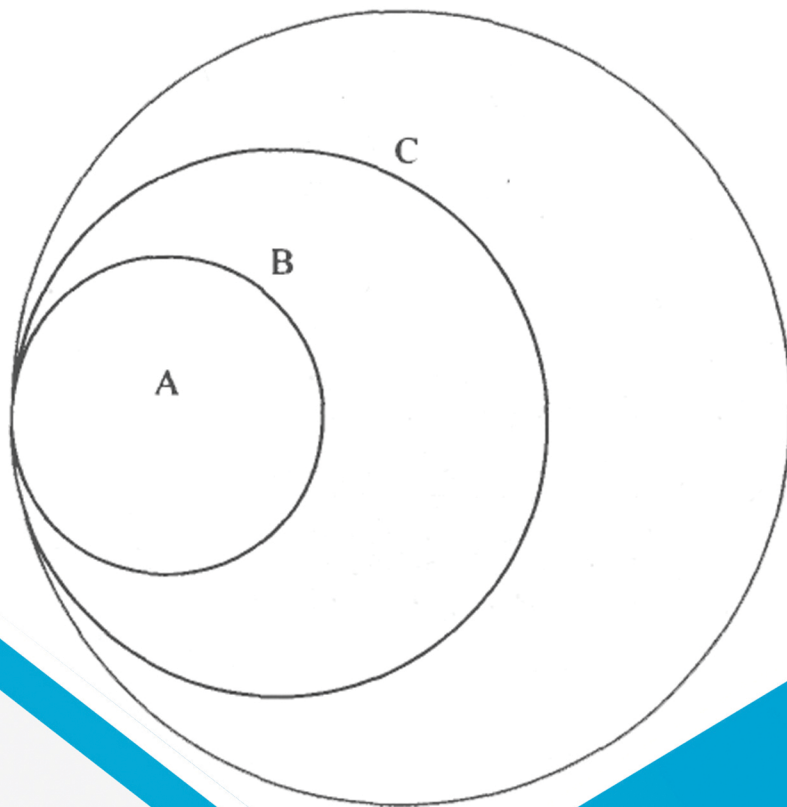




ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Кызыл
2018

ФГБОУ ВО «ТУВИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
КЫЗЫЛСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Основы начального курса математики. Элементы математической логики

*Учебно-методическое пособие
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
Педагогическое образование профиля «Начальное образование»*

**Кызыл
2018**

УДК 51 : 510.6 (075.8)
ББК 22.10 я73
О-75

Печатается по решению учебно-методического совета
Тувинского государственного университета

Основы начального курса математики. Элементы математической логики: учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки Педагогическое образование профиля «Начальное образование» / сост. Ч.М. Ондар, Н.М. Кара-Сал. – Кызыл: Изд-во ТувГУ, 2018. – 59 с.

Учебно-методическое пособие содержит материал, соответствующий разделу «Математические утверждения и структуры» рабочей программы по основам начального курса математики. В нем рассмотрены: математические понятия, их характеристики и способы определения; высказывания и высказывательные формы (предикаты), операции над ними; строение теорем и их виды; умозаключения и способы математического доказательства. Иллюстрировано примерами решения задач с подробными объяснениями.

В конце каждой главы приводятся задания для практических занятий и самостоятельной работы. Они помогут закрепить прочитанный материал, применить теоретические результаты на практике.

Рекомендуется студентам Кызылского педагогического института, обучающимся по направлению подготовки Педагогическое образование профиля «Начальное образование» (квалификация «бакалавр»). Может быть использовано педагогами, повышающими свою квалификацию, а также студентами педагогического колледжа, получающими среднее профессиональное образование по специальности «Преподавание в начальных классах».

Рецензенты:

А.С. Монгуш, к.п.н., доцент кафедры алгебры и геометрии физико-математического факультета ТувГУ;
С.К. Сат, к.п.н., зав. кафедрой физико-математического и дистанционного образования Тувинского института развития образования и повышения квалификации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
ВВЕДЕНИЕ.....	5
Глава I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ.....	7
1.1. Понятия. Объем и содержание понятий.....	7
1.2. Виды понятий.....	8
1.3. Отношения между понятиями.....	9
1.5. Правила явного определения понятий.....	15
1.6. Классификация понятий.....	15
Задания для самоконтроля.....	17
Глава 2. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ.....	22
2.1. Понятие высказывания.....	22
2.2. Отрицание высказывания.....	23
2.3. Конъюнкция и дизъюнкция высказываний, законы этих операций.....	24
2.4. Импликация высказываний.....	27
2.5. Эквиваленция высказываний.....	29
Задания для самоконтроля.....	29
Глава 3. ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ (ПРЕДИКАТЫ) И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ.....	32
3.1. Понятие высказывательной формы (предиката). Структура высказываний с кванторами.....	32
3.2. Отрицание высказывательной формы (предиката). Множество истинности отрицания.....	35
3.3. Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм, их множества истинности.....	36
3.4. Отношения логического следования и равносильности между высказывательными формами. Необходимые и достаточные условия.....	38
Задания для самоконтроля.....	40
Глава 4. ТЕОРЕМЫ. УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ (РАССУЖДЕНИЯ).....	46
4.1. Структура теоремы.....	46
4.2. Виды теорем.....	47
4.3. Дедуктивные и недедуктивные умозаключения (рассуждения).....	48
4.4. Математическое доказательство.....	53
Задания для самоконтроля.....	54
ЛИТЕРАТУРА.....	58

ПРЕДИСЛОВИЕ

Переход начальной школы на новый Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования, возможность выбора и конструирования собственной методики обучения, задачи всестороннего развития младших школьников средствами предмета требуют от педагога хорошей математической подготовки и прежде всего знания научных основ начального курса математики¹. Роль математики в этом профессиональном становлении переоценить трудно. Прежде всего, это связано следующими аспектами:

- *логический* – изучение математики является источником и средством интеллектуального развития человека, его умственных способностей;
- *познавательный* – с помощью математики познается окружающий мир, его пространственные формы и количественные отношения, формируются научные представления о реальном физическом пространстве;
- *прикладной* – математика является базой, обеспечивающей готовность человека к овладению смежными дисциплинами, делает более доступным для него непрерывное образование и самообразование;
- *исторический* – на примерах из истории математики прослеживается развитие не только ее самой, но и человеческой культуры в целом;
- *философско-мировоззренческий* – математика помогает осмыслить мир, в котором живет человек, его место и роль в этом мире.

В данном учебно-методическом пособии представлен материал по разделу «Элементы математической логики» основ начального курса математики, изучаемого в условиях бакалавриата. Основная его цель дать математическое описание и уточнить смысл тех представлений, которые формируются на уроках математики с младшими школьниками. Прежде всего, это раскрытие особенностей математических понятий, предложений и доказательств, знание которых поможет в усвоении данного курса и позволит педагогу видеть и реализовать на практике единство подходов к методике изучения разных по содержанию, но и имеющих одинаковую логическую структуру понятий и предложений используемых в учебниках математики начальной школы.

Еще одна задача данного раздела – показать студентам важность понимания сути математических понятий и фактов для целенаправленной работы по развитию логического мышления детей младшего школьного возраста, понимания прикладного значения математики.

Материал раздела разбит на 4 главы:

1. Математические понятия.
2. Высказывания и операции над ними.
3. Высказывательные формы (предикаты).
4. Теоремы. Умозаключения (рассуждения).

Каждая глава завершается заданиями для самоконтроля, что позволяет систематизировать знания по теме и усвоить их. В процессе решения заданий студенты должны овладеть компетенциями, необходимыми им для грамотного обучения математике младших школьников и их развития средствами математики.

Учебно-методическое пособие может быть использовано как для работы студентов под руководством преподавателя, так и для их самостоятельного изучения основ начального курса математики.

При написании пособия были использованы материалы различных учебников по математике для начальных классов, учебника по логике А.Д. Гетмановой, учебников и учебных пособий по математике для студентов педагогических вузов и колледжей Л.П. Стойловой, Н.Я. Виленкина, А.М. Пышкало, Н.Н. Лавровой, Г.М. Аматовой, М.А. Амадова, учебника по методике преподавания математики в начальной школе С.Е. Царевой, И.В. Шадриной, Н.Ф. Талызиной, а также учебного пособия по элементам математической логики Т.А. Васильевой.

¹ Стойлова Л.П. Математика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – С. 3.

ВВЕДЕНИЕ

Термин «логика» происходит от греческого слова *logos*, что значит «мысль», «слово», «разум», «закономерность», и используется в четырех смыслах: 1) специфические закономерности правильного мышления; 2) наука, изучающая закономерности структуры и развития правильного мышления; 3) закономерности развития объективно существующих вещей и явлений – «логика вещей»; 4) определенная последовательность действий человека¹. «Логика занимается не только связями высказываний в правильных выводах, но и многими иными проблемами: *смыслом и значением выражений языка*, различными отношениями между терминами (понятиями), операциями определения и логического деления понятий, вероятностными и статистическими рассуждениями, парадоксами и логическими ошибками и т.д.»².

Логика – одна из самых древних наук. Первое дошедшее до нас большое сочинение, посвященное специально логике («Аналитики» Аристотеля, 384-322 гг. до н.э.), принадлежит позднегреческой эпохе. «Существуют разные логики: *формальная и неформальная, вероятностная, диалектическая, классическая и неклассическая, комбинаторная логика, логика научного познания, логика времени, или временная логика, логика оценок и т.п.*»³.

Математическая логика выделилась в самостоятельную дисциплину в конце XIX – начале XX вв. из *формальной логики – науки, изучающей законы и операции правильного мышления*, созданной древнегреческим философом Аристотелем. Большой вклад в построение языка математической логики внесли ирландский ученый Джордж Буль (1815-1864 гг.) и немецкий ученый Готлоб Фреге (1848- 1925 гг.). В дальнейшем она получила развитие в трудах многих математиков и логиков, в том числе и российских, и широкое применение как внутри, так и вне математики. Идеи и методы математической логики используют такие науки как информатика, вычислительная математика, структурная лингвистика и др.

Математическая логика – раздел математики, посвященный изучению математических понятий, доказательств и вопросов оснований математики.

Традиционно в математическую подготовку будущих педагогов начального образования включают начала этой логики – раздел о математических понятиях, логику высказываний и высказывательных форм (предикатов), в том числе отношения следования и равносильности, теоремы и виды теорем, правила построения верных умозаключений, способы доказательств. В связи с этим, учебно-методическое пособие включает лишь некоторые элементы математической логики и соответствующий язык, которые найдут применение в других разделах курса математики и в соответствующей форме при обучении математике учащихся начальных классов.

Элементы математической логики (разумеется на соответствующем уровне и языке) изучаются в начальном курсе математики не как отдельный раздел этого курса, а являются неотъемлемой частью самого обучения математике, и поэтому рассредоточены по всему курсу математики начальных классов.

Минимальная логическая программа, обеспечивающая потребности глубокого усвоения младшими школьниками математики и логического развития учащихся, включает формирование математических понятий и соответствующих способов действий, свойства которых описываются в форме высказываний, а выявление и обоснование происходит с помощью логического вывода в форме умозаключения.

В соответствии с требованиями ФГОС НОО Примерная основная образовательная программа⁴ предусматривает формирование специальных *логических универсальных учебных действий*: анализ объектов в целях выделения признаков (существенных, несущественных; выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов; построение логической цепочки рассуждений, анализ истинности утверждений; доказательство; выдвижение гипотез и их обоснование и др. Способность логически правильно рассуждать, способность точно и логично излагать свои мысли и неотъемлемые качества интеллектуально развитой личности. Следовательно, в настоящее время большую значимость получает вопрос совершенствования логической грамотности будущих учителей начальных классов, т.е. повышения качества логической подготовки студентов.

¹ Гетманова А.Д. Логика: учебник, словарь, практикум / А.Д. Гетманова. Изд. 2-е. – М., 2010. – С.3.

² Ивин А.А. Словарь по логике / А.А. Ивин, А.Л. Никифорова. – М., 1997. – С. 154-155.

³ Царева С.Е. Методика преподавания математики в начальной школе: учебник для студ. учреждений высш. образования / С.Е. Царева. – М., 2014. – С.129.

⁴ Примерная основная образовательная программа. – М., 2011. – С.99.

Важность роли математической логики в профессиональном становлении учителя начальных классов обуславливается еще и тем, что в Примерной основной образовательной программе, в разделе «Работа с информацией», в сведениях из логики представлены только слова, выражающие логические связки («и», «или», «не», «если, то», «все», «каждый», «любой», «некоторые», «хотя бы один») и истинностные значения предложений. В процессе обучения информатике практика употребления этих слов расширяется, в том числе и в ситуациях, когда возникает вопрос об истинности информации, сообщаемой соответствующими предложениями. В связи с этим, знание основ логики поможет ему лучше разбираться в исследованиях педагогических проблем, возникающих при обучении математике и другим дисциплинам; самому участвовать в решении этих проблем и тем самым совершенствовать свой профессионально-педагогический уровень. Хорошая логико-математическая подготовка позволяет учителю явно использовать элементы логики в обучении школьников и развивать их мыслительные способности, формируя различные приемы умственных действий и математический стиль мышления.

Теоретические положения, рассмотренные в данном пособии, лежат в основе многих занимательных и нестандартных задач, которые широко представлены как в учебниках математики, так и в научно-популярной литературе, ориентированной на проведение внеурочной деятельности с младшими школьниками.

ГЛАВА I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Математические понятия как форма мышления и познания, как способ обобщения, сохранения и развития результатов чувственного познания, как обозначение информации о мире, о человеке формируются у младших школьников на основе представлений о числах, величинах, отношениях, геометрических фигурах и пространственных отношениях, полученных ими до школы.

Понятия, которые изучаются в начальном курсе математики, обычно представляют в виде шести групп. В первую группу включаются понятия, связанные с отношениями: следовать за, больше, меньше, равно и др. Во вторую входят понятия, связанные с числами и операциями над ними: число, цифра, сложение, слагаемое, сумма и др. Третью оставляют алгебраические понятия: выражение, равенство, неизвестная, уравнение и др. В четвертую группу входят понятия, связанные с задачей и процессом ее решения: задача, схема, чертеж, таблица, модель и др. Пятую составляют геометрические понятия: точка, прямая, отрезок, луч, треугольник, квадрат и др. Шестую группу образуют понятия, связанные с величинами и их измерением. От того, каким смыслом будут наполнены в сознании учащихся эти понятия, какие способы действий с соответствующими объектами будут выработаны у них в начальной школе, зависит качество их математического образования в дальнейшем и уровень общего развития.

Прежде чем изучать такое обилие самых разных понятий, надо иметь представление о понятии как логической категории и особенностях математических понятий.

1.1. Понятия. Объем и содержание понятий

Математика, как и другие науки, имеет дело с понятиями. Термин «понятие» применяется обычно для обозначения целого класса объектов произвольной природы, которые обладают определенным характеристическим (отличительным, существенные) свойством или целым набором таких свойств, т.е. свойств, присущих только элементам этого класса.

С точки зрения логики понятие является особой формой абстрактного мышления, характерным для которой является следующее: 1) понятие – продукт высокоорганизованной материи; 2) понятие отражает материальный мир; 3) понятие предстает в сознании как средство обобщения; 4) понятие означает специфически человеческую деятельность; 5) формирование понятия в сознании человека неотделимо от его выражения посредством речи, записи или символа.

Понятие – форма мышления, в которой отражены существенные (отличительные) свойства предметов или объектов изучения.

Языковой формой выражения понятия является слово или словосочетание (группа слов). Например, «треугольник», «число три», «точка», «прямая», «равнобедренный треугольник», «растение», «хвойное дерево», «существенное» и т. д.

Математические понятия обладают рядом особенностей. Главное заключается в том, что математические объекты, о которых необходимо составить понятие, в реальности не существуют. Математические объекты созданы умом человека. Это идеальные объекты, отражающие реальные предметы или явления. Например, в геометрии изучают форму и размеры предметов, не принимая во внимание другие их свойства: цвет, массу, твердость и т.д. От всего этого отвлекаются, абстрагируются. Поэтому в геометрии вместо слова «предмет» говорят «геометрическая фигура». Результатом абстрагирования являются и такие математические понятия, как «число» и «величина».

Основными характеристиками любого понятия являются: объем и содержание.

Когда говорят о математическом понятии, то обычно имеют в виду множество объектов, обозначаемых одним термином (словом или группой слов). Так, говоря о квадрате, имеют в виду все геометрические фигуры, являющиеся квадратами. Считают, что множество всех квадратов составляет объем понятия «квадрат».

Объемом понятия называется множество объектов, предметов или отношений, к которым применимо данное понятие.

Например, 1) объемом понятия «параллелограмм» является множество таких четырехугольников, как собственно параллелограммы, ромбы, прямоугольники и квадраты; 2) объемом понятия «однозначное натуральное число» будет множество – {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; 3) объемом понятия «хвойное дерево» является множество – {ель, сосна, кедр, ..., лиственница}.

Любой математический объект обладает определенными свойствами. Например, квадрат имеет четыре стороны, четыре прямых угла, равные диагонали. Можно указать и другие его свойства, но среди свойств объекта различают *существенные (отличительные)* и *несущественные*.

Свойство называется **существенным** (отличительным) для объекта, если оно присуще этому объекту и без него он не может существовать; свойство называется **несущественным** для объекта, если он может без него существовать.

Например, для квадрата существенными являются все свойства, перечисленные выше. Несущественным для квадрата ABCD будет свойство «сторона AD горизонтальна» (рис. 1). Если этот квадрат повернуть, то сторона AD окажется вертикальной.

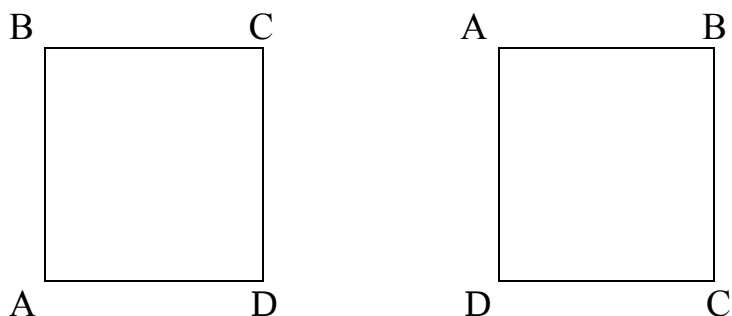


Рис. 1

Содержанием понятия называется множество всех существенных (отличительных) свойств объекта или предмета, отраженных в данном понятии.

Например, 1) для понятия «параллелограмм» содержанием является множество свойств: имеет четыре стороны, имеет четыре угла, противоположные стороны попарно параллельны, противоположные стороны равны, противоположные углы равны, диагонали в точке пересечения делятся пополам; 2) перечислим свойства, составляющие содержание понятия «биссектриса угла»: быть лучом, исходить из вершины угла, делить угол пополам; 3) перечислим свойства, составляющие содержание понятия «существительное»: быть частью речи, обозначать предмет, отвечать на вопрос «кто?» или «что?».

Рассмотрим пример для младших школьников, используя наглядный материал (рис. 2):



Рис.2

Диалог:

- Опиши фигуру.
- Маленький черный треугольник.
- Большой белый треугольник.
- Чем фигуры похожи ?
- Формой.
- Чем фигуры отличаются ?
- Цветом, величиной.
- Что есть у треугольника ?
- 3 стороны, 3 угла.

Таким образом, дети выясняют существенные и несущественные свойства понятия «треугольник». Существенные свойства – «иметь три стороны и три угла», несущественные свойства – «иметь цвет и размер».

Закон обратного отношения. Между объемом понятия и его содержанием существует закономерная связь: если увеличивается объем понятия, то уменьшается его содержание, и наоборот, с увеличением содержания понятия уменьшается его объем. Так, например, объем понятия «равнобедренный треугольник» является частью объема понятия «треугольник», а в содержание понятия «равнобедренный треугольник» входит больше свойств, чем в содержание понятия «треугольник», т.к. равнобедренный треугольник обладает не только всеми свойствами треугольника, но и другими, присущими только равнобедренным треугольникам («две стороны равны», «два угла равны», «две медианы равны» и др.).

1.2. Виды понятий

Понятия можно классифицировать по объему, по характеру мыслимых в понятии предметов и по признакам, включенным в содержание, т.е. дать логическую характеристику понятия.

Среди понятий *по числу элементов объема* понятия подразделяются на *пустые* и *непустые*.

Понятие является **пустым**, если в его объеме нет ни одного реально существующего элемента.

Например, понятия: «вечный двигатель», «круглый квадрат», «Снегурочка».

Понятие является **непустым**, если в его объеме содержится хотя бы один реально существующий элемент.

Среди понятий с непустым объемом различают *единичные* и *общие*.

Понятие является **единичным**, если в его объеме содержится только один элемент.

Например, понятия: «река Енисей», «Республика Тува», «столица России».

Понятие является **общим**, если в его объеме содержится более одного элемента.

Например, понятия: «город», «река», «республика», «четырёхугольник», «число», «многоугольник», «уравнение».

