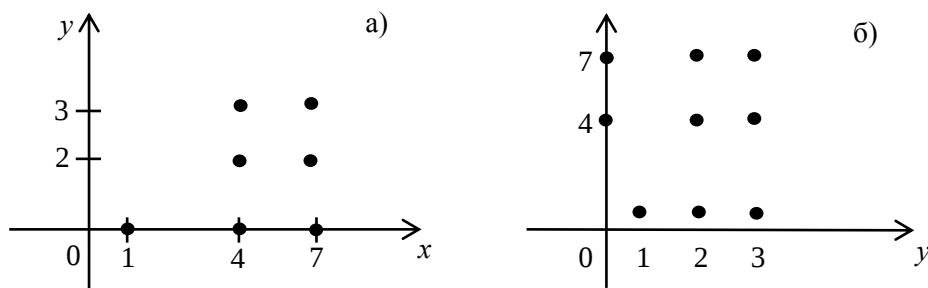


Рис. 34

Пример 2. На пронумерованных стульях разложены куклы: одна, две, ни одной. На рисунке 35 игрушки обозначены буквами А, В, С, D.

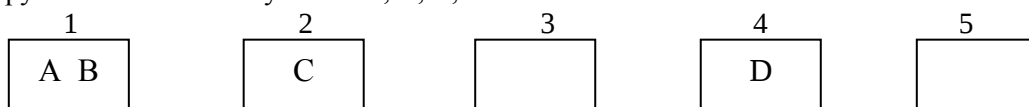


Рис. 35

Задание: «Назови, на котором стуле какие куклы сидят».

Ответы: «На первом стуле сидят А и В», «На втором стуле сидит С», «На третьем стуле никто не сидит», «На четвертом стуле сидит D», «На пятом стуле куклы нет».

Выполняя это задание, ребенок устанавливает соответствие между множествами стульев и кукол. Его можно представить при помощи изображения, называемого *графом* (рис.36).

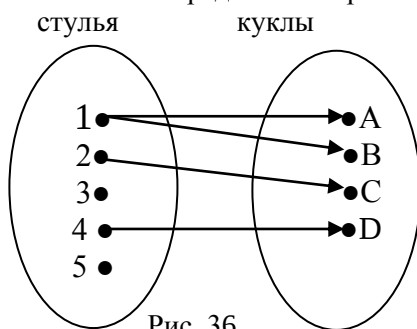


Рис. 36

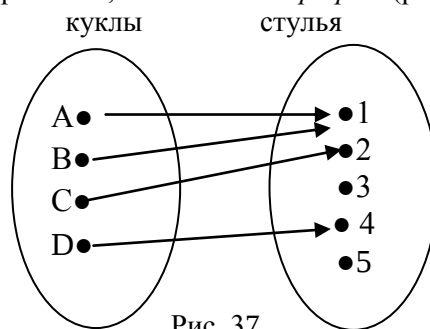


Рис. 37

Для тех же множеств задание может быть другим: «Назови, какая кукла на котором стуле сидит».

Ответы: «А сидит на первом стуле».

«В сидит на первом стуле».

«С сидит на втором стуле».

«D сидит на четвертом стуле».

Выполняя это задание, дети по сути дела рассматривают соответствие, обратное первому (рис.37).

Таким образом, чтобы построить график обратного соответствия, нужно элементы множества U изобразить на оси Ox , а элементы множества V – на оси Oy , тогда у всех точек графика данного соответствия координаты поменяются местами.

Соответствия $R(x;y)$ и $R^{-1}(x;y)$ называют *взаимно обратными*. Взаимно обратные соответствия обладают свойством: графики данного и обратного соответствий симметричны относительно биссектрисы I и III координатных четвертей.

Для каждого соответствия между множествами X и U можно сформулировать, используя отрицание, новое соответствие, которое будет являться *противоположным* данному соответствию. Например, для соответствия «Число x больше числа y » противоположным является соответствие «Число x не больше числа y ».

Пусть задано соответствие xRy между множествами X и U .

Для соответствия xRy , заданного между множествами X и U , отрицание этого соответствия называется *противоположным соответствием*.

Противоположное соответствие обозначается: $x \bar{R} y$ или $\bar{R}(x;y)$.

Выясним взаимосвязь данного и противоположного соответствий по способам их задания.

Пример 3. Соответствие $R(x;y)$ возьмем из примера 1, т.е. $R(x;y): \langle x > y \rangle$, где $x \in X = \{1; 4; 7\}$, $y \in U = \{0; 2; 3\}$. Сформулируем противоположное соответствие $\bar{R}(x;y): \langle x \text{ не больше } y \rangle$.

Запишем график соответствия: $\bar{\Gamma} = \{(1;2); (1;3)\}$. По найденному в примере 1 графику Γ соответствия $R(x;y)$ и графику $\bar{\Gamma}$ не сложно увидеть, что график $\bar{\Gamma}$ противоположного соответствия является дополнением графика Γ данного соответствия до декартова произведения множеств X и U .

Для противоположного соответствия $\bar{R}(x;y)$ построим таблицу 5.

Таблица 5

$X \backslash U$	0	2	3
1		(1;2)	(1;3)
4			
7			

Таким образом, чтобы построить таблицу для противоположного соответствия, нужно записать в нее те пары, которых в таблице данного соответствия нет (см. таблицу 4а).

Построим граф противоположного соответствия $\bar{R}(x;y)$ (рис. 38).

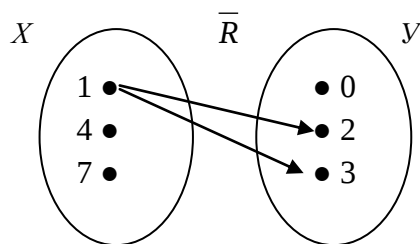


Рис. 38

39). Построим на координатной плоскости график противоположного соответствия $\bar{R}(x;y)$ (рис.

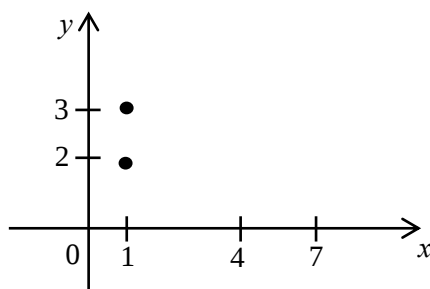


Рис. 39

Итак, чтобы построить график противоположного соответствия, нужно на координатной плоскости отметить те точки, которых на графике данного соответствия не было (см. рис. 34а).

В общем, противоположное соответствие $\bar{R}(x;y)$ является дополнением данного соответствия $R(x;y)$ до декартова произведения множеств X и Y , между которыми заданы эти соответствия.

2.4. Равномощные множества

При обучении к счетной деятельности особую роль играет умение устанавливать взаимно однозначное соответствие между элементами двух множеств.

Например, ученикам предлагаются задания:

1) «Подбери к каждой картинке соответствующую геометрическую фигуру» (рис.40).

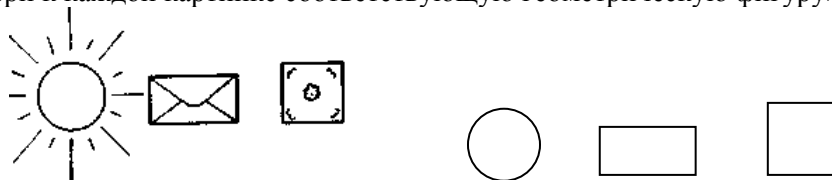


Рис. 40

2) «Дай белочкам по одной шишечке».

Ребенок каждому элементу одного множества ставит в соответствие только один элемент другого множества, охватывая все элементы. Такие соответствия называют взаимно однозначными.

Взаимно однозначные соответствия – соответствия, при которых каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y , и каждый элемент множества Y соответствует только одному элементу из множества X .

Во время счетной деятельности ученики учатся устанавливать взаимно однозначное соответствие между отрезком натурального ряда и множеством предметов, которые считают.

Отсюда вытекает то правило, без которого счет невозможен: «Каждому предмету соотносить только одно число».

Дети, не понимающие этого, совершают ошибки:

- пропускают при счете предметы;
- один и тот же предмет считают дважды;
- пропускают числа;
- одно число повторяют дважды.

Практическая работа по составлению пар предметов из разных множеств (установление взаимно однозначных соответствий) дает впоследствии возможность осознанно выполнять счетную операцию.

С понятием взаимно однозначного соответствия связано понятие равномоощных множеств.

Пусть даны два множества $X = \{a, b, c, d\}$ и $Y = \{k, l, m, n\}$.

Не пересчитывая число их элементов, а лишь установив взаимно однозначное соответствие, можно сказать, что множество Y содержит элементов столько же, сколько и множество X . Говорят, что множества X и Y имеют одинаковую мощность, или они *равномоощны*.

Множества X и Y называются равномоощными (эквивалентными), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Пишут $X \sim Y$.

Например, множество рук и множество ног у человека равномоощны; равномоощными будут множество углов квадрата и множество сторон квадрата.

Нетрудно убедиться в том, что если равномоощные множества конечны, то они содержат поровну элементов.

Бесконечные множества могут быть равномоощны между собой, как, например, множество натуральных чисел и множество четных натуральных чисел, и не равномоощны – как, например, множество натуральных чисел и множество точек прямой.

При сравнении двух групп предметов по количеству приемами наложения или приложения ученики по существу устанавливают взаимно однозначное соответствие между данными множествами (или между одним множеством и подмножеством другого). При этом используются термины: «столько же, сколько» (кубиков столько же, сколько шаров); «меньше» (кубиков меньше, чем шаров); «больше» (кубиков больше, чем шаров). Таким образом, понятие равномоощных множеств является теоретической основой сравнения чисел первого десятка.

2.5. Отношения между элементами одного множества

В математике изучают взаимосвязи между числами («быть больше», «следовать за», «быть меньше на 1»), в геометрии рассматривают отношения равенства, пересечения, параллельности и др., а в процессе обучения младших школьникам часто приходится рассматривать элементы одного множества и устанавливать отношения между ними:

- сравнивать по величине;
- подбирать одинаковые;
- выстраивать сериационный ряд;
- упорядочивать карточки.

Чаще всего мы сталкиваемся с отношениями между двумя объектами, их называют *бинарными*.

Если соответствие $R(x;y)$ рассматривать между такими множествами X и Y , что множества X и Y совпадают, то есть $X=Y$, то это соответствие называют *бинарным отношением на множестве X* .

Например, если X – множество людей, то соответствия $R(x;y)$: «Человек x – друг человека y », $S(x;y)$: «Человек x живет в одном доме с человеком y », $T(x;y)$: «Человек x старше человека y » являются отношениями на множестве людей.

Бинарным отношением между элементами множества X и Y называется всякое подмножество декартова произведения множества X на Y (декартова квадрата X^2).

Иными словами, бинарное отношение – это *пара множеств* $(X; \Gamma)$, где Γ является подмножеством декартова квадрата X^2 , то есть $\Gamma \subset X^2$. Множество X называют *областью задания отношения*, а Γ – *графиком отношения*.

Отношения, как и соответствия, будем обозначать большими буквами латинского алфавита R , S , T и др. и писать xRy или $R(x;y)$ и т.п.