В процессе изучения основ какой-либо науки у учащихся формируются, в основном, общие понятия. Например, в начальных классах учащиеся знакомятся с такими понятиями, как «цифра», «число», «слагаемое», «сумма», «отрезок», «длина отрезка», «разность», «произведение», «частное», «доля», «дробь», «площадь фигуры» и многими другими. Все эти понятия являются общими понятиями.

По содержанию можно выделить следующие четыре пары понятий: *конкретные* и *абстрактные*; *собираательные* и *разделительные* (*несобираательные*); *положительные* и *отрицательные*; *относительные* (*соотносительные*) и *безотносительные*.

Конкретным называется понятие, в котором отражен определенный, данный предмет (столица России, полководец Кутузов и т.п.) или класс предметов (дом, яблоко, окружность, люстра и др.).

Абстрактным называется понятие, в котором мыслится не целый предмет, а какой-либо из признаков предмета, взятый отдельно от самого предмета. Абстрактные понятия бывают единичные (гениальность Пушкина, очарование Москвы и т.п.) и общие (красота, белизна, гениальность, честность и т.п.). Абстрактные понятия, кроме отдельных свойств предмета, отражают и отношения между предметами (неравенство, сходство, тождество и др.).

Собираательным называется понятие, в котором группа однородных предметов мыслится как единое целое (стадо, стая, полк, оркестр, лес и т.п.).

Разделительным называется понятие, в котором каждый элемент его объема является индивидуальным предметом, а не представляет собой группу, совокупность, собрание индивидуальных предметов (ручка, река, игрушка, дерево и т.п.).

Положительное понятие характеризует в предмете наличие того или иного качества или отношения (умный, грамотный, красивый, гуманный и т.п.).

Отрицательным называют понятие, которое означает, что указанное качество отсутствует в предмете (безумный, неграмотный, некрасивый, антигуманный и т.п.). Эти понятия в языке выражены словом или словосочетанием, содержащим отрицательную частицу «не» или «без» («бес»), присоединенную к соответствующему положительному понятию и выполняющую функцию отрицания.

Если частица «не» или «без» («бес») слилась со словом и слово без них не употребляется, то соответствующее понятие относят к положительным (неряха, невежа, беспечный, бесчинство, ненастье, беспечность, безупречность и т.п.).

Относительное (*соотносительное*) – такое понятие, означающее признаки предметов, существование которого связано с существованием другого предмета (дети – родители, ученик – учитель, начальник – подчиненный, северный полюс магнита – южный полюс магнита и др.).

Безотносительное – понятие, в котором мыслятся предметы, существующие самостоятельно, вне зависимости от другого предмета (дом, дерево, деревня, человек, минерал, доменная печь и т.п.). В содержании таких понятий не фиксируется отношение к какому-нибудь другому понятию.

1.3. Отношения между понятиями

Понятия взаимно связаны и взаимно обуславливают друг друга. Никакое понятие нельзя усвоить, не осознав его взаимосвязи с другими понятиями. Поэтому важно знать, в каких отношениях могут находиться понятия, и уметь определять эти отношения.

Отношения между понятиями по содержанию. Наличие общих признаков в содержании двух понятий указывает на то, что они сравнимы, а отсутствие этих признаков – на то, что они несравнимы.

Понятия являются **несравнимыми**, если в содержании этих понятий нет общего родового признака, т.е. они не имеют общего родового понятия (человек, любовь, картошка, кирпич, нитка).

Понятия являются **сравнимыми**, если в содержании этих понятий имеется хотя бы один общий признак, т.е. они имеют общее родовое понятие (фрукты, овощи, ягоды, хлеб – продукты питания).

Отношения между понятиями напрямую связаны с отношениями между соответствующими им объемами.

Условимся обозначать понятия малыми (строчными) буквами латинского алфавита: $a, b, c, \dots, z$. Их объемы будем обозначать соответственно: $V_a, V_b, V_c, \dots, V_z$.

Пусть заданы понятия a и b , имеющие объемы V_a и V_b . Так как объем понятия – множество, то, устанавливая отношения между объемами понятий, будем изображать их на диаграммах Эйлера-Венна.

1. Объемы понятий находятся в отношении *пересечения*, т.е. $V_a \cap V_b \neq \emptyset$ (рис. 3).

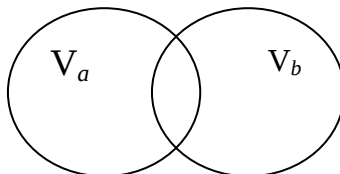


Рис. 3

Если объемы понятий a и b находятся в отношении пересечения, т.е. $V_a \cap V_b \neq \emptyset$, то понятия a и b называются **совместимыми** или **зависимыми**.

Например, 1) a : «равнобедренный треугольник», b : «прямоугольный треугольник»; 2) a : «врач», b : «женщина»; 3) a : «натуральное число, кратное 3», b : «натуральное число, кратное 4».

2. Объемы понятий находятся в отношении *включения*, например, объем понятия b включается в объем понятия a , т.е. $V_b \subset V_a$ (иначе, объем понятия b является собственным подмножеством объема понятия a). Этому случаю соответствует диаграмма, изображенная на рис. 4.

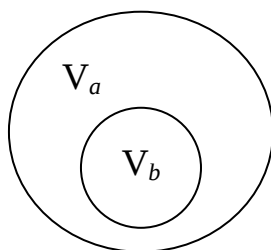


Рис. 4

Если объем понятия b является собственным подмножеством объема понятия a , то понятие b называется **видовым** по отношению к понятию a , а понятие a – **родовым** по отношению к понятию b .

В этом же случае о понятиях a и b говорят, что: 1) понятие b *уже*, чем понятие a , а понятие a *шире*, чем понятие b ; 2) понятие b есть *частный случай* понятия a , а понятие a есть *обобщение* понятия b .

Например, 1) a : «треугольник», b : «равнобедренный треугольник», $V_b \subset V_a$, следовательно, понятие a является родовым или родом, а понятие b – видовым или видом; 2) a : «многоугольник», b : «треугольник», $V_b \subset V_a$, a – родовое понятие, b – видовое понятие; 3) a : «часть речи», b : «имя существительное», $V_a \subset V_b$, a – родовое понятие, b – видовое понятие.

3. Объемы понятий находятся в отношении *равенства*, т.е. $V_a = V_b$

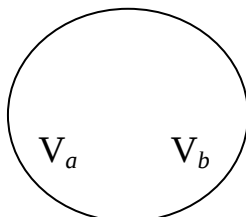


Рис. 5

Если объемы понятий a и b равны, т.е. $V_a = V_b$, то понятия a и b называются **тождественными**.

Например, 1) a : «квадрат», b : «равносторонний прямоугольник», 2) a : «река Волга», b : «самая длинная река в Европе»; 3) a : «окружность», b : «граница круга»; 4) a : «студент», b : «человек, обучающийся в вузе».

4. Объемы понятий *не пересекаются*, т.е. $V_a \cap V_b = \emptyset$ (рис. 6).

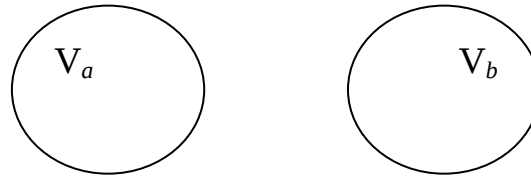


Рис. 6

Если объемы понятий a и b не пересекаются, т.е. $V_a \cap V_b = \emptyset$, то понятия a и b называются **несовместимыми** или **независимыми**.

Например, 1) a : «треугольник», b : «отрезок», $V_a \cap V_b = \emptyset$; 2) a : «дерево», b : «прямая», $V_a \cap V_b = \emptyset$; 3) a : «существительное», b : «животное», $V_a \cap V_b = \emptyset$.

Существует три вида отношений между несовместимыми понятиями: *соподчинения*, *противоположности* и *противоречия*.

Соподчинение (*координация*) – это отношение между объемами двух или нескольких понятий, исключающих друг друга, но принадлежащих некоторому, более общему родовому понятию.

Например, 1) a : «гвоздика», b : «роза» принадлежат объему понятия c : «цветок»; 2) a : «груша», b : «яблоко», c : «фрукты» (рис. 7а).

Отношение **противоположности** (*контрарности*) – это отношение между объемами двух понятий, которые являются видами одного и того же рода, и притом одно из них содержит какие-то признаки, а другое эти признаки не только отрицает, но и заменяет их другими, исключающими (т.е. противоположными признаками). Слова, выражающие противоположные понятия, являются *антонимами*. Антонимы широко используются в обучении. Например, 1) a : «быстро» – b : «медленно»; 2) a : «белое платье» – b : «черное платье»; 3) a : «глубокое озеро» – b : «мелкое озеро» (рис. 7б). Объемы последних двух понятий разделены объемом некоторого третьего понятия, куда, например, входит «умеренно», «красное платье», «средней глубины озеро».

В отношении **противоречия** (*контрадикторности*) находятся такие два понятия, которые являются видами одного и того же рода, и при этом одно понятие указывает на некоторые признаки, а другое эти признаки отрицает, исключает, не заменяя их никакими другими признаками. Например, 1) a : «черный», b : «нечерный»; 2) a : «быстро», b : «небыстро»; 3) a : «глубокое озеро», b : «неглубокое озеро» (рис. 7в).

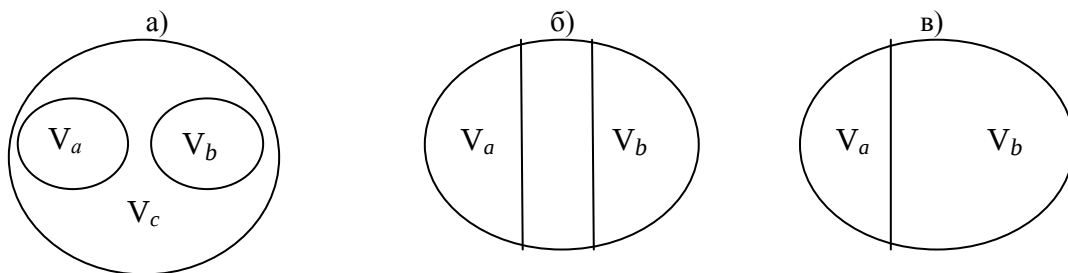


Рис. 7

Зная, в каких отношениях могут находиться понятия в зависимости от их объемов, установим, например, отношения между следующими парами понятий a и b , если:

- 1) a : «прямоугольник», b : «ромб»;
- 2) a : «многоугольник», b : «четырехугольник»;
- 3) a : «прямая», b : «треугольник»;
- 4) a : «параллелограмм с равными сторонами», b : «ромб».

В примере 1 объемы понятий пересекаются, т.е. $V_a \cap V_b \neq \emptyset$ (рис. 3), так как имеют общие элементы: некоторые прямоугольники, а именно, обладающие свойством «имеет все равные стороны», являются ромбами, и некоторые ромбы, а именно обладающие свойством «имеет прямые углы», являются прямоугольниками. Таким образом, понятия «прямоугольник» и «ромб» являются совместимыми или зависимыми.

В примере 2 объемы данных понятий находятся в отношении включения. Действительно, всякой четырехугольник является многоугольником, но не наоборот, поэтому объем понятия «четырехугольник» является подмножеством объема понятия «многоугольник», т.е. $V_b \subset V_a$ (рис. 4).

Следовательно, понятие «четырёхугольник» – видовое по отношению к понятию «многоугольник», а понятие «многоугольник» – родовое по отношению к понятию «четырёхугольник».

В примере 3 объёмы понятий не пересекаются, т.е. $V_a \cap V_b = \emptyset$ (рис. 6), так как ни про одну прямую нельзя сказать, что она является треугольником, и ни один треугольник не может быть назван прямой. Следовательно, понятия «прямая» и «треугольник» являются несовместимыми или независимыми.

В последнем примере объёмы понятий будут равными, т.е. $V_a = V_b$ (рис. 5), так как каждый параллелограмм с равными сторонами является ромбом и, наоборот, каждый ромб – это и есть параллелограмм с равными сторонами. Таким образом, понятия «параллелограмм с равными сторонами» и «ромб» являются тождественными.

1.4. Определение понятий. Способы определения понятий

Определение (лат. «definitio» – «определение») **понятия** – логическая операция, которая раскрывает содержание понятия либо устанавливает значение термина. С помощью определения выявляются те существенные выделяющие признаки, которые составляют содержание понятия.

Логическими элементами определения являются: **определяемое понятие** (*definiendum*) – это то, что подлежит определению, и **определяющее понятие** (*definiens*) – это то, посредством чего указываются существенные признаки определяемого понятия, т.е. та система существенных признаков, которая *составляет содержание понятия*.

По своей функции определения делятся на *реальные* и *номинальные*.

Реальные определения – это определения-описания, они указывают, какими признаками обладает определённый предмет, перечисляют эти признаки.

Например. 1. «Гипотенуза – это сторона треугольника, лежащая против прямого угла».

2. «Спортсмен – это человек, постоянно занимающийся спортом».

3. «Окончание – изменяемая часть слова, которая служит для связи слов в предложении».

4. «Периметр (P) – сумма длин сторон какой-либо плоской геометрической фигуры».

5. «Имя прилагательное – часть речи, которая обозначает признак предмета и отвечает на вопросы «какой?», «какая?», «какое?», «какие?», «чей?».

6. «Глагол – часть речи, которая обозначает действие или состояние предмета и отвечает на вопросы «что делать?», «что сделать?» и т.п.

Реальные определения могут быть истинными, если верно приписывают признаки предмету, или ложными, если приписывают ему признаки, этому предмету не принадлежащие.

Номинальные определения – это определения-предписания, они дают имя понятию, указывают, каким термином мы будем называть предмет или класс предметов, предписывают способ употребления термина, вводят знаки, заменяющие понятия, т.е. они раскрывают значение термина или вводят знаки, например: $+$, $-$, $\cdot$, $=$, m (масса тела), c (скорость света), t (температура) и др. Номинальные определения не могут рассматриваться как истинные или ложные, это просто соглашения о наименованиях, введение терминов.

Например. 1. «Символом g принято обозначать ускорение свободного падения угла».

2. «Целые числа, которые делятся на 2 без остатка, называются четными, а те целые числа, которые делятся на 2 с остатком, называются нечетными».

По способу раскрытия свойств определяемого понятия различают *неявные* и *явные* определения. К неявным определениям относятся *невербальные* определения, к явным – *вербальные* определения (лат. слово «verbalis» означает «словесный»).

Невербальное определение – это определение значения понятия путем непосредственной демонстрации предметов или указания контекста, в котором применяется то или иное понятие.

Невербальные определения понятий используются в начальном курсе математики, так как младшие школьники обладают преимущественно наглядным мышлением, и именно наглядные представления о математических понятиях играют для них основную роль в обучении математике.

Невербальные определения разделяются на *остенсивные* (лат. слово «ostendere» – «показывать») и *контекстуальные* определения.

Остенсивное определение – определение, в котором содержание нового понятия раскрывается путем демонстрации объектов (указывая на определяемый объект, одновременно называют его, т.е. устанавливают соответствие между предметом и его именем).

Например. 1. Понятия «точка», «прямая», «луч», «отрезок», «кривая», «треугольник», «многоугольник» в начальной школе определяются с помощью демонстрации соответствующих моделей фигур.

2. Таким же способом показа можно определить в начальном курсе математики понятия «равенство» и «неравенство».

Равенства:

$$4 = 4$$

$$4 + 1 = 5$$

Неравенства:

$$4 > 3$$

$$4 - 1 < 4$$

Контекстуальное определение – определение, в котором содержание нового понятия раскрывается через отрывок текста, через контекст, через анализ конкретной ситуации, описывающей смысл водимого понятия.

Например.

1. Понятия «больше», «меньше», «равно» в начальном курсе математики определяются с помощью указания контекста (больше на 3 – это значит столько же и ещё 3).

2. Примером контекстуального определения может быть определение уравнения и его решения, которые даются во 2 классе. В учебнике математики после записи $\square + 4 = 12$ и перечня чисел 6, 8, 7 идет текст: «К какому числу надо прибавить 4, чтобы получилось 12? Чья карточка подходит?»

Уравнение – это равенство, содержащее неизвестное число, которое надо найти. Неизвестное число обозначают маленькими латинскими буквами, например x (икс). Решить уравнение – значит найти все такие значения x (если они есть), при которых равенство будет верным.

$x + 4 = 12$ – это уравнение.

$$x = 8$$

Проверка:

$$8 + 4 = 12$$

$$12 = 12$$

Иногда встречаются определения, сочетающие контекст и показ.

Например. 1. Нарисовав прямые углы, имеющие разное расположение на плоскости, и сделав надпись: «Это – прямые углы», учитель знакомит младших школьников с понятием «прямой угол».

2. Примером такого определения может служить следующее определение прямоугольника. На рисунке дается изображение четырехугольников и приведен текст: «У этих четырехугольников все углы прямые». Под рисунком написано: «Это – прямоугольники».

Таким образом, на начальном этапе обучения учащихся математике чаще всего используются невербальные определения понятий, а именно, остенсивные, контекстуальные и их сочетание.

В средних и старших классах, в связи с развитием языка и накоплением достаточного запаса математических понятий, на смену невербальным определениям приходят *вербальные определения* понятий. При этом все большую роль начинают играть не наглядные представления о математических понятиях, а их строгие определения. Они основываются на свойствах, которыми обладают определяемые понятия.

Вербальное определение – перечисление существенных (отличительных) свойств данного понятия, сведенных в связное предложение.

В явном определении понятие, содержание которого надо раскрыть, называется *определяемым* понятием, а то понятие, посредством которого оно определяется, называется *определяющим* понятием.

Наиболее распространенным из явных определений является определение через ближайший род и видовые отличия. В нем устанавливаются существенные признаки определяемого понятия.

I. Определение через род и видовое отличие.

Например, определение понятия «квадрат». «Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны».

Проанализируем структуру этого определения. Сначала указано определяемое понятие – «квадрат», а затем приведено определяющее понятие, в котором можно выделить две части: 1) понятие «прямоугольник», которое является *родовым* по отношению к понятию «квадрат»; 2) свойство «иметь все равные стороны», которое позволяет выделить из всевозможных прямоугольников один вид – квадрат, поэтому это свойство называют *видовым отличием*.

Признак, указывающий на тот круг предметов, из числа которых нужно выделить определяемое множество предметов, называется *родовым признаком*, или *родом*.

Видовым отличием называются свойства (одно или несколько), которые позволяют выделить определяемое понятие из объема родового понятия.

Схематично структуру определений через род и видовое отличие можно представить следующим образом (рис. 8).



Рис. 8

Очевидно, что определяемое понятие и определяющее понятие должны быть тождественны, т.е. их объемы должны совпадать.

II. *Генетическое или конструктивное определение*, т.е. определение, в котором видовое отличие определяемого понятия указывает на его происхождение или способ образования, построения (греч. слово «denesis» – «*происхождение*», лат. слово «constructio» – «*построение*»).

Например. 1. Определение понятия «угол». «Углом называется фигура, образованная двумя углами, исходящими из одной точки». В этом примере понятие «фигура» является родовым, а способ образования этой фигуры – «образована двумя лучами, исходящими из одной точки» – является видовым отличием.

2. Определение понятия «треугольник». «Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков».

В этом определении указано родовое понятие по отношению к треугольнику – «фигура», а затем видовое отличие, которое раскрывает способ построения фигуры, являющейся треугольником: взять три точки, не лежащие на одной прямой, и соединить каждую их пару отрезком.

3. Определение понятия «прямой круговой цилиндр». «Прямой круговой цилиндр – геометрическая фигура, образованная вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон».

В этом примере понятие «геометрическая фигура» является родовым, а способ образования этой фигуры – «образованная вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон» – является видовым отличием.

III. *Индуктивное определение* или определение понятия с использованием формулы, позволяющей сформулировать общее отличительное свойство данного понятия (лат. слово «inductio» – «*наведение*» на рассуждение от частного к общему).

Например, определение понятия «функция прямой пропорциональности».

«Функцией прямой пропорциональности называется функция вида $y=kx$, где $x \in R$, $k \neq 0$ ». В этом примере понятие «функция» – родовое понятие, а формула $y=kx$, где $x \in R$, $k \neq 0$ – видовое отличие понятия «функция прямой пропорциональности» от других видов функций.

Рассмотренные способы определения понятий позволяют наглядно изобразить виды определения понятий на следующей схеме (рис. 9).



Рис. 9

1.5. Правила явного определения понятий

Определения понятий не доказывают и не опровергают. Как оценивают правильность тех или иных определений? Имеются определенные правила и требования, которые необходимо выполнять, формулируя определение данного понятия. Рассмотрим основные из них.

1. *Определение должно быть соразмерным.* Это означает, что объем определяемого понятия должен быть равен объему определяющего понятия. При нарушении правила соразмерности возможны две ошибки: определение оказывается слишком узким (недостаточным) или слишком широким (избыточным). В первом случае определяющее понятие будет меньшим по объему, чем определяемое понятие, а во втором – большим.

Например, определение «Прямоугольником называется четырехугольник, имеющий прямой угол» – узкое, а определение «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые и смежные стороны равны» – широкое.

2. *Определения не должны содержать «порочного круга».* Это означает, что нельзя определять одно понятие через другое, а это другое понятие – через первое.

Например, если определить окружность как границу круга, а круг как часть плоскости, ограниченную окружностью, то мы будем иметь «порочный круг» в определениях данных понятий.

3. *Определение не должно быть тавтологией,* т.е. нельзя понятие определять через само себя, изменяя только (и то зачастую незначительно) словесную форму понятия.

Например, определение: «Прямой угол – это угол в 90° », «Сложением называется действие, при котором числа складываются» – содержат тавтологию.

4. *Определение должно содержать указание на ближайшее родовое понятие.* Нарушение этого правила приводит к различным ошибкам. Так, учащиеся, формулируя определение, иногда не указывают родовое понятие. Например, определение квадрата: «Это когда все стороны равны». Другой тип ошибок связан с тем, что в определении указывается не ближайшее родовое понятие, а более широкое родовое понятие. Например, определение того же квадрата: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны равны».

5. *Определение по возможности не должно быть отрицательным.* Это означает, что следует избегать таких определений, в которых видовое отличие выступает в качестве отрицательного. Вместе с тем, в математике все же используют такие определения, в частности, если в них указываются свойства, не принадлежащие определяемому понятию. Например, определение

«Иррациональное число – число, которое нельзя представить в виде $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа и $q \neq 0$ ».

Знание вышеперечисленных правил определения понятий даст возможность учителю более строго относиться к определениям, которые дает он сам учащимся на уроках, и к определениям, которые дают учащиеся в своих ответах.

1.6. Классификация понятий

Полученные ранее знания о разбиении множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы) и о классификациях множеств дают возможность рассмотреть классификации понятий, так как каждое понятие имеет объем, который, как было определено выше, также является множеством.

Классификацией понятия называется распределение объектов какого-либо понятия на классы по наиболее существенным свойствам (признакам).

Таким образом, под классификацией понятия понимается разделение множества объектов, составляющих объем родового понятия, на виды. Это разделение основано на сходстве объектов одного вида и отличии их от объектов других видов в существенных свойствах (признаках).

Так, в биологии все живые организмы распределяются на типы, виды, семейства; в сельском хозяйстве фрукты и овощи сортируют по размеру или весу; слова в словарях разбивают на классы, располагая их в алфавитном порядке и т.п. Примером научной классификации является периодическая система элементов Д.И. Менделеева, фиксирующая закономерные связи между химическими элементами и определяющая место каждого из них в единой таблице.

Например, классификацию понятия «натуральное число» можно выполнить следующим образом (рис. 10).



Рис. 10

Правильная классификация предполагает соблюдение определенных условий:

1. *Классификация должна проводиться по определенному свойству (признаку), остающемуся неизменным в процессе классификации.*

В приведенной классификации понятия «натуральное число» таким свойством является свойство натуральных чисел «иметь определенное количество простых делителей». Понятие «единица» – единственное в своем классе (его объем равен 1), т.к. только число 1 имеет один делитель; натуральные числа, имеющие ровно два делителя, называются простыми и входят во второй класс; натуральные числа, имеющие более двух делителей, называются составными и образуют третий класс.

2. *Понятия, получающиеся в результате классификации, должны быть взаимно несовместимыми или независимыми.*

В рассмотренном примере это условие выражается тем, что объемы полученных понятий «единица», «простое число» и «составное число» попарно не пересекаются.

3. *Объединение объемов понятий, получающихся при классификации, должно равняться объему исходного понятия.*

В приведенном примере это условие также выполняется, т.к. объединение объемов понятий «единица», «простое число» и «составное число» равно объему понятия «натуральное число».

Удобно иллюстрировать классификацию с помощью диаграммы Эйлера-Венна. Для удобства введем обозначения: пусть a : «натуральное число», b : «единица», c : «простое число», d : «составное число», тогда классификация понятия «натуральное число» наглядно изображается следующим образом (рис. 11).

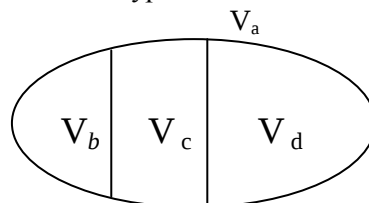


Рис. 11

Рассмотрим еще одну из возможных классификаций понятия «натуральное число», взяв за основу свойство «делиться на 2», тогда мы получим следующую классификацию, изображенную схемой (рис. 12) и на диаграмме Эйлера-Венна (рис. 13).



Рис. 12

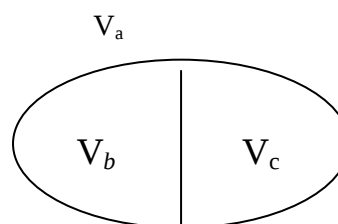


Рис. 13

На рис. 12 использованы обозначения: V_a – объем понятия «натуральное число», V_b – объем понятия «четное число», V_c – объем понятия «нечетное число».

Не трудно убедиться, что и эта классификация выполнена верно, проверив сформулированные выше условия правильной классификации.

Таким образом, для одного и того же понятия можно получить несколько разных классификаций в зависимости от определенного свойства, положенного в основу классификации.

Различают два типа классификаций: *классификация по видоизмененному признаку (свойству) и дихотомическая классификация.*

Классификация по видоизмененному признаку (свойству) осуществляется тогда, когда за основу берутся различные свойства (признаки) классифицируемых объектов.

Дихотомическая классификация (гр. слово «dichotomia» – «разделение надвое») представляет собой деление понятия на два противоречащих друг другу видовых понятия, одно из которых обладает данным признаком, а другое – не обладает.

Из рассмотренных выше классификаций понятия «натуральное число» первая классификация (рис. 10) относится к классификации по видоизмененному признаку (свойству), а вторая (рис. 12) – к дихотомической классификации.

Пример. Применяя дихотомию, классификацию понятия «четырёхуголь-ник» можно представить на следующей схеме (рис. 14).



Рис. 14

Классификация понятия называется *естественной*, если она проводится по существенному свойству (признаку), и называется *искусственной*, если она использует несущественные свойства понятия.

Например, рассмотренные выше классификации понятия «натуральное число» являются естественными, а искусственными классификациями будут, например, алфавитные указатели, именные каталоги в библиотеках.

Как правило, все классификации математических понятий являются естественными и вместе с процессом определения понятий образуют *систему понятий* науки математика.

Задания для самоконтроля

Изучив тему «Математические понятия», студент должен *уметь*:

- устанавливать отношения между объемами понятий;
- анализировать логическую структуру определений понятий через род и видовое отличие;
- формулировать определение понятий через род и видовое отличие с учетом требований к таким определениям;
- находить логические ошибки в определениях понятий;
- распознавать способ определения понятий (контекстуальные, остенсивные, через род и видовое отличие);
- приводить примеры классификаций различных понятий из математики и других дисциплин;
- применять знания по теме для анализа материала учебников математики для начальных классов.

Проверить сформированность названных умений можно, выполнив *следующие задания*.

1. Назовите несколько понятий, принадлежащих объему понятий: *a*: «целое число», *b*: «многоугольник», *c*: «часть речи», *d*: «хвойное дерево», *e*: «часы», *f*: «трапеция», *q*: «мебель», *h*: «электроприбор», *k*: «геометрическая фигура», *l*: «автомашина», *m*: «музыкальный инструмент», *n*: «глагол».

2. Начертите три объекта, принадлежащих объему понятия: а) «квадрат»; б) «геометрическая фигура»; в) «прямоугольник»; г) «круг»; д) «треугольник».

3. Каков объем понятия: а) «однозначное число»; б) «двузначное число»; в) «цифра»; г) «натуральное число»?

4. Укажите несколько свойств, входящих в содержание понятия: *a*: «четыреугольник», *b*: «параллелограмм», *c*: «часть речи», *d*: «трапеция», *e*: «хвойное дерево», *f*: «биссектриса угла».

5. Назовите пять существенных свойств понятия «равнобедренный треугольник» и изобразите с помощью кругов Эйлера-Венна отношение между объемом данного понятия и объемом понятия «остроугольный треугольник».

6. Назовите фигуру со следующими свойствами: а) иметь 4 вершины; б) иметь 4 стороны; в) иметь все равные стороны; г) иметь прямой угол.

7. Выясните, какие из следующих свойств входят в содержание понятия «трапеция», а какие нет: а) иметь пару равных сторон; б) иметь пару параллельных сторон; в) иметь все равные углы; г) иметь равные диагонали.

8. Назовите свойства: а) присущие прямоугольнику и ромбу; б) присущие прямоугольнику и не присущие ромбу; в) присущие ромбу и не присущие прямоугольнику.

9. Среди следующих свойств выделите те, которыми обладает квадрат: а) диагонали делят углы пополам; б) диагонали в точке пересечения делятся пополам. Какие из перечисленных свойств входят в содержание понятий: *a*: «прямоугольник», *b*: «параллелограмм», *c*: «ромб»?

10. Из учебников математики начальной школы приведите примеры задач, при выполнении которых у учащихся формируется представление об объеме понятия: *a*: «цифра»; *b*: «отрезок»; *c*: «треугольник»; *d*: «площадь».

11. Какие свойства понятий «прямоугольник» и «сложение» изучают в начальном курсе математики?

12. Определите, в каких отношениях находятся следующие понятия *a*, *b*, *c* и изобразите их объемы V_a , V_b , V_c на диаграммах Эйлера-Венна:

а) *a*: «целое число», *b*: «натуральное число», *c*: «отрицательное число»;

б) *a*: «дерево», *b*: «растение», *c*: «кустарник»;

в) *a*: «квадрат», *b*: «ромб с прямыми углами», *c*: «прямоугольник»;

г) *a*: «прямоугольный треугольник», *b*: «равнобедренный треугольник», *c*: «равносторонний треугольник»;

д) *a*: «равносторонний треугольник», *b*: «тупоугольный треугольник», *c*: «остроугольный треугольник»;

е) *a*: «прямая», *b*: «луч», *c*: «отрезок»;

ж) *a*: «треугольник», *b*: «многоугольник», *c*: «геометрическая фигура»;

з) *a*: «треугольник», *b*: «отрезок», *c*: «медиана треугольника».

13. Изобразите на диаграммах Эйлера-Венна объемы понятий *a*, *b*, *c*, если:

а) *a*: «школьник», *b*: «спортсмен», *c*: «студент»;

б) *a*: «школьник», *b*: «девочка», *c*: «отличник»;

в) *a*: «полевой цветок», *b*: «василек», *c*: «цветок»;

г) *a*: «четное натуральное число», *b*: «нечетное натуральное число», *c*: «натуральное число»;

д) *a*: «однозначное число», *b*: «двузначное число», *c*: «четное число»;

е) *a*: «прямые плоскости», *b*: «пересекающиеся прямые», *c*: «параллельные прямые»;

ж) *a*: «отрезок», *b*: «треугольник», *c*: «квадрат»;

з) *a*: «число, кратное 3», *b*: «число, кратное 5», *c*: «число, кратное 10».

14. Приведите примеры понятий *a*, *b*, *c*, отношения между объемами которых изображены на диаграммах Эйлера-Венна (рис. 15).

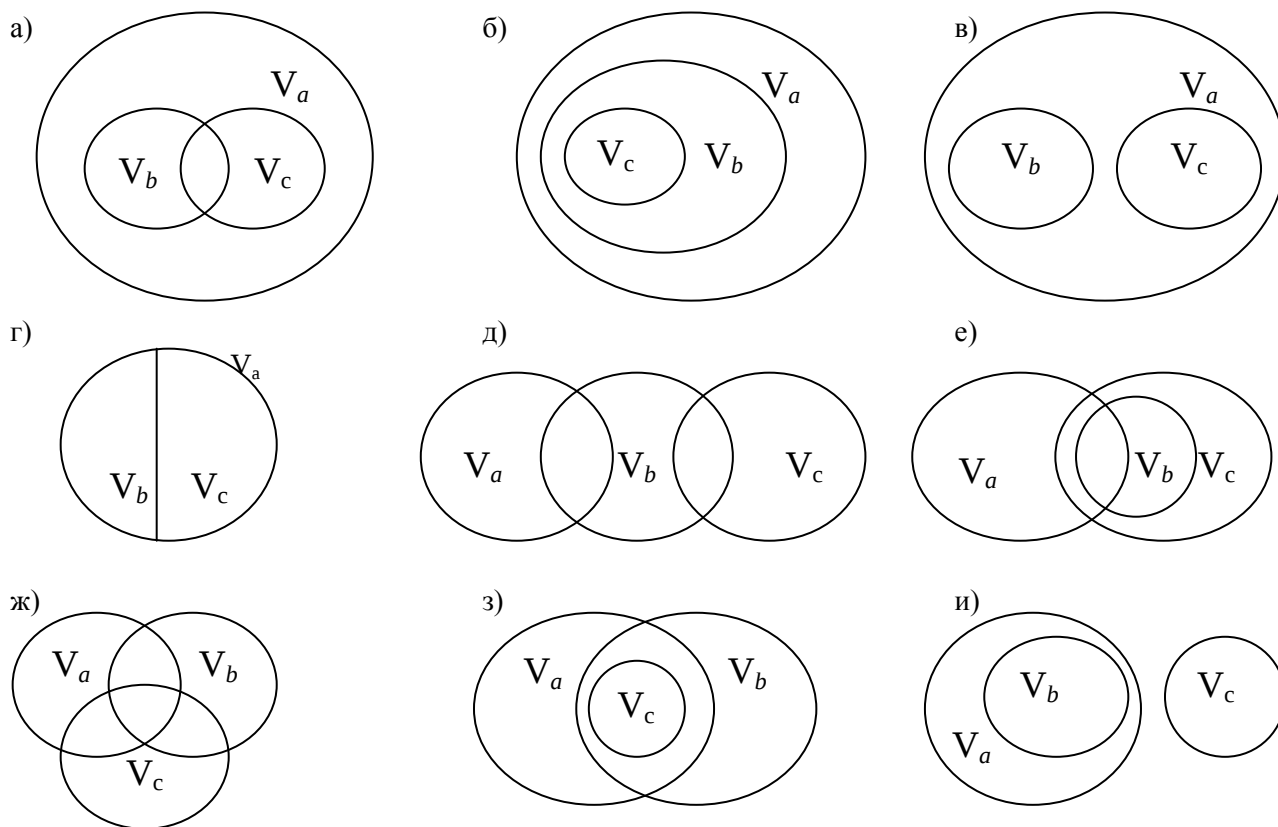


Рис. 15

14. Для каждого из следующих понятий укажите родовое понятие: а) «хвойное дерево»; б) «кустарник»; в) «млекопитающее»; г) «квадрат»; д) «имя существительное»; е) «биссектриса угла»; ж) «стол»; з) «портфель»; и) «тетрадь»; к) «пианино»; л) «отрезок»; м) «окружность»; и) «нечетное число».

15. Для каждого из следующих понятий укажите по два видовых понятия:

а) «животное»; б) «растение»; в) «многоугольник»; г) «дерево»; д) «часть речи»; е) «параллелограмм»; ж) «домашняя птица»; з) «одежда»; и) «обувь»; к) «мебель».

16. Назовите понятие, которое является родовым для данных групп понятий: а) «квадрат», «трапеция», «ромб», «треугольник»;

б) «круг», «окружность», «многоугольник», «отрезок»;

в) «дерево», «кустарник», «травя».

17. Укажите три понятия, являющиеся родовыми для понятия «прямоугольник». Какое из них ближайшее?

18. Среди понятий, изучаемых в начальном курсе математики, есть такие, как «четное число», «треугольник», «число», «трехзначное число», «прямой угол», «сумма», «слагаемое», «выражение». Укажите среди них пары понятий, которые являются: а) совместимыми или зависимыми; б) несовместимыми или независимыми; в) одно – родовым, а другое – видовым; г) одно – целым, другое – частью. Есть ли среди них тождественные понятия?

19. Выясните, в каких случаях верно утверждение: «Понятие b есть обобщение понятия a », если:

а) a : «отрезок», b : «прямая»;

г) a : «минута», b : «час»;

б) a : «четное число», b : «целое число»;

д) a : «птица», b : «животное»;

в) a : «архитектура», b : «искусство»;

е) a : «окружность», b : «круг».

20. Являются ли тождественными следующие пары понятий:

а) a : «число», b : «цифра»;

е) a : «автомобиль», b : «автомашина»;

б) a : «школьник», b : «учащийся»;

ж) a : «окружность», b : «граница круга»;

в) a : «ребенок», b : «дитя»;

з) a : «цифра», b : «однозначное число»;

г) a : «книга», b : «учебник»;

и) a : «рука», b : «верхняя конечность»?

д) a : «учитель», b : «преподаватель»;

21. Выясните, в каких случаях верно утверждение: «Понятие a является видовым по отношению к понятию b », если:

- а) *a*: «насекомое», *b*: «животное»;
б) *a*: «геометрия», *b*: «математика»;
в) *a*: «треугольник», *b*: «многоугольник»;

- г) *a*: «книга», *b*: «глава книги»;
д) *a*: «лист», *b*: «дерево»;
е) *a*: «зоология», *b*: «биология».

22. Выделите в определении: «Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположной стороны» определяемое и определяющее понятия, родовое понятие (по отношению к определяемому) и видовое отличие.

23. В нижеприведенных определениях выделите видовое (определяемое) понятие, родовое понятие и видовое отличие:

- а) Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.
б) Значение переменной, которое обращает уравнение в истинное равенство, называется корнем уравнения.
в) Треугольник называется равнобедренным, если хотя бы две его стороны равны.
г) Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и либо не пересекаются, либо совпадают.
д) Пустое множество – множество, не содержащее ни одного элемента.

24. Дайте вербальное определение понятия «квадрат», указав в качестве родового понятия – понятие: а) «прямоугольник»; б) «четырёхугольник»; в) «ромб»; г) «параллелограмм».

25. Дайте вербальные определения для следующих понятий и выявите логическую структуру сформулированных определений: а) «четырёхугольник»; б) «прямоугольник»; в) «ромб»; г) «равносторонний треугольник»; д) «имя существительное»; е) «трапеция»; ж) «имя прилагательное».

26. Приведите примеры генетических и индуктивных определений из курса алгебры.

27. Каков способ определения понятия «трехзначное число», если учащимся предлагается ответить на вопрос: «Сколько всего цифр (знаков) используется для записи каждого из чисел: 582, 400, 841, 333, 565?» и делается вывод: «Это трехзначное число»?

28. С понятием «противоположные стороны прямоугольника» учащихся знакомят так: «Красными линиями обозначены две противоположные стороны прямоугольника, а синими линиями – две другие противоположные стороны». Каким способом определено это понятие, если в учебнике, кроме текста, есть еще и соответствующий рисунок?

29. Выясните, какие из данных определений верны (соразмерны):

- а) Правильный треугольник – треугольник, у которого все стороны равны.
б) Остроугольный треугольник – треугольник с острым углом.
в) Прямоугольник – четырехугольник, у которого все углы прямые и смежные стороны не равны.

30. Укажите логические ошибки, опустите лишние слова или добавьте нужные слова в следующих определениях:

- а) Лучом называется прямая, ограниченная с одной стороны.
б) Отрезком называется прямая, ограниченная с обеих сторон.
в) Квадратом называется прямоугольник, диагонали которого равны и делят друг друга пополам.

31. Найдите ошибки в определениях, выясните тип ошибки:

- а) Математика – это наука.
б) Окружность – это граница круга, а круг – фигура, ограниченная окружностью.
в) Прямая, делящая сторону треугольника пополам, называется медианой.
г) Сложением называется действие, при котором числа складываются.

32. Проверьте правильность следующих классификаций понятий:

а) понятие «треугольник» делится на понятия: «остроугольный треугольник», «прямоугольный треугольник», «тупоугольный треугольник», «равносторонний треугольник» и «равнобедренный треугольник»;

б) понятие «целое число» делится на понятия: «положительное число» и «отрицательное число»;

в) понятие «натуральное число» делится на понятия: «четное число», «нечетное число» и «число, кратное 3»;

г) понятие «четырёхугольник» делится на понятия: «параллелограмм» и «трапеция»;

д) понятие «прямые плоскости» делится на понятия: «параллельные прямые» и «пересекающиеся прямые».

В случае, если классификация выполнена неправильно, укажите какое условие нарушено и выполните правильную классификацию в виде схемы. Определите тип правильных классификаций, есть ли среди них дихотомические.

33. Выполните правильные классификации следующих понятий: а) «вуз»; б) «студент»; в) «угол»; г) «музыкальный инструмент»; д) «мебель»; е) «обувь»; ж) «домашнее животное»; з) «домашняя птица»; и) «посуда»; к) «часы».

Для каждой классификации укажите свойство (признак), по которому проведены классификации. Определите, в каких случаях классификации являются естественными, в каких – искусственными.

Проектная задача. «Определение понятий в начальном курсе математики».

1. Выясните, каким способом определяются в различных учебниках математики для начальных классов следующие понятия: элемент множества, равные множества, число, однозначное число, четное число, сложение, слагаемое, сумма, больше, вычитание, умножение, числовое выражение, числовое равенство, уравнение, точки, линии, отрезок, луч, треугольник, четырехугольник, прямоугольник, многоугольник, периметр, угол, длина отрезка, сантиметр, площадь фигуры, килограмм.