Отношения на множестве задаются теми же способами, что и соответствия между двумя множествами.

Пример. Пусть на множестве $X = \{1; 2; 3; 4\}$ задано отношение $R(x;y)$: « $x > y$ », то есть отношение задано *двухместным предикатом*. Запишем его *график*: $\Gamma = \{(2;1); (3;1); (4;1); (3;2); (4;2); (4;3)\}$. График состоит из всех пар вида $(x;y)$, где $x, y \in X$, для которых $x > y$. Зададим это отношение в *таблице 6* и *графом* (рис.41), а также *графиком* на координатной плоскости (рис.42).

Таблица 6

X	1	2	3	4
1				

2	(2;1)			
3	(3;1)	(3;2)		
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	

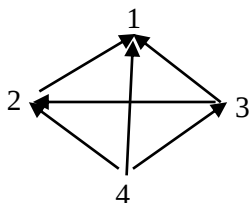


Рис.41

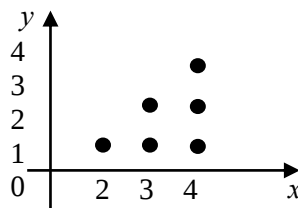


Рис. 42

Как видим, в таблице 5 в первой строке и первом столбце записаны элементы множества X ; на графе (рис.41) изображаем элементы множества X точками и между ними проводим стрелки в том случае, если соответствующие элементы находятся в данном отношении « $x > y$ »; на координатной плоскости и по оси Ox , и по оси Oy изображаем элементы множества X (рис. 42). В этом и заключается отличие способов задания отношений от аналогичных способов задания соответствий между двумя множествами.

Замечание. В графе бинарного отношения точки, изображающие элементы множества X называют *вершинами* графа. На графе могут быть такие стрелки, начало и конец которых находятся в одной вершине, их называют *петлями*.

Построение графов отношений на множестве используется при решении некоторого типа задач и облегчает нахождение ответа на вопрос задачи.

Задача. Из лагеря вышли 5 туристов: Вася, Галя, Толя, Лена, Миша. Толя идет впереди Миши, Лена – впереди Васи, но позади Миши, Галя – впереди Толи. Кто идет первым и кто последним?

Решение: В задаче речь идет об отношении « x идет впереди y » (или: « y идет позади x »). Выберем одно из них за основное, например, « x идет впереди y » и построим его граф, обозначив туристов первыми буквами их имен. По стрелкам, каждая из которых обозначает отношение «идет впереди», определяем порядок следования туристов: Галя, Толя, Миша, Лена, Вася (рис. 43). Таким образом, первой идет Галя, а последним Вася.

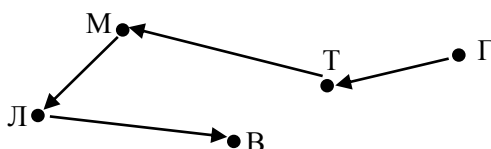


Рис. 43

В математике изучают большое разнообразие отношений. Чтобы облегчить решение этой задачи, отношения классифицируют по свойствам.

2.6. Основные свойства отношений на множестве

Как и любые другие математические понятия, отношения обладают определенными свойствами. Рассмотрим основные свойства бинарных отношений.

Пусть на множестве X задано некоторое отношение $R(x,y)$.

1. **Свойство рефлексивности:** отношение R , заданное на множестве X , называется рефлексивным, если любой элемент x из множества X находится в отношении R с самим собой.

В символах это определение можно записать следующим образом:

$$R \text{ рефлексивно на } X \Leftrightarrow (\forall x \in X)(xRx).$$

Название свойства произошло от латинского слова «reflexivus», что означает «отражение», т.е. повернутый назад.

Например, 1) $R(x,y)$: « $x=y$ », $x,y \in N$. Данное отношение обладает свойством рефлексивности, так как любое натуральное число равно само на себя, что можно проверить, и записав свойство в символах: $(\forall x \in N)(x=x)$ – это истинное высказывание; 2) $S(x,y)$: «Человек x имеет тот же цвет глаз, что и человеку», где $x,y \in X$ – множество людей. Это отношение рефлексивно, так как любой человек имеет одинаковый цвет глаз с самим собой.

2. *Свойство антирефлексивности*: отношение R , заданное на множестве X , называется антирефлексивным, если ни один элемент x из множества X не находится в отношении R с самим собой.

В символах антирефлексивное отношение R запишется так:

R антирефлексивно на $X \Leftrightarrow (\forall x \in X)(x \bar{R} x)$.

Приставка «анти-» (греч. anti-) обозначает противоположность.

Например, 1) $R(x;y): \langle x > y \rangle$, $x, y \in N$. Отношение антирефлексивно, так как $(\forall x \in N)(x > x)$ – есть ложное высказывание; 2) $S(x;y): \langle x \perp y \rangle$, $x, y \in X$ – множество прямых плоскостей. Это отношение обладает свойством антирефлексивности, потому что никакая прямая не может быть перпендикулярна самой себе, то есть $(\forall x \in X)(x \perp x)$ – ложно; 3) $T(x;y): \langle \text{Человек } x \text{ старше человека } y \rangle$, $x, y \in X$ – множество людей. Это также пример антирефлексивного отношения, так как никакой человек не может быть старше самого себя.

3. *Свойство симметричности*: отношение R , заданное на множестве X , называется симметричным, если для любых элементов x, y из множества X из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y , следует, что элемент y находится в отношении R с элементом x .

В символах это определение запишется:

R симметрично на $X \Leftrightarrow (\forall x, y \in X)(x R y \Rightarrow y R x)$.

Название свойства происходит от греческого слова «symmetria», что означает «одинаковое расположение чего-либо относительно центра, оси». В записи $(x R y \Rightarrow y R x)$ имеется симметрия относительно знака « $\Rightarrow$ ».