2. Установите, в каких учебниках математики для начальной школы преобладают определения понятий через род и видовое отличие.

3. Понаблюдайте, какие логические ошибки допускают младшие школьники, формулируя определение понятия через род и видовое отличие.

ГЛАВА 2. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

2.1. Понятие высказывания

Познавая окружающий мир, человек устанавливает различные отношения: между объектами, между объектами и их свойствами. Математика описывает эти отношения, используя как естественный словесный язык, так и свой символический, и формулирует некоторые предложения, истинность которых необходимо оценивать, т.е. устанавливать, истинны они или ложны. Такие предложения в математике называют *высказываниями*. Понятие высказывания является одним из основных понятий в математике.

Высказыванием называется всякое повествовательное предложение, относительно которого имеет смысл однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Например, высказываниями являются предложения: «Все рыбы умеют плавать», «7 – простое число», «Число 12 является четным», « $6 > 2$ », «В числе 12 один десяток и 2 единицы», «Число 13 делится на 3», «Число 5 является решением уравнения $x^2 - 10 = 0$ », «Все прямоугольники являются квадратами». Первые пять высказываний являются истинными, последние три – ложными высказываниями.

Высказывания принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots, Z$. Если высказывание A истинно, то пишут: A – «и»; а если высказывание A ложно, то записывают: A – «л». Истину («и») и ложь («л») называют **значениями истинности высказывания**. Например, значение истинности высказывания B : «число 341 двузначное» – ложь, поэтому можно записать: B – «л». Каждое высказывание либо истинно, либо ложно: быть одновременно и тем другим оно не может.

Согласно определению высказывания, вопросительные и восклицательные предложения не являются высказываниями. Повествовательные предложения, о которых нельзя сказать, истинны они или ложны, также не являются высказываниями.

Например, предложения «Да здравствует математика!», «Какой сегодня день недели?», «Да здравствует солнце, да скроется тьма!», «Стой! Куда идешь?», «Сумма чисел 4 и 15», « $x + 5 = 9$ » не являются высказываниями.

Все высказывания разделяются на *элементарные (простые)* и *составные (сложные)*.

Высказывание называется **элементарным** или **простым**, если оно содержит в себе одну мысль.

Например, A : «Число 24 четное», B : « $5 + 2 = 9$ », причем высказывание A – «и», так как нам известно, что $24 : 2 = 12$, а B – «л», так как $5 + 2 \neq 9$.

Высказывание называется **составным** или **сложным**, если оно содержит в себе несколько элементарных (простых) высказываний.

Например.

1. A : « $17 \geq 12$ ». Это высказывание состоит из двух элементарных высказываний, которые несложно вычленишь по чтению математического знака « $\geq$ » («больше или равно»), т.е. мы имеем составное высказывание, состоящее из двух элементарных высказываний, соединенных союзом «или»: « $17 > 12$ или $17 = 12$ ».

2. B : «Сегодня ясно и тепло». Это высказывание также является составным, т.к. оно содержит в себе два элементарные высказывания, соединенные союзом «и»: «Сегодня ясно и сегодня тепло».

Таким образом, составные высказывания получаются из элементарных при помощи связок: «не», «и», «или», «если ..., то», «тогда и только тогда» и некоторыми другими, которые в математике называют *логическими связками*.

Образование составных высказывания из элементарных с помощью логической связки называется **логической операцией**.

Замечание. Логические операции над высказываниями и их результаты (составные высказывания) называются одинаково.

Два составных высказывания называются **равносильными** (или эквивалентными), если они одновременно истинны или одновременно ложны при любых значениях истинности входящих в них элементарных высказываний.

В этом случае между составными высказываниями ставят знак « $\Leftrightarrow$ ».

Это определение нам понадобится при доказательстве законов логических операций над высказываниями.

Составное высказывание, истинное при любых значениях истинности входящих в него элементарных высказываний, называется **тавтологией**.

Для того чтобы определить значение истинности составного высказывания, необходимо знать смысл используемых логических связок, с помощью которых оно образовано из элементарных, и определение соответствующей логической операции, а также уметь выявлять логическую структуру (строение) высказывания.

Для выявления логической структуры составного высказывания нужно установить: 1) из каких элементарных высказываний образовано данное составное высказывание; 2) с помощью каких логических связок оно образовано.

Например.

1. Выявим логическую структуру высказывания «Если 36 делится на 4, то 36 делится на 2». Оно состоит из двух элементарных высказываний: высказывания «36 делится на 4» и высказывания «36 делится на 2». Соединены они в одно составное высказывание с помощью логической связки «если..., то...». Говорят, что данное составное высказывание имеет логическую структуру (форму): «если A , то B ».

2. Высказывание «48 не делится на 7». Оно состоит из элементарного высказывания «48 делится на 7», и имеет логическую структуру: «не A ».

Теперь для выявления значений истинности составных высказываний нужно изучить логические операции над высказываниями.

Над высказываниями выполняют логические операции *отрицания*, *конъюнкции*, *дизъюнкции*, *импликации* и *эквиваленции*.

2.2. Отрицание высказывания

В обыденной речи мы очень часто используем частицу «не» или слова «неверно, что», когда что-нибудь отрицаем. В математике также приходится строить предложения, в которых что-либо отрицается.

Например, говоря, что ΔABC является непрямоугольным, мы отрицаем, что ΔABC – прямоугольный. При этом, отрицая ложное высказывание, получаем истинное, а отрицая истинное высказывание, получаем ложное.

Пусть дано высказывание A . Определим *операцию отрицания высказывания*.

Отрицанием высказывания A называется высказывание, истинное тогда, когда данное высказывание A ложно, и ложное, когда данное высказывание A истинно.

Отрицание высказывания A обозначается: $\bar{A}$. Читаем: «не A » или «неверно, что A ». Для того чтобы сформулировать отрицание данного высказывания, нужно поставить частицу «не» перед сказуемым или слова «неверно, что» перед всем высказыванием.

Например. 1. A : « $3+4=7$ » – это истинное высказывание. Образует отрицание данного высказывания.

$\bar{A}$: « $3+4 \neq 7$ » (три плюс четыре не равно 7»), это будет ложное высказывание.

2. B : « $7 > 9$ » – это ложное высказывание.

$\bar{B}$: «Неверно, что $7 > 9$ » или «7 не больше 9». Слова «не больше» означают «меньше или равно», поэтому в символах $\bar{B}$ запишется: « $7 \leq 9$ », это высказывание истинное.

3. Пример «Не A » в работе с младшими школьниками. Наглядный материал изображён на рисунке 16. Задание: «Выбери лишний предмет, объясни, почему ты так думаешь».

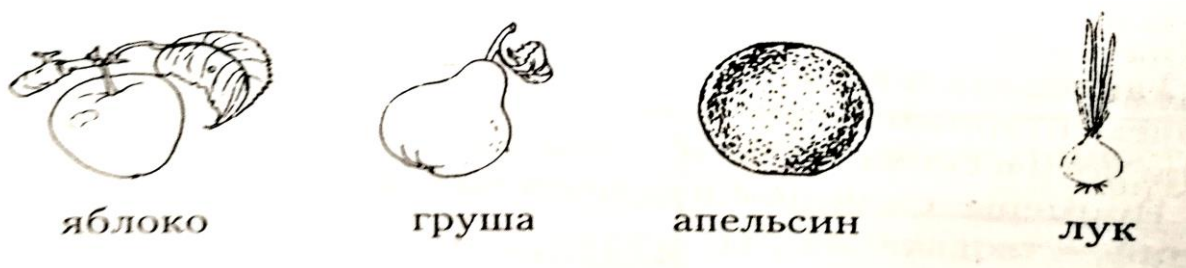


Рис. 16

Элементарное высказывание A : «предмет фрукт». Составное высказывание $\bar{A}$: «предмет не является фруктом».

Выбор ребенка	Значение истинности элементарного высказывания A	Оценка педагога
яблоко	и	«неправильно»
лук	л	«правильно»

Определение отрицания высказывания можно записать в так называемой *таблице истинности*.

Таблицей истинности называется таблица, в которой устанавливается значение истинности составного высказывания при различных комбинациях значений истинности входящих в него элементарных высказываний.

Таблица истинности отрицания высказывания имеет вид:

A	$\bar{A}$
и	л
л	и

Из определения отрицания следует, что высказывания A и B не могут быть отрицаниями друг друга, если они могут принимать одинаковые значения истинности.

2.3. Конъюнкция и дизъюнкция высказываний, законы этих операций

Рассмотрим *составное высказывание*, которое образуется из элементарных высказываний с помощью союза «и».

Союз «и» в русском языке имеет различные смысловые оттенки. Например, предложение «Кубик маленький и красный» будет истинным, если истинны оба составляющих предложения. А предложение «На этих местах сидят дети и инвалиды» истинно, если истинно хотя бы одно из составляющих предложений. В математической речи союз «и» употребляется только в первом смысле.

Пусть даны высказывания A и B .

Конъюнкцией высказываний A и B называется высказывание, которое истинно, когда оба данные высказывания A и B истинны одновременно, и ложно, когда хотя бы одно из этих высказываний ложно.

Конъюнкция высказываний A и B обозначается: $A \wedge B$ ($A \& B$, $A \cdot B$). Читаем: «Конъюнкция высказываний A и B » или « A и B ».

Название «конъюнкция» произошло от латинского слова «conjunctio», что означает «союз, связь или единение». Определение конъюнкции высказываний A и B можно записать в следующей таблице.

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Замечание. В этой таблице, кроме первой строки для обозначения высказываний, еще – 4 строки для комбинаций значений истинности высказываний A и B . Для подсчета числа комбинаций используется комбинаторная задача – размещение с повторениями, т.к. мы два значения истинности («и» или «л») распределяем на два высказывания.

Используя формулу для подсчета числа размещений с повторениями $\bar{A}_m^k = m^k$, получаем $\bar{A}_2^2 = 2^2 = 4$. Если данных высказываний будет 3, то комбинаций (строк) будет 8 по той же формуле $\bar{A}_2^3 = 2^3 = 8$. Для четырех данных высказываний число комбинаций значений истинности и, соответственно, число строк будет равно уже 16, т.к. $\bar{A}_2^4 = 2^4 = 16$.

Примеры. 1. Составное высказывание «Число 2 четное и простое» будет истинным, т.к. оно является конъюнкцией двух истинных высказываний «Число 2 четное» и «Число 2 простое».

2. Составное высказывание «Число 14 четное и простое» будет ложным, т.к. оно представляет собой конъюнкцию двух высказываний «Число 14 четное» и «Число 14 простое», из которых первое истинно, а второе ложно.

3. Составное высказывание « $8 < 5 < 4$ » будет также ложным, т.к. является конъюнкцией двух ложных высказываний « $8 < 5$ » и « $5 < 4$ ».

4. Пример «А и В» в работе с детьми. Наглядный материал изображён на рисунке 17.



Рис. 17

Задание ребёнку: «Возьми чёрный треугольник». Элементарные высказывания A : «фигура треугольной формы», B : «фигура чёрного цвета».

Выбор ребёнка	Значение истинности элементарных высказываний		Оценка педагога
	A	B	
	и	и	«правильно»
	и	л	«неправильно»
	л	и	«неправильно»
	л	л	«неправильно»

Замечание. В обыденной речи конъюнкция может выражаться не только с помощью союза «и», но и другими, например, «а», «но», «однако», «не только..., но и...».

Например, «Число 16 делится не только на 2, но и на 4».

Рассмотрим *составное высказывание*, которое образуется из элементарных высказываний с помощью союза «или».

Предложение «Идет дождь или светит солнце» будет истинным, если истинно хотя бы одно из составляющих предложений, причем не исключается возможность истинности обоих предложений. Именно в этом смысле понимается союз «или» и в математическом языке.

Пусть даны высказывания A и B .

Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание, которое истинно, когда хотя бы одно из данных высказываний A и B истинно, и ложно, когда оба высказывания ложны.

Дизъюнкция высказываний A и B обозначается: $A \vee B$. Читаем: «Дизъюнкция высказываний A и B » или « A или B ».

Название «дизъюнкция» произошло от латинского слова «disjunctio», что означает «разделение, разбиение».

Определение дизъюнкции высказываний A и B можно записать в следующей таблице.

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Примеры.

1. Составное высказывание «Число 14 четное или простое» будет истинным, т.к. оно представляет собой дизъюнкцию высказываний «Число 14 четное» и «Число 14 простое», где первое – истинно, а второе – ложно.

2. Составное высказывание «Число 36 делится на 6 или на 9» будет также истинным, т.к. оно является дизъюнкцией двух истинных высказываний «Число 36 делится на 6» и «Число 36 делится на 9».

3. Составное высказывание « $4 \geq 6$ » будет ложным, т.к. оно представляет собой дизъюнкцию двух ложных высказываний « $4 > 6$ » и « $4 = 6$ ».

4. Пример « A или B » в работе с учениками. Наглядный материал изображён на рисунке 18.

Задание ребёнку: «Возьми фигуру, похожую на яблоко по цвету или по форме».

Элементарные высказывания A : «форма как у яблока», B : «цвет как у яблока».

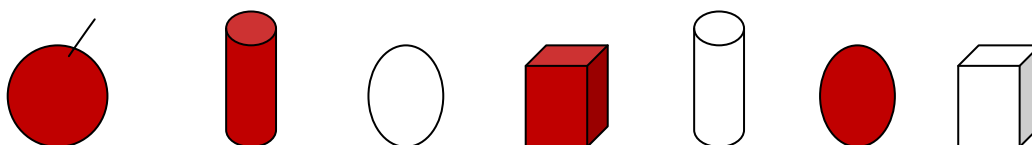


Рис. 18

Выбор ребёнка	Значение истинности высказываний		Оценка педагога
	A	B	
	и	и	«правильно»
	и	л	«правильно»
	л	и	«правильно»
	л	л	«неправильно»

Замечание. Определения конъюнкции и дизъюнкции двух высказываний можно обобщить на n составляющих их высказываний.

Конъюнкцией высказываний $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется высказывание, которое истинно, когда истинны все данные высказывания одновременно.

Дизъюнкцией высказываний $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется высказывание, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из данных высказываний.

Для операций конъюнкции и дизъюнкции высказываний выполняются одинаковые законы, поэтому рациональнее рассматривать их одновременно.

I. Закон коммутативности

а) конъюнкции высказываний: $(\forall A, B) (A \wedge B = B \wedge A)$,

б) дизъюнкции высказываний: $(\forall A, B) (A \vee B = B \vee A)$.

I а) читаем: «Для любых высказываний A и B конъюнкция высказываний A и B равносильна конъюнкции высказываний B и A ».

I б) читаем: «Для любых высказываний A и B дизъюнкция высказываний A и B равносильна дизъюнкции высказываний B и A ».

Название этого закона произошло от латинского слова «commutatio», что означает «перемена», поэтому закон иначе называется переместительным (от перемены мест высказываний конъюнкция или дизъюнкция не меняется).

II. Закон ассоциативности

а) конъюнкции высказываний: $(\forall A, B, C) [A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C]$,

б) дизъюнкции высказываний: $(\forall A, B, C) [A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C]$.

II а) читаем: «Для любых высказываний A, B и C конъюнкция высказывания A с конъюнкцией высказываний B и C равносильна конъюнкции высказывания C с конъюнкцией высказываний A и B ».

II б) читаем: «Для любых высказываний A, B и C дизъюнкция высказывания A с дизъюнкцией высказываний B и C равносильна дизъюнкции высказывания C с дизъюнкцией высказываний A и B ».

Название закона произошло от латинского слова «associatio», что означает «сочетание, соединение», поэтому он иначе называется сочетательным (от перемены мест скобок конъюнкция или дизъюнкция не меняется).

III. Закон дистрибутивности

а) конъюнкции относительно дизъюнкции:

$(\forall A, B, C) [A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$,

б) дизъюнкции относительно конъюнкции:

$(\forall A, B, C) [A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)]$.

Название закона произошло от латинского слова «distributio», что означает «распределение», поэтому иначе его называют распределительным законом.

III а) читаем: «Для любых высказываний A, B и C конъюнкция высказывания A с дизъюнкцией высказываний B и C равносильна дизъюнкции конъюнкции A и B с конъюнкцией высказываний A и C ».

III б) читаем: «Для любых высказываний A, B и C дизъюнкция высказывания A с конъюнкцией высказываний B и C равносильна конъюнкции дизъюнкции A и B с дизъюнкцией A и C ».

IV. Законы де Моргана

а) **отрицание конъюнкции:** $(\forall A, B) (\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B})$,

б) **отрицание дизъюнкции:** $(\forall A, B) (\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B})$.

Законы названы именем шотландского математика де Моргана (1806 -1871 гг.).

IV а) читаем: «Для любых высказываний A и B отрицание конъюнкции высказываний A и B равносильно дизъюнкции отрицаний высказываний A и B ».

IV б) читаем: «Для любых высказываний A и B отрицание дизъюнкции высказываний A и B равносильно конъюнкции отрицаний высказываний A и B ».

Рассмотрим применение этих законов на следующих примерах.

1. Даны высказывания A : « $5 > 3$ » и B : « $4 = 5$ », где A – «и», а B – «л». Образует конъюнкцию данных высказываний: $A \wedge B$: « $5 > 3$ и $4 = 5$ » – она ложна. Ее отрицание: $\overline{A \wedge B}$: «Неверно, что $5 > 3$ и $4 = 5$ ». Чтобы определить значение истинности этого составного высказывания, воспользуемся законом де Моргана $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$. Тогда имеем $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$: « $5 \leq 3$ или $4 \neq 5$ » или « $5 \leq 3$ или $4 \neq 5$ », это составное высказывание истинно, т.к. « $5 \leq 3$ » – л, а « $4 \neq 5$ » – и.

2. Из высказываний A : « $6 : 2$ » и B : « $4 < 8$ », из которых оба истинны, образуем дизъюнкцию $A \vee B$: « $6 : 2$ или $4 < 8$ » (она «и»), а теперь – её отрицание $\overline{A \vee B}$: «Неверно, что $6 : 2$ или $4 < 8$ ». Используя закон де Моргана $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$, получим $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$: « $6 \nmid 2$ и $4 \geq 8$ » или « 6 не кратно 2 и $4 \geq 8$ »; это составное высказывание ложно, т.к. оба составляющие высказывания « 6 не кратно 2 » и « $4 \geq 8$ » ложны.

V. а) **Закон противоречия:** $(\forall A) (A \wedge \overline{A} = \text{л})$.

б) **Закон исключения третьего:** $(\forall A) (A \vee \overline{A} = \text{и})$.

V а) читаем: «Для любого высказывания A конъюнкция высказывания A с его отрицанием есть ложное высказывание».

V б) читаем: «Для любого высказывания A дизъюнкция высказывания A с его отрицанием есть истинное высказывание».

VI. **Законы идемпотентности:** а) $(\forall A) (A \wedge A = A)$.

б) $(\forall A) (A \vee A = A)$.

VI а) читаем: «Для любого высказывания A конъюнкция высказывания A с самим собой есть высказывание A ».

VI б) читаем: «Для любого высказывания A дизъюнкция высказывания A с самим собой есть высказывание A ».

VII. **Законы поглощения:**

а) **конъюнкции относительно дизъюнкции:** $(\forall A, B) [A \wedge (A \vee B) = A]$,

б) **дизъюнкции относительно конъюнкции:** $(\forall A, B) [A \vee (A \wedge B) = A]$.

VII а) читаем: «Для любых высказываний A и B конъюнкция высказывания A с дизъюнкцией высказываний A и B равносильна высказыванию A ».

VII б) читаем: «Для любых высказываний A и B дизъюнкция высказывания A с конъюнкцией высказываний A и B равносильна высказыванию A ».

VIII. **Законы с константами:** $(\forall A) (A \wedge \text{и} = A)$, $(A \vee \text{и} = \text{и})$, $(A \wedge \text{л} = \text{л})$, $(A \vee \text{л} = A)$.

Замечание. В логике считается, что операция конъюнкции «сильнее» операции дизъюнкции, поэтому, если в составном высказывании есть знаки операций конъюнкции и дизъюнкции и нет скобок, то сначала выполняют конъюнкцию, а затем дизъюнкцию.

Например, порядок выполнения действий в составном высказывании $A \vee B \wedge C$ будет такой: сначала находят конъюнкцию высказываний B и C , а затем – дизъюнкцию высказывания A с полученным составным высказыванием $B \wedge C$.

Согласно этому замечанию, например, закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции (см. III а) можно записать: $(\forall A, B, C) [A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C]$.

2.4. Импликация высказываний

Рассмотрим *составное высказывание*, которое образуется из двух элементарных при помощи *логической связи* «если ..., то ...».

Например, пусть даны высказывания A : «Вчера было воскресенье» и B : «Я не был на работе». Тогда составное высказывание «Если вчера было воскресенье, то я не был на работе» имеет структуру «Если A , то B » и называется *импликацией*.

Пусть даны высказывания A и B .

Импликацией высказываний A и B называется высказывание, которое ложно, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно.

Импликация высказываний A и B обозначается: $A \Rightarrow B$. Читаем: «Импликация высказываний A и B » или «Если A , то B » (Иногда читают и по-другому: «Из A следует B », « B следует из A »).

Высказывание A , входящее в импликацию $A \Rightarrow B$, называют *условием импликации*, а высказывание B – ее *заключением*.

Название «импликация» произошло от латинского слова «implico», что значит «*тесно связываю*».

Определение импликации высказываний A и B дано в следующей таблице истинности.

A	B	$A \Rightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Примеры.

1. Составное высказывание «Если число 16 кратно 4, то 16 кратно 2» истинно, т.к. условие импликации «Число 16 кратно 4» истинно и заключение «Число 16 кратно 2» – истинно.

2. Составное высказывание «Если число 16 кратно 4, то 16 кратно 3» ложно, т.к. условие импликации «Число 16 кратно 4» истинно, а заключение «Число 16 кратно 3» – ложно.

3. Составное высказывание «Если число $2 \cdot 5 = 9$, то $2 > 9$ » истинно, т.к. условие и заключение импликации ложны.

4. Составное высказывание «Если вода в реке соленая, то $2 \cdot 2 = 4$ » – истинно, т.к. условие импликации «Вода в реке соленая» ложно, а заключение « $2 \cdot 2 = 4$ » – истинно.

Таким образом, из примеров видно, что употребление слов «если ..., то ...» в логике отличается от употребления их в обыденной речи, где мы, как правило, считаем, что если высказывание A ложно, то высказывание «Если A , то B » вообще не имеет смысла. Кроме того, строя предложения вида «Если A , то B » в обыденной речи, мы почти всегда подразумеваем, что предложение B следует из предложения A , а употребление слов «если ..., то ...» в логике не требует этого, поскольку, как уже отмечалось ранее, сам смысл высказываний в логике не рассматривается. Поэтому с точки зрения логики и допустимы такие, например, импликации: «Если вода в реке соленая, то $2 \cdot 2 = 4$ », где условие и заключение по смыслу никаким образом не связаны между собой, но по определению она, как мы выявили выше, истинна.

Операция импликации высказываний A и B может быть выражена через операции отрицания и дизъюнкции, т.е. имеет место следующий закон, называемый **законом исключения импликации**:

$$(\forall A, B)(A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B).$$

Читаем: «Для любых высказываний A и B импликация высказываний A и B равносильна дизъюнкции отрицания высказывания A и высказывания B ».

Важное значение в дальнейшем будет иметь ещё один закон, называемый **законом контрапозиции**: $(\forall A, B)(A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A})$.

Читаем: «Для любых высказываний A и B импликация высказываний A и B равносильна импликации отрицания высказывания B и отрицания высказывания A ».

Этот закон позволяет для любой импликации образовывать равносильную ей импликацию.

Например, для импликации «Если сумма цифр числа 111 делится на 3, то число 111 делится на 3» образуем импликацию «Если число 111 не делится на 3, то сумма цифр числа 111 не делится на 3», причем обе импликации будут равносильными, т.к. обе они истинны. Первая импликация истинна, т.к. у нее условие и заключение истинно; вторая же импликация истинна, т.к. у нее условие и заключение ложно, а в этом случае по определению импликация тоже истинна.

Для импликации высказываний $A \Rightarrow B$ необходимо уметь образовывать отрицание. По **закону** исключения импликации мы имеем, что $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$. Поэтому можно записать: $\overline{A \Rightarrow B} = \overline{\bar{A} \vee B}$. Используя закон де Моргана для отрицания дизъюнкции, получим: $\overline{A \Rightarrow B} = \overline{\bar{A}} \wedge \bar{B} = A \wedge \bar{B}$, т.к. $\overline{\bar{A}} = A$ по закону двойного отрицания. Значит, $\overline{A \Rightarrow B} = A \wedge \bar{B}$.

Таким образом, отрицание импликации высказываний A и B равносильно конъюнкции высказывания A и отрицания высказывания B .

2.5. Эквиваленция высказываний

Рассмотрим *составное высказывание*, которое образуется из двух элементарных при помощи *логической связи* «... тогда и только тогда, когда ...».

Например, пусть даны высказывания A : «Число 129 делится на 3» и B : «Сумма цифр числа 129 делится на 3». Тогда составное высказывание «Число 129 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа 129 делится на 3» имеет структуру « A тогда и только тогда, когда B » и называется *эквиваленцией*.

Пусть даны высказывания A и B .

Эквиваленцией высказываний A и B называется высказывание, которое истинно, когда оба высказывания A и B истинны или оба ложны одновременно.

Эквиваленция высказываний A и B обозначается: $A \Leftrightarrow B$. Читаем: «Эквиваленция высказываний A и B » или « A тогда и только тогда, когда B » (« A в том и только в том случае, если B »).

Определение эквиваленции высказываний A и B представим в таблице.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Примеры. 1. Составное высказывание «Число 18 четно тогда и только тогда, когда $18:2$ » истинно, т.к. оба элементарные высказывания «Число 18 четно» и « $18:2$ » истинны.

2. Составное высказывание «Число 195 делится на 3 тогда и только тогда, когда 195 делится на 9» будет ложным, т.к. оно представляет собой эквиваленцию истинного высказывания «Число 195 делится на 3» и ложного высказывания «Число 195 делится на 9».

3. Составное высказывание «Число 12 простое в том случае, если 12 двузначное число» ложно, т.к. представляет собой эквиваленцию ложного высказывания «Число 12 простое» и истинного высказывания «12 двузначное число».

4. Составное высказывание « $12 > 15$ тогда и только тогда, когда $15 < 12$ » истинно, т.к. оба составляющие высказывания « $12 > 15$ » и « $15 < 12$ » ложны.

Для эквиваленции высказываний A и B выполняется **закон исключения эквиваленции**: $(\forall A, B) [A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$.

Читаем: «Для любых высказываний A и B эквиваленция высказываний A и B равносильна конъюнкции импликации высказываний A и B и импликации высказываний B и A ».

Замечание. В математической логике считают, что: 1) операция конъюнкции «сильнее», чем операции дизъюнкции, импликации и эквиваленции; 2) операция дизъюнкции «сильнее», чем импликация и эквиваленция; 3) операция импликации «сильнее», чем эквиваленция.

Например, определим порядок действий в составных высказываниях:

а) $A \Rightarrow B \vee C$; б) $A \vee B \wedge C \Rightarrow D$; в) $A \Leftrightarrow B \vee C$; г) $A \Leftrightarrow B \Rightarrow C$.

а) Для высказывания $A \Rightarrow B \vee C$ порядок такой: 1) $B \vee C$; 2) $A \Rightarrow B \vee C$.

б) Для высказывания $A \vee B \wedge C \Rightarrow D$ порядок будет следующий: 1) $B \wedge C$; 2) $A \vee B \wedge C$; 3) $A \vee B \wedge C \Rightarrow D$.

в) В высказывании $A \Rightarrow B \vee C$ выполняем: 1) $B \vee C$; 2) $A \Rightarrow B \vee C$.

г) В высказывании $A \Leftrightarrow B \Rightarrow C$ выполняем: 1) $B \Rightarrow C$; 2) $A \Leftrightarrow B \Rightarrow C$.

Задания для самоконтроля

Изучив тему «Высказывания и операции над ними», студент должен *уметь*:

- выявлять логическую структуру высказываний;
- находить значения истинности составных высказываний;
- выполнять логические операции над высказываниями;
- строить отрицание высказываний различной структуры;
- использовать определения понятий при решении задач на распознавание;
- распознавать в начальном курсе математики высказывания и грамотно формулировать математические правила.

Проверить сформированность названных умений можно, выполнив *следующие задания*.

1. Среди следующих предложений укажите высказывания и определите их значения истинности:

- а) При делении числа 37 на 5 получается остаток 3; д) $(17+18):5=7$;

- б) Марс – планета Солнечной системы; е) $x+5=28$;
 в) Существует такое число x , что $x+5=28$; ж) $17+1<10$;
 г) Число 0, 00000001 больше 0; з) $3x+5<8$.

2. Определите значения истинности следующих высказываний:

- а) $-3,895 < -3,744$; г) $6^3 \neq 216$;
 б) $0 : 15 = 0$; д) $9 \in \mathbb{Q}$;
 в) $(13 - 2 \cdot 7) \cdot 4 = -4$; е) $5^2 < 2^5$.

3. Проверьте, истинны ли следующие высказывания: а) все треугольники равны между собой; б) есть наименьшее натуральное число; в) среди четырехугольников есть такие, у которых все стороны равны; г) все четырехугольники с равными диагоналями являются прямоугольниками; д) любой параллелограмм имеет центр симметрии; е) существует такое натуральное число x , что $7 < x < 9$.

4. Даны высказывания A : «Сегодня ясно» и B : «Сегодня мы пойдем кататься на лыжах». Сформулируйте следующие составные высказывания: а) $A \wedge B$; б) $A \vee B$; в) $A \Rightarrow B$; г) $B \Leftrightarrow A$; д) $\bar{A} \Rightarrow B$; е) $A \vee \bar{B}$; ж) $\bar{A} \wedge B$; з) $A \Rightarrow \bar{B}$.

5. Пользуясь высказываниями A : «Сегодня ясно», B : «Сегодня идет дождь», C : «Сегодня идет снег», D : «Вчера было пасмурно», E : «Я пойду в гости», сформулируйте словесно следующие высказывания:

- а) $A \Rightarrow D$; б) $B \vee C$; в) $A \Rightarrow \bar{B} \wedge \bar{C}$; г) $D \wedge (A \vee B)$; д) $B \wedge \bar{A} \Rightarrow E$; е) $A \wedge \bar{B}$; ж) $E \Leftrightarrow A \wedge C$;
 з) $D \Rightarrow A \wedge B$; и) $\bar{E} \Rightarrow B \vee C$.

6. Сформулируйте словесно высказывания:

- а) $\bar{A} \vee B \Rightarrow C$, $\bar{C} \Rightarrow A \wedge B$, где A : «Лето жаркое», B : «Лето дождливое», C : «Я поеду на юг»;
 б) $A \wedge B \Rightarrow C$, $\bar{A} \vee \bar{B} \Rightarrow \bar{C}$, где A : «Фигура – ромб», B : «Фигура – прямоугольник», C : «Фигура – параллелограмм»;
 в) $A \vee B \Rightarrow C$, $C \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$, где A : «Я ем», B : «Я работаю», C : «Я сплю»;
 г) $A \wedge B \Leftrightarrow C$, $\bar{A} \vee \bar{B} \Rightarrow C$, где A : «Число четно», B : «Число кратно 7», C : «Число кратно 14».

7. Из элементарных высказываний A : «Завтра будет дождь», B : «Мы пойдем в театр», C : «Завтра будет солнечно» и D : «Завтра занятия начнутся раньше обычного» образованы следующие составные высказывания:

- а) Если завтра будет дождь, то занятия начнутся раньше обычного и мы пойдем в театр.
 б) Завтра будет солнечно или будет дождь и занятия не начнутся раньше обычного.
 в) Завтра занятия начнутся раньше обычного и мы пойдем в театр в том и только том случае, если не будет дождя и будет солнечно.

Запишите составные высказывания, используя символы логики высказываний.

8. Запишите следующие высказывания в символах и определите их значения истинности; выделите элементарные высказывания и логические связи:

- а) Неверно, что число 17 делится на 3.
 б) Число 13 простое и не делится на 2.
 в) $\sqrt{4}=2$ или $\sqrt{4}=-2$.
 г) Если число 198 делится на 2, то оно четное.
 д) Число 144 четное или нечетное.
 е) Число 153 делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 9.
 з) Число 17 больше 15 и меньше 20.
 и) Число 10 не больше 15.
 к) Число 12 делится на 3 и на 4.
 л) При делении 48 на 5 в остатке получается 3 или 8.
 м) Корнем уравнения $(x-3)(x-8)=0$ является число 3 или 8.

9. Приведите примеры составных высказываний, имеющих логическую структуру вида:

- а) $A \wedge B$; б) $\bar{A}$; в) $A \vee B$; г) $A \Rightarrow B$; д) $A \Leftrightarrow B$.

10. Пусть X – множество нечетных натуральных чисел, Y – множество натуральных чисел, меньших 30. Установите, какие из следующих высказываний истинны:

- а) $8 \in X$ и $8 \in Y$; г) $35 \in X$ или $35 \in Y$;
 б) $8 \in X$ или $8 \in Y$; д) $35 \in X$ и $35 \notin Y$;
 в) $35 \in X$ и $35 \in Y$; е) $35 \in X$ или $35 \notin Y$.

11. Сформулируйте отрицания следующих высказываний, определите значения истинности данных высказываний и их отрицаний:

а) 253 – четное число; б) число 2 рационально; в) число 5 натуральное и действительное; г) 3 плюс 6 равно 8; д) $3 \leq 10$; е) если $9 > 6$, то $6 < 9$.

12. Для следующих высказываний сформулируйте отрицание, а затем – двойное отрицание. Убедитесь, что двойное отрицание равносильно исходному высказыванию A : «15 кратно 3»; B : « $4=5$ »; C : «Значение выражения $20-(4-2 \cdot 2)$ не существует».

13. Составьте таблицы истинности для следующих составных высказываний:

а) $\bar{A} \Rightarrow A \vee \bar{A}$; б) $\bar{A} \wedge B$; в) $A \Rightarrow (A \vee \bar{C})$; г) $(\bar{A} \Rightarrow B) \Rightarrow C$; д) $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$; е) $A \wedge B \wedge C \Rightarrow B \vee C$; ж) $A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B$; з) $A \wedge B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B$.

14. Проверьте, являются ли следующие составные высказывания тавтологиями:

а) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Leftrightarrow A$; б) $A \vee A \Leftrightarrow A$; в) $A \wedge A \Leftrightarrow A$; г) $A \wedge \bar{A}$; д) $(\bar{A} \wedge A) \Rightarrow A$; е) $\bar{A} \Rightarrow (A \Rightarrow B)$; ж) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$; з) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Проектная задача. «Высказывания в начальном курсе математики».

1. Приведите примеры высказываний из разных учебников математики для начальной школы.

2. Как устанавливают значение истинности таких высказываний в начальном курсе математики?

3. Почему необходимо формировать у младших школьников умения выявлять истинностное значение высказывания на основе анализа логической структуры?

ГЛАВА 3. ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ (ПРЕДИКАТЫ) И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

3.1. Понятие высказывательной формы (предиката). Структура высказываний с кванторами

Рассмотрим пример. Предложение «Число x – двузначное» не является высказыванием, т.к. относительно него нельзя определить: истинно это предложение или ложно. Однако при подстановке конкретных значений вместо переменной оно обращается в истинное или ложное высказывание. Например, при $x=7$ мы получим ложное высказывание «Число 7 – двузначное», а при $x=27$ – истинное высказывание «Число 27 – двузначное». Такое предложение в математике называют *предикатом* или *высказывательной формой*.

Предложение, содержащее переменную, которая может принимать различные значения, причем подстановка любого из значений переменной превращает это предложение в высказывание, называется *предикатом* или *высказывательной формой*.

Каждая высказывательная форма порождает множество высказываний.

Например, при подстановке различных значений вместо переменной в высказывательную форму « $x+3=8$ » будем получать однотипные высказывания: $2+3=8$, $7+3=8$, $5+3=8$ и др.

По числу переменных, входящих в высказывательную форму (предикат), их делят на одноместные, двухместные и т.д. и соответственно обозначают: $A(x)$, $B(x; y)$ и т.д.

Например, предложения «Число x – двузначное» и « $x+3=8$ » являются высказывательными формами с одной переменной (одноместными предикатами), а предложения « $x>y$ » и « $x+y=10$ » – высказывательными формами с двумя переменными (двухместными предикатами).

Следует иметь в виду, что в высказывательной форме переменные могут содержаться неявно.

Например, в предложениях: «Число четное», «Две прямые пересекаются», «Четырехугольник является ромбом» переменных нет, но они подразумеваются: «Число x – четное», «Две прямые x и y пересекаются», «Четырехугольник x является ромбом».

Для каждой высказывательной формы нужно указать множество значений, которые может принимать переменная (переменные), входящая в эту высказывательную форму.

Множество значений, которые может принимать переменная (переменные) высказывательной формы (предиката), называется *областью определения высказывательной формы* (предиката).

Область определения высказывательной формы будем обозначать через X и предикаты будем записывать с указанием области определения: $A(x)$, $x \in X$; $B(x; y)$, $x, y \in X$ и т.д. Запись **$A(x)$** , $x \in X$, читают: «Высказывательная форма (предикат) $A(x)$ задана на множестве X ».

Например. 1. $A(x)$: «Слово x – глагол», его областью определения будет множество слов русского языка.

2. $B(x)$: « $x+7=12$ », $X=R$.

3. $C(x)$: «Четырехугольник x – квадрат», X – множество четырехугольников.

4. $D(x; y)$: « $x+y=5$ », $X=R$ или $X=N$.

Среди всех возможных значений переменной из области определения выделяют те, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание.

Множество тех значений переменной из области определения высказывательной формы (предиката), при подстановке которых получаем истинные высказывания, называется *множеством истинности высказывательной формы* (предиката).

Множество истинности высказывательной формы (предиката) будем обозначать буквой T . Тогда, согласно определению, $T \subset X$ (множество T является подмножеством множества X).

Примеры.

1. $A(x)$: «Слово x – глагол», его множеством истинности является множество глаголов русского языка.

2. $B(x)$: « $x+7=12$ », $T=\{5\}$.

3. $C(x)$: «Четырехугольник x – квадрат», T – множество квадратов.

4. $D(x; y)$: « $x+y=5$ ». Множество истинности этого предиката может быть различным в зависимости от области определения. Если $X=R$ или $X=Z$, то T – множество пар чисел, сумма которых равна 5, причем это множество будет бесконечным. Если $X=N$, то $T=\{(1;4), (2;3), (4;1), (3;2)\}$.

5. $Q(x)$: « $x<5$ », где $x \in N$, тогда $T=\{1;2;3;4\}$.

Высказывательную форму, заданную на конечном множестве, можно задать таблицей, в первой строке которой указываются элементы области определения, а во второй – истинно или ложно высказывание, получаемое из высказывательной формы при подстановке этих элементов вместо переменной.

Например, пусть высказывательная форма $A(x)$: «Число x – четно» задана на множестве $X=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Так как высказывание «Число 1 – четно» ложно, то числу 1 будет соответствовать значение высказывательной формы «л» (ложь). Числу 2 соответствует истинное высказывание «Число 2 – четно». Получаем следующую таблицу.

x	1	2	3	4	5	6
$A(x)$	л	и	л	и	л	и

Таким образом, высказывательная форма обращается в высказывание при подстановке конкретных значений из области определения вместо каждой переменной, входящей в форму. Но высказывательную форму можно превратить в высказывание и другим способом.

Рассмотрим пример. Пусть на множестве N задана высказывательная форма $A(x)$: «Число x кратно 3». Поставим перед высказывательной формой слово «всякое». Получим ложное высказывание: «Всякое число x кратно 3» ($x \in N$). Поставив перед данной высказывательной формой слово «существует», получим истинное высказывание: «Существует число x , кратное 3» ($x \in N$).

Итак, высказывательную форму (предикат) можно превратить в высказывание, поставив перед формой особые слова, которые называются логике *кванторами*.

Слово «квантор» произошло от латинского «quantum», что означает «сколько».

Квантором называют символ математической логики, указывающий на определенную логическую операцию, которую необходимо осуществить, чтобы дать количественную характеристику некоторой области объектов.

Таким образом, квантор показывает, о скольких объектах (элементах) говорится в том или ином высказывании.

Различают два основных вида кванторов: *квантор общности* и *квантор существования*. Под квантором общности понимаются слова: «любой», «каждый», «всякий», «все», а под квантором существования подразумеваются слова и обороты: «существует», «найдется хотя бы один», «есть», «имеется».

Пусть $P(x)$ – высказывательная форма (предикат), заданная на множестве X . Поставив перед ней квантор общности, получим высказывание: «Для всех $x \in X$ выполняется высказывательная форма $P(x)$ », которое записывается в символах:

$$(\forall x \in X) P(x).$$

Символ $\forall$ – это перевернутая первая буква английского слова «All» – «все».

Высказывание, содержащее квантор общности, *истинно* в том и только в том случае, если для всех элементов x из множества X выполняется высказывательная форма $P(x)$; если же хотя бы для одного элемента x из множества X высказывательная форма $P(x)$ не выполняется, то высказывание с квантором общности будет *ложно*.

Истинность высказываний с квантором общности устанавливается путем доказательства. Чтобы убедиться в ложности достаточно привести контрпример.

Например, наглядный материал изображён на рисунке 19. Задание: «назови одним словом».

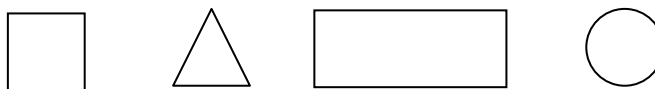


Рис. 19

Вариант ответа	Математическое предложение	Установка истинности
«Фигуры»	«Все предметы являются фигурами»	«и», т.к. квадрат – фигура, треугольник – фигура, прямоугольник – фигура, круг – фигура. (доказательство)
«Многоугольники»	«Все предметы являются многоугольниками»	«л», т.к. круг не является многоугольником (контрпример)

Если перед высказывательной формой $P(x)$, $x \in X$, поставить квантор существования, то получим высказывание: «Существует такое $x \in X$, что выполняется высказывательная форма $P(x)$ ». В символах оно записывается:

$$(\exists x \in X) P(x).$$

Символ $\exists$ – это перевернутая справа налево первая буква английского слова «Exist» – «существует».