Например, 1) $R(x;y): \langle x \perp y \rangle$, $x, y \in X$ – множество прямых плоскостей. Проверим свойство симметричности по символической записи: $(\forall x, y \in X)(x \perp y \Rightarrow y \perp x)$ – истинное высказывание, значит отношение перпендикулярности прямых симметрично; 2) $S(x;y): \langle x = y \rangle$, $x, y \in N$. Это отношение обладает свойством симметричности, так как $(\forall x, y \in N)(x = y \Rightarrow y = x)$ – есть истинное высказывание; 3) $T(x;y): \langle \text{Человек } x \text{ имеет тот же возраст, что и человеку } y \rangle$, где $x, y \in X$ – множество людей. Данное отношение симметрично, потому что если любой человек x имеет тот же возраст, что и человек y , то человеку имеет тот же возраст, что и человек x .

4. *Свойство асимметричности*: отношение R , заданное на множестве X , называется асимметричным, если для любых элементов x, y из множества X из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y следует, что элемент y не находится в отношении R с элементом x .

Символическое определение запишется так:

R асимметрично на $X \Leftrightarrow (\forall x, y \in X)(x R y \Rightarrow \bar{y} R x)$.

Приставка «а...» в переводе с греческого означает «отсутствие свойства или признака», то есть в данном случае речь идет об отсутствии свойства симметричности.

Например, 1) $R(x;y): \langle x < y \rangle$, $x, y \in N$. Так как $(\forall x, y \in N)(x < y \Rightarrow y < x)$ – истинное высказывание, то данное отношение «меньше» обладает свойством асимметричности; 2) $S(x;y): \langle \text{Человек } x \text{ – начальник } y \rangle$, где $x, y \in X$ – множество людей. Это отношение асимметрично, потому что если человек x является начальником человеку y , то человек y не может быть начальником человеку x .

5. *Свойство антисимметричности*: отношение R , заданное на множестве X , называется антисимметричным, если для любых элементов x, y из множества X , элемент x находится в отношении R к элементу y и элемент y находится в отношении R к элементу x тогда и только тогда, когда $x = y$.

В символах определение запишется следующим образом:

R антисимметрично на $X \Leftrightarrow (\forall x, y \in X)(x R y \text{ и } y R x \Leftrightarrow x = y)$

Например, 1) $R(x;y): \langle x \dot{=} y \rangle$, $x, y \in N$. Наличие свойства антисимметричности проверим по символической записи: $(\forall x, y \in N)(x \dot{=} y \text{ и } y \dot{=} x \Leftrightarrow x = y)$ – истинное высказывание, значит отношение делимости на множестве натуральных чисел обладает этим свойством; 2) $S(x;y): \langle x \leq y \rangle$, $x, y \in N$. В символах антисимметричность данного отношения запишется: $(\forall x, y \in N)(x \leq y \text{ и } y \leq x \Leftrightarrow x = y)$ – это истинное высказывание, поэтому отношение «не больше» обладает свойством антисимметричности.

6. *Свойство транзитивности*: отношение R , заданное на множестве X , называется транзитивным, если для любых элементов x, y, z из множества X из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y и элементу находится в отношении R с элементом z , следует, что элемент x находится в отношении R с элементом z .

Запишем это определение в символах:

R транзитивно на $X \Leftrightarrow (\forall x, y, z \in X)(x R y \text{ и } y R z \Rightarrow x R z)$.

Название свойства произошло от латинского слова «transitus», что означает «переход». По определению свойства транзитивности видно, что осуществляется переход от элемента к элементу z через элементу y .

Например, 1) $R(x;y): \langle x < y \rangle, x, y \in N$. Отношение «меньше» транзитивно, так как $(\forall x, y, z \in N)(x < y \text{ и } y < z \Rightarrow x < z)$ – есть истинное высказывание; 2) $S(x;y): \langle \text{Отрезок } x \text{ длиннее отрезка } y \rangle$, где $x, y \in X$ – множество отрезков. Это отношение также обладает свойством транзитивности, потому что если отрезок x длиннее отрезка y и отрезок y длиннее отрезка z , то отрезок x длиннее отрезка z .

Замечание. Все рассмотренные свойства бинарных отношений наглядно иллюстрируются при их изображении графами.

1. Если отношение на множестве X рефлексивно, то граф этого отношения в каждой вершине имеет петлю; если же отношение антирефлексивно, то ни в одной вершине графа петель нет.

2. Если отношение на множестве X симметрично, то граф этого отношения вместе с каждой стрелкой, идущей от элемента x к элементу y , должен содержать и стрелку обратного направления; если же отношение асимметрично, то стрелок обратного направления на графе не должно быть.

3. Если отношение на множестве X транзитивно, то граф отношения вместе со стрелками, идущими от x к y и от y к z , должен содержать и стрелку, идущую от x к z (стрелки образуют треугольник).

Одно и то же отношение может обладать несколькими свойствами. Так отношение «равно» – рефлексивно, симметрично, транзитивно; отношение «больше» – антисимметрично и транзитивно.

2.7. Отношение эквивалентности

Пусть на множестве X задано отношение R .

Если отношение R , заданное на множестве X , обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, то оно называется *отношением эквивалентности*.

Пример 1. Дано отношение $R(x;y): \langle \text{Число } x \text{ при делении на } 3 \text{ имеет тот же остаток, что и число } y \rangle$, где $x, y \in X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Это отношение рефлексивно (любое число x при делении на 3 имеет один и тот же остаток с самим собой), симметрично (если число x при делении на 3 имеет тот же остаток, что и число y , то число y при делении на 3 имеет тот же остаток, что и число x), транзитивно (если x при делении на 3 имеет тот же остаток, что и число y и число y при делении на 3 имеет тот же остаток, что и число z , то число x при делении на 3 имеет тот же остаток, что и число z). Таким образом, данное отношение R является отношением эквивалентности. Построим его граф (рис. 44).