Высказывание, содержащее квантор существования, *истинно* в том и только том случае, если *хотя бы для одного элемента* x из множества X выполняется высказывательная форма $P(x)$; если же *ни для одного элемента* x из множества X высказывательная форма $P(x)$ *не выполняется*, то высказывание с квантором существования *ложно*.

Истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи конкретного примера. Чтобы убедиться в ложности, необходимо провести доказательство.

Например.

1. Наглядный материал: Игрушки в коробке. Вопрос ребёнку: «есть ли в коробке мячи?»

Математическое предложение: «хотя бы один из предметов – мяч».

Вариант ответа	Установление значения истинности
Да	Показ хотя бы одного мяча (конкретный пример).
нет	Просмотр каждой игрушки (доказательство).

2. Рассмотрим числа: 1, 2, 3, 4, 5. Про них можно сказать: «Все числа однозначные. Некоторые из данных чисел чётные».

3. Пусть на множестве N натуральных чисел задана высказывательная форма $P(x)$: «число x больше 5». Используя кванторы, из высказывательной формы можно получить, например, следующие высказывания: «любое натуральное число x больше 5»; «каждое натуральное число x больше 5»; «существует натуральное число x , большее 5»; «найдется натуральное число x , большее 5».

Первые два высказывания имеют одинаковый смысл, они ложны, и в символах запишутся: $(\forall x \in N) P(x)$. Последние два высказывания истинны и имеют запись: $(\exists x \in N) P(x)$.

Операция получения высказываний из высказывательных форм (предикатов) с помощью кванторов называется **операцией навешивания кванторов**.

Итак, если задана одноместная высказывательная форма $P(x)$, заданная на множестве X , то чтобы превратить ее в высказывание, нужно связать квантором общности или существования содержащуюся в ней переменную. Если высказывательная форма содержит несколько переменных, то перевести ее в высказывание можно, связав квантором каждую переменную.

Например, если дана высказывательная форма $P(x; y)$: « $x+y=5$ », $x, y \in N$, то для получения высказывания надо связать кванторами каждую переменную: 1) $(\forall x \in N) (\exists y \in N) (x+y=5)$; 2) $(\forall x, y \in N) (x+y=5)$; 3) $(\exists x, y \in N) (x+y=5)$.

Из полученных высказываний первое и третье будут истинны, а второе – ложно.

Однако важно уметь не только переходить от высказывательных форм (предикатов) к высказываниям с кванторами, но и распознавать высказывания, содержащие кванторы, и выявлять их логическую структуру. Дело в том, что в формулировках определений, теорем и других математических предложений кванторы только подразумеваются, а явно не используются.

Например, в формулировке теоремы «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» квантора в явном виде нет, но предполагается, что данное утверждение верно для всех ромбов.

Пример. Выявить логическую структуру следующих высказываний:

1. Некоторые натуральные числа делятся на 3.
2. Произведение двух последовательных натуральных чисел кратно 2.
3. В прямоугольнике диагонали равны.

Решение:

1. В этом предложении имеется квантор существования, выраженный словом «некоторые» и высказывательная форма «числа делятся на 3», заданная на множестве N натуральных чисел. Обозначив эту форму символом $A(x)$, получим логическую структуру данного предложения: $(\exists x \in N) A(x)$. Если $A(x)$ записать, используя символ: « $x:3$ », то исходное высказывание можно представить в виде: $(\exists x \in N) (x:3)$.

2. В данном высказывании подразумевается квантор общности и имеется высказывательная форма «произведение двух последовательных чисел кратно 2», заданная на множестве N натуральных чисел. Обозначим ее $A(x)$, тогда логическая структура данного высказывания такова: $(\forall x \in N) A(x)$. Если последовательные числа обозначить через x и $x+1$, то искомое высказывание можно представить в виде: $(\forall x \in N) x(x+1):2$.

3. В данном высказывании квантора в явном виде нет, но он подразумевается, т.к. свойством «иметь равные диагонали» обладают *любые* прямоугольники, поэтому, этот квантор общности можно включить в высказывание, не изменив его сути: «В любом прямоугольнике диагонали равны». Тогда

его структура такова: $(\forall x \in X) A(x)$, где X – множество прямоугольников, $A(x)$ – высказывательная форма «в прямоугольнике x диагонали равны».

3.2. Отрицание высказывательной формы (предиката). Множество истинности отрицания

Высказывательные формы (предикаты), так же как и высказывания, бывают *элементарными* и *составными*. Составные высказывательные формы образуются из элементарных при помощи тех же логических связок, которые используются в составных высказываниях.

Пусть на множестве X задана высказывательная форма $A(x)$.

Отрицанием высказывательной формы (предиката) $A(x)$, заданной на множестве X , называется высказывательная форма $\overline{A(x)}$, заданная на том же множестве, которая истинна при тех значениях $x \in X$, при которых данная форма $A(x)$ ложна, и, наоборот, ложна при тех значениях $x \in X$, при которых данная форма $A(x)$ истинна.

Обозначение $\overline{A(x)}$ читаем: «Неверно, что A от x » или «Не A от x ».

Например, пусть дана высказывательная форма $A(x)$: « $x:3$ », где $x \in X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Найдем ее множество истинности: $T_A = \{3; 6\}$. Сформулируем отрицание данной формы $\overline{A(x)}$: «Неверно, что $x:3$ » или, иначе, $\overline{A(x)}$: « x не делится на 3». Множеством истинности $\overline{A(x)}$ является множество $T_{\overline{A}} = \{1; 2; 4; 5; 7\}$. Не трудно заметить, что это множество является дополнением к множеству T_A до множества X , т.е. эти множества изображаются на диаграмме Эйлера-Венна следующим образом (рис. 20).

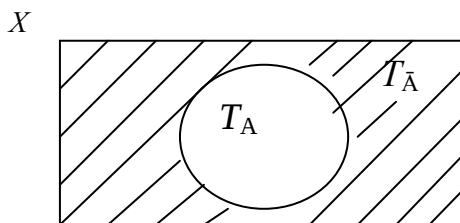


Рис. 20

Таким образом, сформулируем *правило нахождения множества истинности отрицания высказывательной формы $\overline{A(x)}$* , если известно множество истинности данной формы $A(x)$.

Если T_A – множество истинности высказывательной формы $A(x)$, $x \in X$, то множеством истинности $\overline{A(x)}$ – высказывательной формы $\overline{A(x)}$, $x \in X$, является дополнение к множеству T_A до области определения X , т.е.

$$T_{\overline{A}} = T_A'.$$

Этот вывод дает возможность находить множество истинности отрицания высказывательной формы по множеству истинности данной высказывательной формы.

Например, дана форма $A(x)$: « $x < 5$ », $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, ее множество истинности $T_A = \{1; 2; 3; 4\}$, тогда множеством истинности $\overline{A(x)}$ будет $T_{\overline{A}} = \{5; 6; 7; 8; 9\}$. Мы нашли это множество $T_{\overline{A}}$, хотя и не сформулировали саму высказывательную форму $\overline{A(x)}$. Теперь для проверки сформулируем отрицание данной высказывательной формы и найдем ее множество истинности. Отрицанием будем высказывательная форма $\overline{A(x)}$: «Неверно, что $x < 5$ » или, что то же самое, $\overline{A(x)}$: « $x \geq 5$ », ее множество истинности $T_{\overline{A}} = T_A' = \{5; 6; 7; 8; 9\}$.

Теперь выясним, как нужно образовывать отрицание высказываний, содержащих кванторы. Достаточно ли для отрицания таких предложений использовать частицу «не» или слово «неверно»?

Например.

1. Для высказывания: «Всякий прямоугольный треугольник является равнобедренным» будет ли отрицанием высказывание «Всякий прямоугольный треугольник не является равнобедренным»? Очевидно, что не будет, т.к. оба высказывания ложны. Таким образом, строить отрицание высказываний с кванторами при помощи частицы «не» перед сказуемым нельзя.

2. Используем другой путь – перед всем высказыванием поставим слова «неверно, что». Тогда отрицанием высказывания «Всякий прямоугольный треугольник является равнобедренным» является высказывание «Неверно, что всякий прямоугольный треугольник является равнобедренным» или, иначе, высказывание того же смысла «Некоторые прямоугольные треугольники не являются

равнобедренными». Как видно, квантор общности меняется на квантор существования и высказывательная форма заменяется отрицанием.

Таким образом, для построения отрицания высказывания с кванторами нужно:

1) квантор общности заменить на квантор существования или, наоборот, квантор существования заменить на квантор общности;

2) для высказывательной формы (предиката) сформулировать отрицание.

В символах это правило можно записать:

$$\overline{(\forall x \in X) A(x)} = (\exists x \in X) \overline{A(x)};$$

$$\overline{(\exists x \in X) A(x)} = (\forall x \in X) \overline{A(x)}.$$

Если задана словесная формулировка высказывания с кванторами, то нужно: 1) слово «всякий» («каждый», «любой», «все») заменить на слово «существует» («есть», «имеется», «найдется», «некоторый», «хотя бы один») и наоборот; 2) поставить частицу «не» перед сказуемым в высказывательной форме.

Например.

1. Дано высказывание: $(\exists x \in \mathbb{Z})(x+5=8)$, оно истинно. Образует его отрицание: $(\forall x \in \mathbb{Z})(x+5 \neq 8)$ – это высказывание ложно.

2. Для ложного высказывания $(\forall x \in \mathbb{R})(x < 10)$ отрицанием будет: $(\exists x \in \mathbb{R})(x \geq 10)$ – это высказывание истинно.

3. Дано высказывание: «Любое дерево есть растение», оно истинно. Его отрицание: «Некоторые деревья не являются растениями» – ложно.

4. Дано высказывание: «Некоторые треугольники являются равнобедренными», оно истинно. Его отрицание: «Любой треугольник является равнобедренным» – ложно.

3.3. Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм, их множества истинности

В математике рассматривают не только конъюнкцию и дизъюнкцию высказываний, но и выполняют соответствующие операции над высказывательными формами (предикатами).

Пусть на множестве X заданы две высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$.

Конъюнкцией высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X , называется высказывательная форма $A(x) \wedge B(x)$, заданная на том же множестве X , истинная при тех значениях $x \in X$, при которых обе формы $A(x)$ и $B(x)$ истинны одновременно.

Обозначение $A(x) \wedge B(x)$, читаем: «Конъюнкция $A(x)$ и $B(x)$ » или « $A(x)$ и $B(x)$ », т.е. так же, как и конъюнкция высказываний, конъюнкция высказывательных форм образуется с помощью союза «и».

Например, конъюнкцией высказывательных форм $A(x)$: « $x > 2$ » и $B(x)$: « $x < 5$ », $x \in \mathbb{N}$, является высказывательная форма $A(x) \wedge B(x)$: « $x > 2$ и $x < 5$ », $x \in \mathbb{N}$, которую можно записать иначе: « $2 < x < 5$ », $x \in \mathbb{N}$.

Таким образом, двойное неравенство $a < x < b$ является конъюнкцией двух неравенств $x > a$ и $x < b$.

Установим правило, которое позволит найти множество истинности конъюнкции высказывательных форм (предикатов), если известны множества истинности составляющих форм.

Рассмотрим пример. Пусть на множестве $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ даны высказывательные формы $A(x)$: « $x > 2$ » и $B(x)$: « $x < 3$ ». Обозначим T_A и T_B соответственно множества истинности высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$. Найдем T_A и T_B : $T_A = \{2; 4; 6; 8\}$, $T_B = \{3; 6\}$. Теперь сформулируем конъюнкцию данных высказывательных форм: $A(x) \wedge B(x)$: « $x > 2$ и $x < 3$ », ее множеством истинности будет множество $T = \{6\}$. Очевидно, что множество T является пересечением множеств T_A и T_B : $T = T_A \cap T_B$ или $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$, где $T_{A \wedge B}$ – множество истинности $A(x) \wedge B(x)$. Множества истинности данных высказывательных форм и их конъюнкцию можно изобразить на диаграмме Эйлера-Венна (рис. 21).

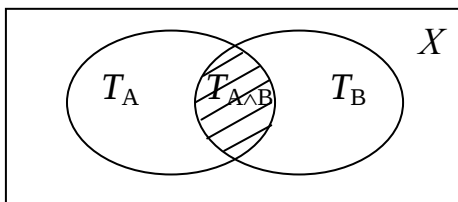


Рис. 21

Таким образом, теперь можно сформулировать *правило нахождения множества истинности конъюнкции высказывательных форм* $A(x) \wedge B(x)$, $x \in X$, если известны множества истинности составляющих высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X .

Если T_A – множество истинности высказывательной формы (предиката) $A(x)$, $x \in X$, а T_B – множество истинности высказывательной формы $B(x)$, $x \in X$, то множеством истинности $T_{A \wedge B}$ высказывательной формы $A(x) \wedge B(x)$, $x \in X$, является пересечение множеств истинности данных высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, т.е. $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$.

Теперь рассмотрим понятие *дизъюнкции высказывательных форм* (предикатов).

Пусть на множестве X заданы высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$.

Дизъюнкцией высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X , называется высказывательная форма $A(x) \vee B(x)$, заданная на том же множестве, истинная при тех значениях $x \in X$, при которых истинна хотя бы одна из высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$.

Обозначение $A(x) \vee B(x)$, читаем: «Дизъюнкция $A(x)$ и $B(x)$ » или « $A(x)$ или $B(x)$ », т.е. по аналогии с дизъюнкцией высказываний дизъюнкция высказывательных форм образуется с помощью союза «или».

Например, дизъюнкцией высказывательных форм $A(x)$: « $x > 5$ » и $B(x)$: « $x = 5$ », $x \in N$, является высказывательная форма $A(x) \vee B(x)$: « $x > 5$ или $x = 5$ », $x \in N$, которую можно записать короче: « $x \geq 5$ », $x \in N$.

Таким образом, *нестрогое неравенство вида $x \geq a$ ($x \leq a$) является дизъюнкцией неравенства $x > a$ ($x < a$) и равенства $x = a$.*

Выведем правило, позволяющее найти множество истинности дизъюнкции высказывательных форм, если известны множества истинности составляющих форм.

Рассмотрим пример. Пусть на множестве $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ даны высказывательные формы $A(x)$: « $x : 2$ » и $B(x)$: « $x : 3$ ». Их множества истинности обозначим соответственно через T_A и T_B ; тогда $T_A = \{2; 4; 6; 8\}$, $T_B = \{3; 6\}$. Сформулируем дизъюнкцию данных высказывательных форм: $A(x) \vee B(x)$: « $x : 2$ или $x : 3$ », ее множество истинности обозначим $T_{A \vee B}$, тогда $T_{A \vee B} = \{2; 3; 4; 6; 8\}$. Нетрудно увидеть, что множество $T_{A \vee B}$ является объединением множеств T_A и T_B : $T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$. Изобразим для наглядности множества истинности данных высказывательных форм и множество истинности дизъюнкции этих форм на диаграмме Эйлера-Венна (рис. 22), где $T_{A \vee B}$ – вся заштрихованная область.

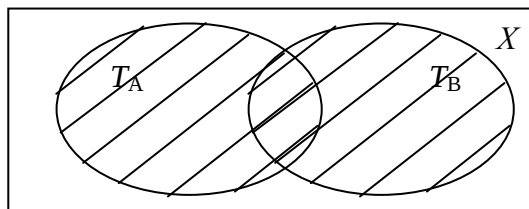


Рис. 22

Теперь сформулируем *правило нахождения множества истинности дизъюнкции высказывательных форм* $A(x) \vee B(x)$, $x \in X$, если известны множества истинности составляющих высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X .

Если T_A – множество истинности высказывательной формы $A(x)$, $x \in X$, а T_B – множество истинности высказывательной формы $B(x)$, $x \in X$, то множеством истинности $T_{A \vee B}$ высказывательной формы $A(x) \vee B(x)$, $x \in X$, является объединение множеств истинности данных высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, т.е. $T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$.

Вясним, как строить отрицание конъюнкции и дизъюнкции высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X . Используя законы де Моргана, рассмотренные и доказанные в пункте 2.3 настоящего пособия, а именно: $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$, $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$, сформулируем *правило построения отрицания конъюнкции $A(x) \wedge B(x)$ и дизъюнкции $A(x) \vee B(x)$ высказывательных форм*, заданных на множестве X .

Чтобы построить отрицание конъюнкции $A(x) \wedge B(x)$ (дизъюнкции $A(x) \vee B(x)$) высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X , нужно заменить отрицаниями составляющие ее высказывательные формы, а союз «и» («или») заменить союзом «или» («и»), т.е. операцию конъюнкции (дизъюнкции) заменить операцией дизъюнкции (конъюнкции).

Рассмотрим примеры образования отрицаний конъюнкции и дизъюнкции высказывательных форм.

1. Дана конъюнкция $A(x) \wedge B(x)$: « $x:3$ и $x>5$ », $x \in N$. образуем ее отрицание: «Неверно, что $x:3$ и $x>5$ » или, используя сформулированное выше правило, получим: « x не делится на 3 или $x \leq 5$ ». Для множеств истинности T_A и T_B высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X , при этом будет выполняться равенство:

$$T_{A \wedge B} = T_A \cup T_B,$$

т.е. дополнение множества истинности конъюнкции высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$ равно объединению дополнений к множествам истинности каждой высказывательной формы.

2. Для дизъюнкции $A(x) \vee B(x)$: « $x < 2$ или x – простое число», $x \in N$, образуем отрицание: «Неверно, что $x < 2$ или x – простое число» или, иначе, « $x \geq 2$ и x – не простое число». Для множеств истинности T_A и T_B высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X , будет выполняться равенство:

$$T_{A \vee B} = T_A \cap T_B,$$

т.е. дополнение множества истинности дизъюнкции высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$ равно пересечению дополнений к множествам истинности каждой высказывательной формы.

3.4. Отношения логического следования и равносильности между высказывательными формами. Необходимые и достаточные условия

Понятие отношения логического следования высказывательных форм связано с операцией импликации этих форм.

Пусть на множестве X заданы высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$.

Импликацией высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X , называется высказывательная форма $A(x) \Rightarrow B(x)$, заданная на том же множестве, которая *ложна* при тех значениях $x \in X$, при которых форма $A(x)$ *истинна*, а $B(x)$ *ложна*.

Обозначение $A(x) \Rightarrow B(x)$, читаем: «Импликация $A(x)$ и $B(x)$ », или «Если $A(x)$, то $B(x)$ », т.е. импликация высказывательных форм образуется с помощью логической связки «если..., то...», причем $A(x)$ называют *условием*, а $B(x)$ – *заключением*.

Например, из высказывательных форм $A(x)$: « $x:3$ » и $B(x)$: « $x:4$ », $x \in N$, составим высказывательную форму $A(x) \Rightarrow B(x)$: «Если $x:3$, то $x:4$ », $x \in N$. Эта высказывательная форма истинна при некоторых значениях x и ложна при других. Подставим вместо x несколько натуральных значений:

1) при $x=12$ имеем импликацию высказываний: «Если $12:3$, то $12:4$ », которая истинна, т.к. условие « $12:3$ » и заключение « $12:4$ » – истинны;

2) при $x=16$ получим: «Если $16:3$, то $16:4$ », эта импликация также истинна, т.к. её условие « $16:3$ » – ложно, а заключение « $16:4$ » – истинно;

3) при $x=15$ получим: «Если $15:3$, то $15:4$ », эта импликация ложна, т.к. её условие « $15:3$ » – истинно, а заключение « $15:4$ » – ложно;

4) при $x=17$ имеем импликацию высказываний: «Если $17:3$, то $17:4$ », которая ложна, т.к. условие « $17:3$ » и заключение « $17:4$ » – ложны.

В математике часто встречаются импликации высказывательных форм, которые истинны при любых значениях x из области определения X .

Например, из высказывательных форм $A(x)$: « $x:4$ » и $B(x)$: « $x:2$ », $x \in N$, составим высказывательную форму $A(x) \Rightarrow B(x)$: «Если $x:4$, то $x:2$ », $x \in N$. Чтобы получить разные комбинации значений истинности для её условия и заключения, поставим вместо x натуральные значения:

1) при $x=5$ получим: «Если $5:4$, то $5:2$ », эта импликация истинна, т.к. её условие и заключение ложны;

2) при $x=6$ получим: «Если $6:4$, то $6:2$ », что тоже истинно, т.к. условие – ложно, а заключение – истинно;

3) при $x=8$ имеем: «Если $8:4$, то $8:2$ », эта импликация опять истинна, т.к. условие и заключение

истинны.

Нужно отметить, что в этот пример для x нельзя найти такое значение, чтобы условие стало истинным высказыванием, а заключение – ложным, т.к. нет числа, которое бы делилось на 4, но не делилось на 2. Таким образом, высказывательная форма «Если $x:4$, то $x:2$ » истинна при любых значениях $x \in N$, причем не трудно заметить, что множество истинности T_A условия « $x:4$ » является подмножеством множества истинности T_B заключения « $x:2$ », т.е. $T_A \subset T_B$. На основании выше изложенного можно сформулировать вывод.

Высказывательная форма $A(x) \Rightarrow B(x)$, $x \in X$, истинна тогда и только тогда, когда множество истинности T_A высказывательной формы $A(x)$ включается в множество истинности T_B высказывательной формы $B(x)$, т.е. когда при всех значениях x из множества $T_A \subset T_B$.

Этим фактом удобно пользоваться при установлении значения истинности высказывательной формы $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Например, рассмотрим импликацию «Если число x – натуральное, то x – целое», $x \in R$. Для условия «Число x – натуральное» множество истинности $T_A = N$, а для заключения – $T_B = Z$. Как известно, множество N натуральных чисел включается во множество Z целых чисел, т.е. $N \subset Z$, следовательно, данная импликация истинна при любых значениях x из множества R действительных чисел.

Если импликация $A(x) \Rightarrow B(x)$, $x \in X$, истинна при всех значениях x из множества X , то говорят, что высказывательная форма $B(x)$ *логически следует* из высказывательной формы $A(x)$, и форму $B(x)$ называют *необходимым условием* для высказывательной формы $A(x)$, а форму $A(x)$ – *достаточным условием* для высказывательной формы $B(x)$.

Таким образом, мы определили *отношение логического следования между высказывательными формами*.

Высказывательную форму $A(x) \Rightarrow B(x)$, которая является истинным высказыванием, можно прочесть по разному:

- 1) $A(x)$ есть достаточное условие для $B(x)$;
- 2) $B(x)$ есть необходимое условие для $A(x)$;
- 3) Всякое $A(x)$ есть $B(x)$;
- 4) $B(x)$ логически следует из $A(x)$;
- 5) Из $A(x)$ логически следует $B(x)$.

В рассмотренной ранее высказывательной форме $A(x) \Rightarrow B(x)$: «Если $x:4$, то $x:2$ », $x \in N$, высказывательная форма « $x:2$ » логически следует из формы « $x:4$ », причем « $x:2$ » является необходимым условием для « $x:4$ », а « $x:4$ » является достаточным условием для формы « $x:2$ ». Используя эти терминалы, высказывательную форму «Если $x:4$, то $x:2$ » можно переформулировать следующим образом:

- 1) для того чтобы x делилось на 4 необходимо, чтобы x делилось на 2;
- 2) для того чтобы x делилось на 2, достаточно, чтобы x делилось на 4;
- 3) всякое число, кратное 4, кратно и 2;
- 4) $x:2$ логически следует из того, что $x:4$;
- 5) из того, что $x:4$ логически следует, что $x:2$.

Для того чтобы показать, что *высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$, заданные на множестве X , не находятся в отношении логического следования*, нужно указать такое значение $a \in X$, при котором высказывание $A(a)$ – истинно, а $B(a)$ – ложно, т.е. привести контрпример.

Понятие отношения равносильности высказывательных форм связано с эквиваленцией этих форм.

Пусть на множестве X заданы высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$.

Эквиваленцией высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X , называется высказывательная форма $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, заданная на том же множестве, которая истинна при тех значениях x , при которых обе формы $A(x)$ и $B(x)$ истинны или ложны одновременно.

Обозначение $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, $x \in X$, читаем: «Эквиваленция $A(x)$ и $B(x)$ » или « $A(x)$ тогда и только тогда, когда $B(x)$ », т.е. эквиваленция высказывательных форм образуется с помощью логической связки, «... тогда и только тогда, когда ...». Может использоваться при чтении также логическая

связка «...в том и только в том случае, если...».

Например, из высказывательных форм $A(x)$: «Число x :10» и $B(x)$: «Десятичная запись числа x оканчивается нулем», $x \in N$, образуем высказывательную форму $A(x) \Leftrightarrow B(x)$: «Число x делится на 10 тогда и только тогда, когда десятичная запись числа x оканчивается нулем». Подставим вместо x несколько натуральных значений:

1) при $x=30$ имеем эквиваленцию высказываний «Число 30 делится на 10 тогда и только тогда, когда десятичная запись числа 30 оканчивается нулем», которая истинна, т.к. оба элементарные высказывания истинны;

2) при $x=45$ имеем эквиваленцию: «Число 45 делится на 10 тогда и только тогда, когда десятичная запись числа 45 оканчивается нулем», которая тоже истинна, т.к. оба высказывания ложны.

Для рассматриваемой эквиваленции нет таких значений, при которых высказывательные формы принимали бы разные значения истинности («и» и «л» или «л» и «и»). Таким образом, эквиваленция «Число x делится на 10 тогда и только тогда, когда десятичная запись числа x заканчивается нулем» истинна при любых значениях x , причем множества истинности T_A и T_B составляющих высказывательных форм совпадают, т.е. $T_A = T_B$.

Высказывательная форма $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, $x \in X$, истинна тогда и только тогда, когда множества истинности T_A и T_B составляющих высказывательных форм равны, т.е. $T_A = T_B$.

Этот факт можно использовать при установлении значения истинности высказывательной формы $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, $x \in X$.

Например, рассмотрим эквиваленцию « $x:15 \Leftrightarrow x:3 \wedge x:5$ », $x \in X = \{1; 2; 3; \dots; 30\}$. Множество истинности T_A высказывательной формы « $x:5$ » будет равно: $T_A = \{15; 30\}$, множество истинности T_B высказывательной формы « $x:3$ и $x:5$ » находится пересечением множеств истинности T_1 и T_2 составляющих форм « $x:3$ » и « $x:5$ »: $T_B = T_1 \cap T_2 = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30\} \cap \{5; 10; 15; 20; 25; 30\} = \{15; 30\}$. Таким образом, получаем, что $T_A = T_B$, следовательно, данная эквиваленция истинна при любых значениях x из множества X .

Если эквиваленция $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, $x \in X$, истинна при любых значениях x из множества X , то высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$ находятся в *отношении равносильности* (или, короче, равносильны), и каждую форму называют *необходимым и достаточным условием* для другой.

В рассмотренной выше эквиваленции « $x:15 \Leftrightarrow x:3 \wedge x:5$ » составляющие её высказывательные формы « $x:15$ » и « $x:3$ и $x:5$ » равносильны, поэтому иначе она может быть сформулирована следующим образом: «Для того чтобы x делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы x делилось на 3 и x делилось на 5».

Для того чтобы показать, что высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$, заданные на множестве X , не находятся в отношении равносильности, нужно указать такое значение $a \in X$, при котором высказывания $A(a)$ и $B(a)$ принимают разные значения истинности. («и» и «л» или «л» и «и»), т.е. привести контрпример.

Итак, мы рассмотрели отношения логического следования и равносильности между высказывательными формами, а также способы установления наличия этих отношений: 1) по выявлению отношения включения или равенства соответственно между множествами истинности этих форм; 2) по возможности приведения контрпримера.

Замечание. Отношения логического следования и равносильности были рассмотрены нами для одноместных высказывательных форм. Для высказывательных форм, содержащих две или более переменных, эти понятия определяются аналогично.

Задания для самоконтроля

Изучив тему «Высказывательные формы (предикаты) и операции над ними», студент должен уметь:

- выявлять логическую структуру высказывательных форм;
- находить значение истинности составных высказываний;
- определять способы установления значения истинности высказываний с кванторами;
- строить отрицание высказываний различной структуры;
- использовать определения понятий при решении задач на рас- познавание;
- устанавливать наличие (отсутствие) отношения логического следования (равносильности)

между высказывательными формами;

- выделять условие и заключение в теоремах, сформулированный со словами «всякий», «необходимо», «достаточно» и др.;

- распознавать в начальном курсе математики высказывания и высказывательные формы, высказывания с кванторами, грамотно формулировать математические правила.

Проверить сформированность названных умений можно, выполнив *следующие задания*.

1. Среди следующих предложений укажите высказывания и высказывательные формы, пояснив свой ответ:

а) $x+5=1$; б) при $x=2$ выполняется равенство $x^2-1=0$; в) $x+2<3x-4$; г) $3\cdot4+3>17$; д) $x^2-2x+1=0$; е) существует такое число x , что $x^2-2x+1=0$; ж) для всех натуральных чисел n верно неравенство $3n+2>0$; з) прямые a и b параллельны; и) $x<y$; к) $x+y=z$; л) $xy=ux$; м) любое дерево – растение; н) хотя бы одно из чисел 1,2,3,4,5 является корнем уравнения $x^2-1=0$; о) 2 – простое число; п) график функции $y=x^2$ симметричен относительно оси ординат.

2. Даны высказывательные формы $A(x)$: « $x^2-4=0$ » и $B(x)$: « $3x-2<17$ ». Найдите множество истинности этих форм, если их область определения есть: а) множество N натуральных чисел; б) множество R действительных чисел.

3. Высказывательная форма $C(x)$: « x – делитель 12» задана на множестве N . Сформулируйте высказывания $C(4)$, $C(5)$, $C(8)$ и определите их значения истинности.

4. Высказывательная форма $A(x;y)$: « $x>y$ » задана на множестве Z . Назовите две пары чисел, при подстановке которых высказывательная форма обращается в: а) истинное высказывание; б) ложное высказывание.

5. Дана высказывательная форма $B(x;y)$: « $x+2=y$ », где $x,y\in X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Перечислите все пары элементов множества X , для которых форма $B(x;y)$ обращается в истинное высказывание. Как называется множество этих пар?

6. Найдите множества истинности следующих высказывательных форм:

$A(x)$: « $x<7$ », $x\in N$; $F(x;y)$: « $x^2+y^2=25$ », $x,y\in Z$;

$B(y)$: « $y^2<20$ », $y\in Z$; $K(x)$: « $x^2-1=0$ », $x\in R$;

$C(x)$: « $4<x\leq9$ », $x\in N$; $N(y)$: « $y^2>0$ », $y\in R$;

$D(x)$: « $7<x<8$ », $x\in N$; $M(x)$: « $x^2+1\geq0$ », $x\in R$;

$E(x;y)$: « $x\cdot y=6$ », $x,y\in Z$; $S(y)$: « $y+12<20$ », $y\in R$.

7. На множестве $X=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ задана высказывательная форма $A(x)$: « x – простое число».

Заполните следующую таблицу.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$A(x)$								

8. Установите значения истинности следующих высказываний, какие из них содержат квантор общности, а какие – квантор существования?

а) Все кустарники являются растениями.

б) Существуют числа, кратные 3.

в) В любом треугольнике высоты совпадают с медианами.

г) Каждое натуральное число является целым.

д) Некоторые натуральные числа меньше 3.

е) Хотя бы в одной из групп первого курса есть студенты, окончившие педколледж.

9. Даны высказывательные формы $A(x)$: «Студент x – отличник», $B(x)$: «Растение x – дерево», $C(y)$: «Животное y – млекопитающее».

Образуйте из них всевозможные высказывания при помощи кванторов общности и существования, установите значения истинности сформулированных высказываний.

10. Данные ниже высказывания взяты из учебников математики для начальных классов. Выясните, какие из них содержат (в явном или неявном виде) квантор и как устанавливается их значение истинности:

а) от перестановки слагаемых сумма не изменяется;

б) два соседних слагаемых можно заменить их суммой;

в) существуют четные числа;

г) некоторые числа делятся на 4;

д) среди многоугольников есть треугольники.

11. Выявите логическую структуру следующих высказываний:

а) При некоторых натуральных значениях y выполняется равенство $3-y=5$.

б) Каждое действительное число x является решением неравенства $x^2+3>0$.

в) Некоторые четырехугольники являются прямоугольниками.

г) Всякое число имеет делитель, равный 1.

д) Для любого значения x есть такое значение y , что $x-2=y$.

е) Хотя бы одно натуральное число кратно 8.

ж) Существуют такие натуральные числа c и d , что $c \cdot d = 12$.

з) Для всех чисел x и y верно равенство $x=2y$.

12. Сформулируйте словами следующие высказывания, установите их значения истинности:

а) $(\forall x \in R) (x-1=x)$;

б) $(\forall x \in R) (x^2=4)$;

в) $(\forall x \in R) (x-1 \neq x)$;

г) $(\exists x \in R) (x-1 \neq x)$;

д) $(\exists x \in R) 8 (x^2=4)$;

е) $(\forall x \in R) (x^2 \neq 4)$.

13. На множестве N натуральных чисел заданы высказывательные формы $P(x)$: «Число x четно» и $Q(x)$: «Число x кратно 4». Сформулируйте словами следующие высказывания и установите их значение истинности:

а) $(\forall x \in N) P(x)$; б) $(\exists x \in N) Q(x)$; в) $(\exists x \in N) \bar{P}(x)$; г) $(\forall x \in N) \bar{Q}(x)$.

14. Запишите символами с помощью кванторов следующие высказывания:

а) Найдется действительное число x такое, что $x^2=1$.

б) Любое натуральное число четно.

в) Имеется действительное число x такое, что для любого действительного числа a выполняется равенство $ax=a$.

г) Для любых действительных чисел x и y есть такое число z , что $x+y=z$.

д) Не существует рационального числа x такого, что $x^2=2$.

е) Существует число x , сумма которого со всяким числом a равна a .

ж) Для любого числа a есть противоположное ему число.

з) Для каждого отличного от нуля числа b есть обратное ему число.

и) Нет действительного числа, квадрат которого был бы меньше 0.

к) Для любых двух действительных чисел есть третье действительное число, лежащее между ними.

л) Не существует наибольшего действительного числа.

15. Даны двухместные высказывательные формы:

$P(a;b)$: «прямая a параллельна прямой b », $Q(a;\alpha)$: «прямая a лежит в плоскости α »,

$S(b;\alpha)$: «прямая b параллельна плоскости α ». Сформулируйте словами высказывания, имеющие следующую логическую структуру:

а) $(\forall \alpha) (\exists a) Q(a; \alpha)$;

б) $(\forall \alpha) (\exists b) S(b; \alpha)$;

в) $(\exists d) (\exists a, b) P(a;b)$;

г) $(\forall a, \alpha) Q(a; \alpha)$;

д) $(\forall b, \alpha) S(b; \alpha)$;

е) $(\forall a, b) P(a; b)$.

16. Даны одноместные высказывательные формы:

$P(x)$: «Треугольник x равносторонний», $Q(x)$: «Треугольник x равнобедренный»,

$R(x)$: «Треугольник x прямоугольный».

Запишите словами высказывания, имеющие следующую структуру:⊙

а) $(\forall x) P(x) \Rightarrow Q(x)$;

б) $(\exists x) P(x) \wedge R(x)$;

в) $(\exists x) Q(x) \wedge R(x)$;

г) $(\forall x) P(x) \Rightarrow \bar{R}(x)$;

д) $(\exists x) P(x) \vee R(x)$;

е) $(\exists x) P(x) \wedge \bar{R}(x)$.

Установите значение истинности каждого сформулированного высказывания.

17. Покажите, что выполнение учащимися начальных классов следующих заданий связано с нахождением множества истинности конъюнкции и дизъюнкции высказывательных форм:

а) Даны числа: 31,53,409,348,15,4015,233,33,271,3,333,40,30. Выпишите числа, в записи которых: 1) три цифры и есть цифра 3; 2) три цифры или есть цифра 3.

б) Из ряда чисел 25,12,17,5,15,36 выпишите числа: 1) двузначные или меньшие 17; 2) двузначные и меньшие 17.

в) Из ряда чисел 72,312,522,483,1137 выпишите те числа, которые: 1) делятся на 3 и 9; 2) делятся на 3 или 9.

18. На множестве $X=\{1;2;3;4;5\}$ заданы высказывательные формы $A(x)$: «Число x – простое», $B(x)$: « $x < 3$ » и $C(x)$: « $x-1=0$ ».

а) Найдите множество истинности каждой высказывательной формы.

б) Для каждой формы сформулируйте её отрицание и найдите его множество истинности.

в) Сформулируйте следующие высказывательные формы: $A(x) \wedge B(x)$; $A(x) \wedge C(x)$; $B(x) \vee A(x)$; $B(x) \wedge C(x)$; $A(x) \vee C(x)$; $\bar{A}(x) \wedge B(x)$; $\bar{B}(x) \vee C(x)$ и найдите множество истинности каждой формы.

19. На множестве учащихся некоторого класса заданы высказывательные формы $A(x)$: «Учащийся x играет в шахматы» и $B(x)$: «Учащийся x умеет плавать». Запишите словами

следующие высказывательные формы:

- а) $A(x) \wedge B(x)$; б) $A(x) \vee B(x)$; в) $\overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)}$; г) $\overline{A(x) \vee B(x)}$;
 д) $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$; е) $\overline{A(x) \wedge B(x)}$; ж) $A(x) \Rightarrow B(x)$; з) $\overline{A(x) \Rightarrow B(x)}$.

20. На множестве $X = \{1; 2; 3; \dots; 20\}$ заданы высказывательные формы $A(x)$: « x не делится на 5», $B(x)$: « x – четное число», $C(x)$: « x – число простое», $D(x)$: « x кратно 3». Найдите множества истинности следующих высказывательных форм: а) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$; б) $\overline{B(x)} \wedge D(x)$; в) $C(x) \wedge D(x)$; г) $A(x) \wedge \overline{D(x)}$; д) $\overline{B(x)} \wedge \overline{D(x)}$; е) $A(x) \vee B(x)$; ж) $C(x) \vee D(x)$; з) $\overline{B(x)} \vee D(x)$.

21. На диаграмме Эйлера-Венна (рис.23) изображены множества истинности T_A , T_B , T_C высказывательных форм $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $x \in X$. Заштрихуйте множества истинности следующих форм:

- а) $A(x) \wedge C(x) \vee B(x)$; б) $A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)$; в) $A(x) \wedge \overline{B(x)}$;
 г) $\overline{A(x)} \vee C(x)$; д) $\overline{A(x)} \vee B(x)$; е) $A(x) \vee B(x) \vee C(x)$;
 ж) $\overline{A(x) \vee B(x) \vee C(x)}$; з) $A(x) \wedge \overline{B(x)} \vee C(x)$; и) $\overline{A(x) \vee B(x) \vee C(x)}$;
 к) $\overline{A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)}$; л) $\overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)} \wedge \overline{C(x)}$; м) $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)} \vee \overline{C(x)}$.

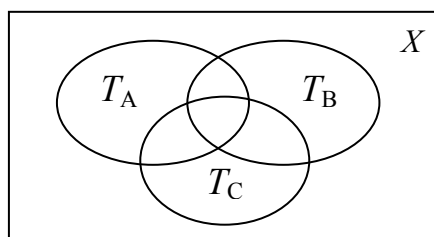


Рис. 23

22. На множестве R действительных чисел даны высказывательные формы $A(x)$: « x – четное число» и $B(x)$: « x – составное число». Сформулируйте высказывательные формы, множества истинности которых заштрихованы на диаграммах Эйлера-Венна (рис. 24).

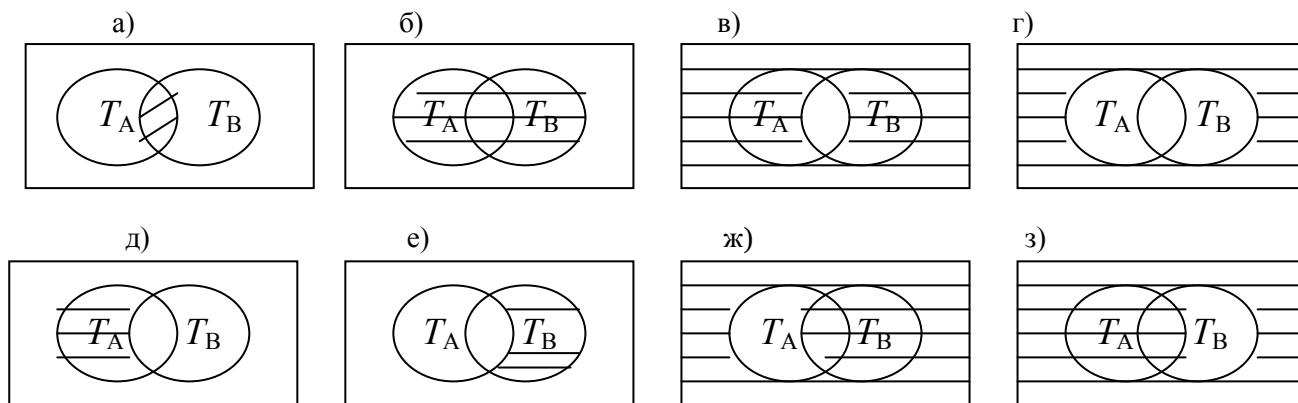


Рис 24

23. Сформулируйте отрицания следующих высказываний, найдите значения истинности данных высказываний и их отрицаний: а) некоторые глаголы отвечают на вопрос «что делать?»; б) все однозначные числа больше 5; в) существует натуральное число, являющееся корнем уравнения $x+3=0$; г) некоторые геометрические фигуры являются многоугольниками; д) любое дерево есть растение; е) некоторые студенты группы не старше 20 лет; ж) каждый треугольник является равнобедренным.