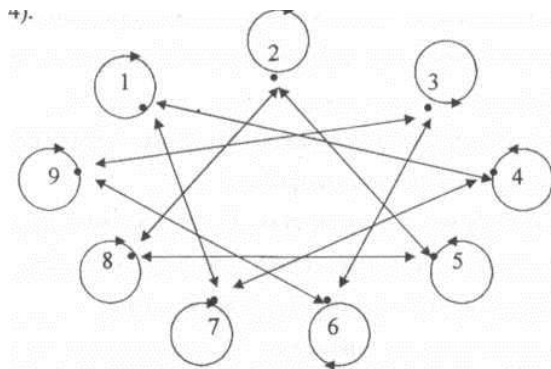


Рис. 44

По графу наглядно видно наличие перечисленных свойств данного отношения R , причем не сложно заметить, что множество X разбивается на 3 попарно непересекающиеся подмножества (класса), а именно: $X_1 = \{1; 4; 7\}$, $X_2 = \{2; 5; 8\}$ и $X_3 = \{3; 6; 9\}$. Действительно, все условия разбиения множества на классы здесь выполняются: каждое подмножество не пусто; никакие два подмножества попарно не пересекаются; объединение подмножеств X_1, X_2, X_3 равно данному множеству X . Это не случайно, так как имеет место следующее утверждение.

Для того чтобы отношение R позволяло разбить множество X на классы необходимо и достаточно, чтобы R было отношением эквивалентности.

Пример 2. Рассмотрим на множестве учащихся отношение $S(x;y): \langle x \text{ живет в том же доме, что и } y \rangle$. Это отношение симметрично, если учащийся x живет в том же доме, что и учащийся y , то y живет в том же доме, что и x . Оно транзитивно: если учащийся x живет в том же доме, что и учащийся y , и учащийся y живет в том же доме, что и учащийся z , то учащийся x живет в том же доме, что и учащийся z . Отношение S рефлексивно: о каждом учащемся класса можно сказать, что он живет в одном доме с самим собой.

Следовательно, отношение «жить в одном и том же доме» является отношением эквивалентности на множестве учащихся класса. Оно определяет разбиение этого множества на попарно-непересекающиеся подмножества, каждое из которых состоит из учащихся класса, живущих в одном доме.

Таким образом, если на множестве X задано отношение эквивалентности, то оно определяет разбиение этого множества на попарно-непересекающиеся подмножества (классы). И наоборот, любое разбиение множества X на попарно-непересекающиеся подмножества (классы) определяет на этом множестве отношение эквивалентности.

В начальном курсе математики также встречаются отношения эквивалентности. Например, отношение «Выражения x и y имеют одинаковые числовые значения» на множестве числовых выражений. Изучая геометрический материал, младшие школьники сталкиваются с такими отношениями эквивалентности, как отношение равенства фигур, отношение равновеликости фигур.

2.8. Отношения порядка

Важным видом отношений являются *отношения порядка*. Различают отношения *строгого порядка* и отношения *нестрогого порядка*.

Пусть на множестве X задано отношение R .

Отношение R , заданное на множестве X , называется *отношением строгого порядка*, если оно обладает свойствами антирефлексивности, асимметричности и транзитивности.

Пример 1. Дано отношение $R(x,y)$: « $x < y$ », где $x, y \in X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Данное отношение обладает свойствами антирефлексивности (любое число x из множества X не может быть меньше самого себя), асимметричности (если $x < y$, то y не может быть меньше x), транзитивности (если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$). Таким образом, отношение « $x < y$ » является отношением строгого порядка.

Выясним особенности графа отношения строгого порядка на рассмотренном примере, для чего построим граф отношения « $x < y$ », заданного на множестве X (рис.45).

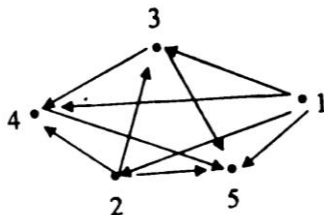


Рис. 45

Мы видим, что граф данного отношения не имеет петель (свойство антирефлексивности) и любую пару вершин соединяет стрелка одного направления (свойство асимметричности); на графе есть стрелки, образующие треугольники (свойство транзитивности), то есть все свойства отношения строгого порядка наглядно иллюстрируются.

Построенный граф позволяет расположить элементы множества X в таком порядке: число 1 (оно меньше всех остальных), затем число 2 и т.д. Получим множество $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, про которое говорят, что оно *упорядочено* отношением « $x < y$ ».

Примерами отношений строгого порядка так же являются отношения «короче» и «длиннее» на множестве отрезков, отношения «выше» и «ниже» на множестве людей и др.

Наряду с отношениями « $x < y$ » (« $x > y$ ») в математике рассматривают отношения « $x \leq y$ » (« $x \geq y$ »), представляющие собой объединение отношений « $x < y$ » и « $x = y$ » (« $x > y$ » и « $x = y$ »). Отношения « $x \leq y$ » и « $x \geq y$ » являются примерами отношений нестрогого порядка.

Пусть на множестве X задано отношение R .

Отношение R , заданное на множестве X , называется *отношением нестрогого порядка*, если оно обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности.

Пример 2. Дано отношение $S(x,y)$: « $x \leq y$ », где $x, y \in X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Данное отношение S обладает свойствами рефлексивности (любое число $x \leq x$), антисимметричности ($x \leq y$ и $y \leq x \Leftrightarrow x = y$) и транзитивности (если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$), то есть является отношением нестрогого порядка. Построим его граф (рис. 46).

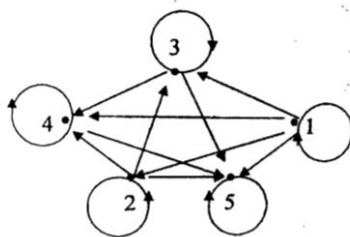


Рис. 46

Сравнивая этот граф с графом отношения « $x < y$ » (рис.45), видим, что граф отношения « $x \leq y$ » в каждой вершине имеет петли (свойство рефлексивности). С помощью отношения « $x \leq y$ » множество X можно также упорядочить и получить множество $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Множество X , на котором задано отношение порядка (строгого или нестрогого), называется *упорядоченным*.

Часто также говорят, что в этом случае *множество X упорядочено отношением R* .

К типу отношений нестрогого порядка относятся, например, такие отношения: «не выше», «не ниже» на множестве людей, сравниваемых по росту; «быть делителем», «быть кратным» на множестве натуральных чисел и др.

При выполнении заданий: «Разложи полоски по ширине от самой узкой до самой широкой», «Разложи числовые карточки по порядку», дети упорядочивают элементы множеств полосок и числовых карточек при помощи отношений порядка: «быть шире», «следовать».

Отношения эквивалентности и порядка играют большую роль в формировании у младших школьников правильных представлений о классификации и упорядочивании множеств.

Замечание. Не следует считать, что все отношения делятся на отношения эквивалентности и порядка. Существует большое число отношений, не являющихся ни отношениями эквивалентности, ни отношениями порядка.

Задания для самоконтроля

Изучив тему «Соответствия и отношения», студент должен *уметь*:

- устанавливать способ задания конкретного соответствия, переходить от одного способа задания к другому;
- формулировать обратное и противоположное соответствия для данного;
- распознавать взаимно-однозначные соответствия между множествами;
- устанавливать способ задания конкретного бинарного отношения, переходить от одного способа задания к другому;
- определять свойства изученных отношений при различных способах их задания;
- определять вид отношений в зависимости от присущих ему свойств;
- приводить примеры бинарных соответствий и отношений из начального курса математики;
- применять определения свойств бинарных отношений к анализу заданий, содержащихся в учебниках математики для начальных классов.

Проверить сформированность названных умений можно, выполнив *следующие задания*.

1. Дано соответствие $R(x; y)$: « $x > y$ », где $x \in X = \{2; 4; 6\}$, $y \in V = \{3; 5; 7\}$. Задайте его всеми остальными способами (запишите график, таблицу, постройте граф и график). Постройте графы обратного и противоположного соответствий.

2. Даны два множества $A = \{-1; -2; -3; 1; 2; 3; 0\}$ и N – множество натуральных чисел. Поставим в соответствие каждому числу $a \in A$ его квадрат. Запишите график Γ данного соответствия и постройте его граф. Каковы область отправления и область прибытия соответствия? Найдите множество определения и множество значений соответствия.

3. Между множествами $X = \{1; 2; 3\}$ и $V = \{-1; -2; -3\}$ заданы следующие соответствия: а) $R(x; y)$: « $x = -y$ »; б) $S(x; y)$: « $x = y + 3$ », где $x \in X$, $y \in V$.

Для каждого соответствия укажите область определения, множество значений, постройте граф и график. Сформулируйте S^{-1} и $\bar{S}$, задайте их всеми способами.

4. Между множеством X углов треугольника ABC и множеством V сторон треугольника ABC задано соответствие $S(x; y)$: «Угол x лежит против стороны y », где $x \in X$, $y \in V$. Задайте соответствия S^{-1} и $\bar{S}$ при помощи: а) предиката; б) графа.

5. У Гали шарф, шапочка и перчатки голубого цвета, а пальто и юбка – коричневого. Постройте граф отношения, «иметь цвет» между элементами множества названных вещей Гали и множества $\{\text{голубой, красный, коричневый, белый}\}$.

6. Девушки, живущие в одной комнате общежитий, составили график дежурства на неделю (таблица 7). В какие дни дежурит Петрова? Кто дежурит в четверг?

а) Выясните, отношение между какими множествами установлено при помощи данной таблицы.

б) Задайте это отношение при помощи предложения с двумя переменными.

Таблица 7

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Корнеева							
Богданова							
Петрова							
Зайцева							

7. Отношение между элементами множества $X = \{x | x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 4\}$ и множества $Y = \{y | y \in \mathbb{Z}, 0 \leq y \leq 5\}$ задано при помощи таблицы 8:

x	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4
y	0	5	0	3	0	3	0	5	0	5

а) Укажите область определения и область значений данного отношения.

б) Постройте граф и график отношения.

8. Даны множества $X = \{\text{«мама»}, \text{«папа»}, \text{«рама»}, \text{«яма»}\}$ и $Y = \{a; m; p; r; y\}$. Составьте декартово произведение $X \times Y$ этих множеств. Отметьте в нем пары, связанные соответствием xRy : «слово x содержит букву y ». Задайте соответствие графом. Найдите образ слова «папа». Найдите полный прообраз буквы «м». Есть ли во множестве Y буква, прообраз которой равен множеству X ? Есть ли буква с пустым прообразом?

9. Из декартова произведения множеств задания 5 выпишите пары, связанные с соответствием xTy : «Слово x не содержит букву y ». Постройте для этого соответствия граф. Назовите вид соответствия xTy по отношению к xRy : «слово x содержит букву y ». Найдите прообраз буквы «м». Какая буква имеет пустой прообраз для соответствия T ? Найдите образ слова «рама».

10. График соответствия $R(x; y)$ состоит из пар: $(2; 1)$, $(0; 0)$, $(4; 2)$, $(-2; 1)$, $(-4; -2)$. Найдите область определения и множество значений соответствия R . Каким предикатом задается это соответствие?

11. Для следующих соответствий сформулируйте обратные и противоположные соответствия:

- точка x лежит на прямой y ;
- число a является корнем уравнения b ;
- прямая x пересекает окружность y ;
- прямая x пересекает прямую y ;
- человек x выше человека y ;
- город x находится в стране y ;
- длина отрезка x равна числу y ;
- река x впадает в море y .

12. Элементы множества $X = \{1; 3; 4; 6\}$ и $Y = \{0; 1\}$ находятся в соответствии R , заданном графиком $\Gamma = \{(1; 1); (3; 0); (3; 1); (4; 0); (4; 1); (6; 1)\}$. Задайте соответствия R^{-1} и $\bar{R}$ записью графиков, графами и графиками на координатной плоскости.

13. Приведите примеры множеств, равномощных: а) множеству пальцев на руке; б) множеству углов треугольника; в) множеству углов квадрата; г) множеству букв в слове «эллипс»; д) множеству концов отрезка.

14. Приведите примеры отношений, которые рассматриваются в школьном курсе математики между:

- множеством геометрических фигур и множеством действительных чисел;
- множеством уравнений и множеством действительных чисел;
- множеством окружностей и множеством прямых.

15. На множестве $M = \{3; 6; 9; 12\}$ задано отношение $R(x; y)$: «Число x делится на y », где $x, y \in M$. Запишите график отношения. Задайте отношение таблицей. Постройте граф и график отношения $R(x; y)$.

16. Постройте граф и график отношения $R(x; y)$: « $x = y - 4$ », где $x, y \in X = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Постройте график этого отношения для случая, если $x, y \in X = \mathbb{Z}$.

17. На множестве $X = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ задано отношение $S(x; y)$: « $x > y$ на 2». Задайте это

отношение всеми способами. Определите свойства отношения S .

18. Дано множество $X = \{4; 2; 6; 3; 5; -3; -8; -6; 0\}$. Укажите подмножества декартова квадрата $X \times X$, соответствующие следующим отношениям: $R(x; y)$: « $x < y$ »; $T(x; y)$: « $x \dot{>} y$ »; $S(x; y)$: « $x = -y$ »; $Q(x; y)$: « $x = 2y$ »; $N(x; y)$: « $x = y - 2$ ». Определите свойства каждого отношения.

19. На множестве X людей даны отношения: а) $R(x; y)$: «Человек x похож на человека y »; б) $S(x; y)$: « x и y живут в одном городе»; в) $T(x; y)$: « x – отец y ». Определите свойства отношений.

20. Решите следующие задачи из учебников по математике для начальных классов и установите, с рассмотрением каких отношений связано решение этих задач, на каком множестве заданы отношения:

- а) Назовите числа, произведение которых равно 36.
- б) Запишите несколько примеров на деление с результатом 8.
- в) Составьте все возможные примеры на деление (без остатка) с числами 12, 26, 4, 96, 13, 78, 3.
- г) Составьте все возможные примеры на деление (без остатка) так, чтобы делимым было число 84; 56.

21. P – отношение «больше». Выясните, какие из следующих высказываний истинны:

- а) Отношение «меньше» противоположно отношению P .
- б) Отношение «меньше» обратно отношению P .
- в) Отношение «не больше» противоположно отношению P .
- г) Отношение «не больше» обратно отношению P .

22. В каждом из следующих случаев задайте отношения, противоположное и обратное данному (отношения даны на множестве натуральных чисел):

- а) «число x меньше числа y »;
- б) «число x не меньше числа y »;
- в) «число x — делитель числа y »;
- г) «число x больше числа y на 2»;
- д) «число x меньше числа y в 3 раза».

23. Решите следующие задачи, построив граф отношения, данного в условии задачи:

- а) Бобик лает чаще, чем Жучка, но реже Барбоса. Кто лает чаще всех?
- б) Мы наблюдаем за вертолетом, орлом, дирижаблем и самолетом. Орел находится выше вертолета, вертолет – ниже самолета, но выше дирижабля, а орел – ниже самолета. В каком порядке по высоте находятся вертолет, орел, дирижабль и самолет?

в) Ребята Саша, Женя, Коля и Миша отправились в поход. У каждого из них был рюкзак. У Саши рюкзак легче, чем у Коли, но тяжелее, чем у Жени. У Миши рюкзак легче, чем у Коли, но тяжелее, чем у Саши. Ребята идут друг за другом. Каждый впереди идущий имеет более легкий рюкзак. В каком порядке идут ребята?

г) Даны пять чисел. Известно, что первое больше пятого, второе меньше третьего, пятое больше третьего, четвертое меньше пятого. Какое из чисел больше: первое или четвертое? пятое или второе? Можно ли утверждать, что второе число меньше четвертого?

д) Класс выставил на соревнования по плаванию команду мальчиков. В нее входили Витя, Коля, Андрей и Саша. Коля проплыл дистанцию быстрее Андрея, но медленнее Саши. Андрей затратил на ту же дистанцию времени больше, чем Витя, который плавал медленнее Коли. Как распределились между мальчиками места на соревнованиях?

24. На множестве $X = \{3; 4; 5; 8\}$ задано отношение R , график которого имеет вид: $\Gamma = \{(3; 3); (3; 4); (4; 3); (4; 4); (5; 5); (5; 8); (8; 5); (8; 8)\}$. Докажите, что R отношение эквивалентности. Постройте график отношения R на координатной плоскости и укажите его особенности.

25. Множество $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ разбили на классы эквивалентности следующим образом: $X_1 = \{1; 3; 4\}$, $X_2 = \{2; 7\}$, $X_3 = \{5; 6\}$. Запишите график соответствующего этому разбиению отношения эквивалентности и построьте его на координатной плоскости.

26. Отношения P : « $x > y$ » и Q : « $x = y$ » заданы на множестве $X = \{3, 4, 5, 6\}$.

- а) Постройте графы этих отношений.
- б) Сформулируйте отношение, являющееся объединением отношений P и Q ; определите свойства этого отношения. Каким будет его граф?

в) Постройте граф и график отношения, противоположного отношению Q .

г) Сформулируйте отношение, обратное отношению P . Какими свойствами оно обладает?

27. В начальном курсе математики на множестве натуральных чисел рассматривают следующие отношения: а) «больше»; б) «больше на»; в) «больше в»; г) «равно»; д) «непосредственно

следует за»; е) «следует за»; ж) «число x делится на число y без остатка». Укажите среди них отношения эквивалентности и порядка.

Проектная задача 1. «Соответствия между множествами в начальном курсе математики».

1. Покажите, что при выполнении заданий: «Найдите значение выражений», «Измерьте длину отрезков», «Решите уравнения», «Найдите площади прямоугольников» учащиеся устанавливают соответствия между двумя множествами.

2. Приведите примеры заданий, при выполнении которых учащиеся устанавливают взаимно-однозначные соответствия.

3. Приведите примеры текстовых задач, которые решают младшие школьники и в которых рассматриваются величины, находящиеся в прямой (или обратной) пропорциональной зависимости. Решения задач обоснуйте.

Проектная задача 2. «Бинарные отношения на множестве в начальном курсе математики».

1. Какие бинарные отношения и на каких множествах изучаются в начальном курсе математики? Какие способы задания отношений при этом используются?

2. В математике принято при введении новых объектов устанавливать условия их равенства (т.е. эквивалентности) и отношение порядка. Так ли происходит в начальном обучении математике?

3. В каких учебниках математики для начальных классов свойства бинарных отношений изучаются в явном виде и с какой целью?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахматова Г.М. Математика : в 2 кн. Кн. 1 : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / Г.М. Ахматова, М.А. Ахатов. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 256 с.
2. Васильева Т.А. Математика. Общие понятия: учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по специальности 031200 «Педагогика и методика начального образования» / Т.А. Васильева. – Кызыл: Издательство ТывГУ, 2005. – 115 с.
3. Васильева Т.А. Множества и операции над ними: учебно-методическое пособие для студентов факультета начального обучения / Т.А. Васильева. – Кызыл: Тывинский государственный университет, 2002. – 68 с.
4. Виленкин Н.Я. Математика: учеб. пособие для студентов пед. институтов / Н.Я.Виленкин, А.М.Пышкало. – М.: Просвещение, 1977. – 352 с.
5. Виленкин Н.Я. Задачник-практикум по математике. – М.: Просвещение, 1977. – 189 с.
6. Гладких О.Б. Основные понятия теории графов: учебное пособие / О.Б. Гладких, О.Н. Белых ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина». – Елец : Елецкий государственный университет им И.А. Бунина, 2011. – 177 с. – Библиогр. в кн. ; То же [Электронный ресурс]. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=272065>
7. Лаврова Н.Н. Задачник-практикум по математике: учеб. пособие для студентов-заочников I-III курсов фак. педагогики и методики нач. обучения пед. ин-тов / Н.Н. Лаврова, Л.П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1985. – 183 с.
8. Математика. Сборник задач: учеб. пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / Л.П. Стойлова, Е.А. Конобеева, Т.А. Конобеева, И.В. Шадрина. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 240 с.
9. Методика обучения математике. Формирование приемов математического мышления: учеб. пособие для вузов / под ред. Н.Ф. Талызиной. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 193 с.
10. Сборник задач по математике: пособие для педучилищ / А.М. Пышкало, Л.П. Стойлова, Н.Н. Лаврова, Н.П. Ирошников. – М.: Просвещение, 1979. – 208 с.
11. Стойлова Л.П. Математика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / Л.П. Стойлова. – 3-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 464 с. – (Сер. бакалавриат).
12. Стойлова Л.П. Основы начального курса математики: Учебное пособие для учащихся пед. училищ / Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988. – 320 с.
13. Теоретические основы формирования математических представлений у детей дошкольного возраста: учебно-методическое пособие для студентов направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиль «Дошкольное образование» / сост. Ч.М. Ондар. – Кызыл: Изд-во ТувГУ, 2016. – 72 с.
14. Тонких А.П. Математика: Учебное пособие для студ. подготовки учителей нач. классов. – М.: Книжный дом «Университет», 2002.
15. Царева С.Е. Методика преподавания математики в начальной школе: учебник для студ. учреждений высш. образования / С.Е. Царева. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 496 с.
16. Шадрина И.В. Теория и методика математического развития: учебник и практикум для СПО / И.В. Шадрина. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 279 с.

Учебное издание

ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

*Учебно-методическое пособие
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
Педагогическое образование профиля «Начальное образование»*

Составитель
Ондар Чечена Момужаевна

Редактор *А.Р. Норбу*
Дизайн обложки *К.К. Сарыглар*

Сдано в набор: 26.10.2018. Подписано в печать: 22.11.2018
Формат бумаги 60×84 ¹/₈. Бумага офсетная
Физ. печ. л. 5,1. Усл. печ. л. 4,9. Заказ № 1454. Тираж 50 экз.

667000, г. Кызыл, Ленина, 36
Тувинский государственный университет
Издательство ТувГУ