24. На множестве X четырехугольников даны высказывательные формы $A(x)$: «Четырехугольник x – параллелограмм», $B(x)$: «Четырехугольник – равнобокая трапеция», $C(x)$: «Четырехугольник x – ромб», $D(x)$: «Четырехугольник x имеет ось симметрии», $E(x)$: «Четырехугольник x имеет центр симметрии».

Запишите словами и определите значение истинности следующих высказываний:

- а) $(\forall x) A(x) \Rightarrow E(x)$; б) $(\exists x) D(x) \Rightarrow E(x)$; в) $(\forall x) D(x) \Rightarrow C(x)$;
 г) $(\exists x) B(x) \Rightarrow \overline{D(x)}$; д) $(\forall x) \overline{E(x)} \Rightarrow A(x)$; е) $(\forall x) D(x) \wedge E(x) \Rightarrow C(x)$;
 ж) $(\forall x) A(x) \Leftrightarrow E(x)$; з) $(\forall x) \overline{C(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$; и) $(\exists x) C(x) \Rightarrow A(x)$.

25. Даны высказывательные формы $A(n)$: « $n:3$ », $B(n)$: « $n:2$ », $C(n)$: « $n:4$ », $D(n)$: « $n:6$ », $E(n)$: « $n:12$ », $n \in N$.

Запишите словами следующие высказывания и определите значение истинности каждого высказывания:

- а) $(\forall n \in N) A(n) \wedge B(n) \Rightarrow E(n)$; б) $(\forall n \in N) B(n) \wedge D(n) \Rightarrow E(n)$;
 в) $(\exists n \in N) C(n) \wedge D(n) \Rightarrow E(n)$; г) $(\forall n \in N) E(n) \Rightarrow C(n) \wedge D(n)$;
 д) $(\forall n \in N) A(n) \wedge C(n) \Leftrightarrow E(n)$; е) $(\forall n \in N) E(n) \Rightarrow B(n) \wedge D(n)$.

26. Даны высказывательные формы $N(x)$: « x – натуральное число», $Z(x)$: « x – целое число», $Q(x)$: « x – рациональное число», $R(x)$: « x – действительное число». Запишите словами следующие высказывания, определите их значение истинности:

- а) $(\forall x) N(x) \Rightarrow R(x)$; б) $(\forall x) R(x) \wedge Z(x) \Rightarrow \overline{N}(x)$; в) $(\exists x) Q(x) \wedge \overline{N}(x)$;
 г) $(\forall x) Q(x) \Rightarrow \overline{Z}(x)$; д) $(\exists x) R(x) \wedge Q(x)$; е) $(\exists x) R(x) \wedge \overline{Z}(x)$.

27. Запишите следующие высказывания при помощи символов $\Rightarrow$ или $\Leftrightarrow$:

а) $A(x)$ следует из $B(x)$; б) $B(x)$ следует из $A(x)$; в) из $D(x)$ следует $C(x)$; г) из $B(x)$ следует $A(x)$;
 д) $C(x)$ следует из $D(x)$; е) из $C(x)$ следует $D(x)$; ж) $A(x)$ равносильно $B(x)$; з) $A(x)$ – необходимое условие для $B(x)$; и) $A(x)$ необходимое и достаточное условие для $B(x)$; к) $B(x)$ – достаточное условие для $A(x)$.

28. На множестве $X = \{1; 2; 3; \dots; 9\}$ заданы высказывательные формы $A(x)$: « $x > 2$ » и $B(x)$: « $x > 5$ », $C(x)$: « x – однозначное число». Сделайте записи в символах, а затем словами для следующих высказываний:

а) $A(x)$ следует из $B(x)$; б) $C(x)$ следует из $A(x)$; в) из $B(x)$ следует $A(x)$.

29. Доказать, что: а) «Если $x < 3$, то $x < 5$ » – истинно; б) «Из того, что четырехугольник – ромб следует, что он – квадрат» – ложно.

Истинную импликацию переформулировать разными способами.

30. На множестве R действительных чисел заданы высказывательные формы $E(x)$: « $x - 2 = 0$ » и $F(x)$: « $x^2 - 4 = 0$ ».

а) Найдите множества истинности этих форм.

б) Выясните, в каком отношении находятся T_E и T_F .

в) Можно ли утверждать, что $F(x)$ логически следует из $E(x)$ на множестве R ? Сделайте запись. Как иначе можно сформулировать это утверждение?

31. Выясните, какие импликации истинны, какие ложны:

- а) $x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$; б) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$; в) $(x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$;
 г) $x < 8 \Rightarrow x < 7$; д) $x > 4 \Rightarrow x > 2$; е) $x - 3 < 5 \Rightarrow x < 9$.

32. Какие из следующих высказываний истинны, какие ложны:

- а) $x:3 \wedge x:2 \Leftrightarrow x:6$; б) $x:3 \wedge x:6 \Leftrightarrow x:18$; в) $x:2 \wedge x:4 \Leftrightarrow x:8$;
 г) $x:2 \wedge x:5 \Leftrightarrow x:10$; д) $x:2 \wedge x:9 \Leftrightarrow x:18$; е) $x:3 \wedge x:4 \Rightarrow x:12$.

33. На диаграмме Эйлера-Венна (рис.25) даны множества истинности T_A , T_B , T_C высказывательных форм $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$, заданных на множестве X . Выясните, какие из следующих импликаций истинны, ответ обоснуйте:

- а) $A(x) \Rightarrow C(x)$; б) $B(x) \Rightarrow C(x)$; в) $\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$;
 г) $C(x) \Rightarrow A(x)$; д) $\overline{C(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$; е) $\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$.

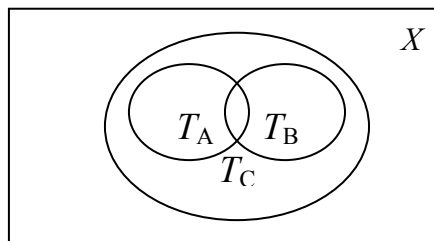


Рис. 25

34. Даны высказывательные формы $A(x)$: « $x:2$ », $B(x)$: « $x:3$ », $C(x)$: « x – четно», $D(x)$: « $x:6$ », $x \in N$.

Сформулируйте следующие высказывания и определите их значение истинности. Истинные импликации и эквиваленции переформулируйте с помощью терминов «необходимо», «достаточно»,

«необходимо и достаточно»:

- | | | |
|--|---|------------------------------|
| а) $A(x) \Rightarrow B(x)$; | б) $A(x) \Leftrightarrow C(x)$; | в) $D(x) \Rightarrow B(x)$; |
| г) $A(x) \wedge B(x) \Leftrightarrow D(x)$; | д) $D(x) \Rightarrow A(x)$; | е) $B(x) \Rightarrow C(x)$; |
| ж) $B(x) \Leftrightarrow D(x)$; | з) $A(x) \wedge \overline{B(x)} \Rightarrow D(x)$; | и) $C(x) \Rightarrow A(x)$. |

35. Установите, в каком отношении находятся данные пары высказывательных форм:

а) $A(x)$: «Четырехугольник x – прямоугольник», $B(x)$: «Диагонали четырехугольника равны».

б) $A(x)$: «Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны», $B(x)$: «Четырехугольник x – квадрат».

в) $A(x; y)$: «Прямые x и y параллельны», $B(x; y)$: «Прямые y и x параллельны».

г) $A(x)$: «Число $x=0$ », $B(x; y)$: « $x \cdot y=0$ ».

д) $A(x)$: «Число x кратно 10», $B(x)$: «Десятичная запись числа оканчивается нулем».

36. В каждое из следующих высказываний вместо многоточия вставьте термин «необходимо» или «достаточно», чтобы получившееся высказывание было истинным:

а) Если $A(x) \Rightarrow B(x)$ истинна, $A(x) \dots$ для $B(x)$, а $B(x) \dots$ для $A(x)$.

б) Если $B(x) \Rightarrow A(x)$ истинна, $B(x) \dots$ для $A(x)$, а $B(x) \dots$ для $A(x)$.

в) Если $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ истинна, $A(x) \dots$ для $B(x)$, а $B(x) \dots$ для $A(x)$.

37. Запишите следующие предложения, используя символ $\Rightarrow$ или $\Leftrightarrow$:

а) Для того чтобы имело место $C(x)$, необходимо, чтобы выполнялось $E(x)$.

б) Для того чтобы имело место $C(x)$, достаточно, чтобы выполнялось $E(x)$.

в) Для того чтобы имело место $C(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $E(x)$.

38. Сформулируйте следующие высказывания с помощью логических связок «если ..., то ...» или «... тогда и только тогда, когда...»:

а) Равенство двух чисел есть достаточное условие равенства их квадратов.

б) Наличие прямого угла в четырехугольнике необходимо для того, чтобы четырехугольник был квадратом.

в) Делимость числа на 2 необходима для того, чтобы число делилось на 4.

Каждое из данных высказываний запишите в символах.

39. Вместо многоточия вставьте термины «необходимо», «достаточно», или «необходимо и достаточно»:

а) Для того чтобы сумма двух слагаемых была больше 20, ... чтобы хотя бы одно из слагаемых было больше 10.

б) Для того чтобы разность двух чисел была четной, ... чтобы оба компонента вычитания были четными.

40. В начальном курсе математики синонимом слова «необходимо» является слово «нужно» («надо»), а синонимом слова «достаточно» – слово «можно». Зная это, вставьте вместо многоточия слова «нужно» или «можно» так, чтобы высказывания были истинными:

а) Для того чтобы умножить сумму чисел на 5, ... каждое слагаемое умножить на 5.

б) Для того чтобы найти неизвестное слагаемое, ... из суммы вычесть другое слагаемое.

в) Для того чтобы вычесть число из суммы, ... вычесть его из одного из слагаемых.

г) Для того чтобы число было четным, ... чтобы оно делилось на 2.

Проектная задача. «Высказывания с кванторами в начальном курсе математики».

1. Приведите примеры высказываний с квантором общности из разных учебников математики для начальной школы.

2. Как устанавливают значение истинности таких высказываний в начальном курсе математике?

3. Почему для учителя важно уметь распознавать высказывания с кванторами общности?

ГЛАВА 4. ТЕОРЕМЫ. УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ (РАССУЖДЕНИЯ)

4.1. Структура теоремы

Изучение любого раздела математики сопровождается, как правило, рассмотрением предложений, называемых теоремами.

Теоремой называется высказывание, истинность которого устанавливается на основе рассуждения (доказательства).

Иногда теоремами называют высказывания, которые неверны. Например, говорят об обратной теореме, а она не всегда бывает верна. Теоремами могут также называть утверждения, которые ещё не доказаны. Примером может служить Великая теорема Ферма: «Уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет целых положительных решений при $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$ », которую долгое время не удаётся доказать.

В школьном курсе математики изучают теоремы, имеющие разнообразные формы записи, формулируют и доказывают различные виды теорем. Чтобы успешно выполнять такую работу, необходимы знания о строении теоремы, основанные на понятиях высказывания, высказывательной формы и квантора.

Рассмотрим следующую теорему: «Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла». Условием этой теоремы является высказывательная форма $A(x)$: «Точка x лежит на биссектрисе угла», а заключением – высказывательная форма $B(x)$: «Точка x равноудалена от сторон угла», где $A(x)$ и $B(x)$ заданы на множестве P всех точек плоскости. Тогда рассматриваемая теорема состоит в том, что импликация этих высказывательных форм $A(x) \Rightarrow B(x)$, т.е. форма «Если точка x лежит на биссектрисе угла, то точка x равноудалена от сторон этого угла», обращается в истинное высказывание при всех x из множества P . При помощи квантора общности данную теорему можно записать в символах: $(\forall x \in P) A(x) \Rightarrow B(x)$.

Таким образом, говоря о строении теоремы «Для всех точек плоскости P если точка x лежит на биссектрисе угла, то точка x равноудалена от сторон этого угла», мы выделили в ней три части:

1. *Разъяснительная часть* или *преамбула* (от лат. «praeeambulus» – «идущий впереди»): в ней описываются множество элементов, о которых идет речь в теореме. Разъяснительной частью является символическая запись: $\forall x \in P$.

2. *Условие теоремы*: высказывательная форма $A(x)$, заданная на множестве P всех точек плоскости.

3. *Заключение теоремы*: высказывательная форма $B(x)$, заданная на множестве P всех точек плоскости.

Заметим, что в словесной формулировке теорем преамбула обычно не формулируется явно, но она всегда подразумевается, и при работе с теоремами её необходимо выделять.

Очевидно, что структура любой теоремы, словесная формулировка которой имеет логическую связку «если..., то...», будет такое же, как и строение рассмотренной выше теоремы, поэтому её можно записать в виде:

$$(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x), (1)$$

где X – множество, на котором заданы высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$.

Теоремы, не содержащие логической связки «если..., то...», также можно записать в виде (1), переформулировав их с помощью этой связки.

Например, теорему «В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны» можно переформулировать так: «Если четырехугольник – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны» или полностью, с указанием разъяснительной части: «Для любого четырехугольника x , если четырехугольник x – ромб, то диагонали четырехугольника x взаимно перпендикулярны». Обозначив множество четырехугольников на плоскости буквой X , получаем запись этой теоремы в символах: $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$, где ее условие – высказывательная форма $A(x)$: «Четырехугольник x – ромб», а заключение – высказывательная форма $B(x)$: «Диагонали четырехугольника x взаимно перпендикулярны», заданные на множестве X .

Пусть $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$ – запись истинной теоремы. Тогда её условие и заключение образуют импликацию, истинную при всех x из множества X и, следовательно, высказывательная форма $B(x)$ логически следует из $A(x)$. (см. пункт 3.4). Поэтому заключение $B(x)$ теоремы является *необходимым условием* для $A(x)$, а условие $A(x)$ – *достаточным условием* для заключения $B(x)$ данной теоремы.

Пользуясь этой терминологией, теорему «Если четырехугольник – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны» можно сформулировать следующим образом:

1. Для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.

2. Для того чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны, достаточно, чтобы он был ромбом.

Иногда вместо слов «необходимое условие», «достаточное условие» в формулировках теорем используют слова «необходимый признак», «достаточный признак».

4.2. Виды теорем

Рассмотрим теорему «Если сумма цифр натурального числа кратна 9, то и само число кратно 9». Она может быть записана в таком виде: $(\forall x \in N) A(x) \Rightarrow B(x)$, где запись $\forall x \in N$ представляет разъяснительную часть теоремы; $A(x)$: «Сумма цифр числа x кратна 9» является условием теоремы; $B(x)$: «Число x кратно 9» – её заключением.

Поменяв местами условие и заключение этой теоремы, оставив без изменения преамбулу, получим новую теорему $(\forall x \in X) B(x) \Rightarrow A(x)$, словесная формулировка которой такова: «Если натуральное число кратно 9, то и сумма его цифр кратна 9». Эта теорема также истинна и является теоремой, *обратной данной*.

Пусть дана теорема $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$.

Если в теореме $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$ поменять местами условие и заключение, то теорема $(\forall x \in X) B(x) \Rightarrow A(x)$ называется **теоремой, обратной данной**.

В рассмотренном выше примере обратная теорема истинна, но так бывает не всегда.

Рассмотрим на множестве X всех четырехугольников плоскости две высказывательные формы $A(x)$: «Четырехугольник x – прямоугольник» и $B(x)$: «Диагонали четырехугольника x равны». Теорему вида $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$ сформулируем словами: «Если четырехугольник x – прямоугольник, то его диагонали равны». Эта теорема истинна. Сформулируем теорему, обратную данной: «Если диагонали четырехугольника равны, то этот четырехугольник – прямоугольник». Это высказывание ложно истинно.

Пусть обе теоремы $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$ и $(\forall x \in X) B(x) \Rightarrow A(x)$ истинны. Это означает, что множество истинности T_A высказывательной формы $A(x)$ включается во множество истинности T_B высказывательной формы $B(x)$, т.е. $T_A \subset T_B$, и наоборот, множество истинности T_B высказывательной формы $B(x)$ включается во множество истинности высказывательной формы $A(x)$, т.е. $T_B \subset T_A$, значит, $T_A = T_B$ (рис. 26).

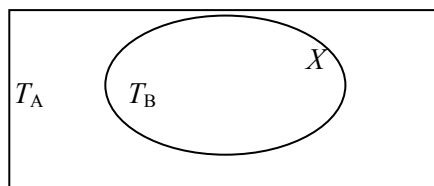


Рис. 26

Равенство множеств истинности T_A и T_B высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$ означает, что $A(x)$ и $B(x)$ *равносильны* на множестве X (см. пункт 3.4), поэтому *каждая из высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$ является необходимым и достаточным условием для другой*.

Например, высказывательная форма «Сумма цифр натурального числа кратна 9» является необходимым и достаточным условием для высказывательной формы «Натуральное число кратно 9», и наоборот.

Если истинны обе теоремы $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$ и $(\forall x \in X) B(x) \Rightarrow A(x)$, то их можно объединить в одну теорему вида $(\forall x \in X) A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

Примером может служить теорема: «Для того, чтобы натуральное число было кратно 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр была кратна 9», которую можно сформулировать с помощью логической связки, соответствующей эквиваленции ($\Leftrightarrow$): «Натуральное число кратно 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр кратна 9».

Рассмотрим следующий вид теоремы.

Пусть дана теорема $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$.

Если в теореме $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$ условие и заключение заменить их отрицаниями, то получится новая теорема вида $(\forall x \in X) \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$, которая называется **теоремой, противоположной данной**.

Например, на множестве N всех натуральных чисел заданы высказывательные формы $A(x)$: «Десятичная запись числа x оканчивается нулем» и $B(x)$: «Число x делится на 5». Сформулируем теорему вида $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$: «Если десятичная запись натурального числа x оканчивается нулем, то

число x делится на 5», эта теорема истинна. Теорема вида $(\forall x \in X) \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$ будет следующей: «Если десятичная запись натурального числа x не оканчивается нулем, то оно не делится на 5», она ложна, т.к. легко назвать натуральное число, запись которого не оканчивается нулем, но оно делится на 5, например, 15, 25, 35 и т.д.

Теорема, противоположная данной, может быть и истинной. Например, на множестве X всех треугольников плоскости заданы высказывательные формы $A(x)$: «Треугольник x равносторонний» и $B(x)$: «Медианы треугольника x равны между собой». Сформулируем теорему вида $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$: «Если треугольник x равносторонний, то медианы треугольника x равны между собой», она истинна. Теорема вида $(\forall x \in X) \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$ будет следующей: «Если треугольник x не является равносторонним, то его медианы не равны между собой», она также истинна.

Остается рассмотреть ещё один вид теоремы.

Пусть дана теорема $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$.

Если в теореме $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$ условие и заключение поменять местами и заменить их отрицаниями, то получится новая теорема вида $(\forall x \in X) \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$, которая называется **теоремой, противоположной обратной** или **обратной противоположной**.

Например, для теоремы «Если треугольник x равносторонний, то его медианы равны между собой» сформулируем теорему, обратную противоположной: «Если медианы треугольника x не равны между собой, то этот треугольник не является равносторонним», причем эта теорема тоже истинна.

Заметим, что данная теорема и теорема, обратная противоположной, имеют всегда одинаковое значение истинности, т.е. *теорема $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$ истинна тогда и только тогда, когда истинна теорема $(\forall x \in X) \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$* , этот вывод следует из закона контрапозиции импликации высказываний (см. пункт 2.4). Поэтому, определяя значение истинности теоремы, обратной противоположной, можно исходя из истинности данной теоремы, утверждать, что теорема, обратная противоположной, также истинна.

4.3. Дедуктивные и недедуктивные умозаключения (рассуждения)

Большую часть знаний об окружающей нас действительности мы получаем с помощью рассуждений. Выводы в них будут истинными, если они являются результатами правильных рассуждений. *Правильными рассуждениями* считают рассуждения, построенные по правилам логики. Учителю нужны знания о тех правилах, в соответствии с которыми строятся правильные рассуждения. Рассуждения лежат в основе доказательств, без которых трудно представить математику.

В логике наряду с термином «рассуждение» используется термин «умозаклучение».

Умозаклучением (*рассуждением*) называется логическая операция, в результате которой получают новое знание на основе некоторого имеющегося знания или из некоторых утверждений получают новое по отношению к исходным, утверждение. Оно представляет собой переход от нескольких высказываний $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$ ($n > 1$) к новому высказыванию B .

Приведем примеры умозаклучений (рассуждений).

Пример 1. Нетрудно убедиться в истинности следующих высказываний:

$3+2 < 3 \cdot 2$ (A_1), $4+3 < 4 \cdot 3$ (A_2), $7+5 < 7 \cdot 5$ (A_3).

На их основе можно сделать вывод (B): сумма двух любых натуральных чисел всегда меньше их произведения.

Умозаклучение состоит из *посылок* и *заключения*.

Посылки умозаклучения – это исходные утверждения, а **заключением** называется новое утверждение, т.е. утверждение, содержащее новое знание.

Пример 2. Из двух утверждений «Все жидкости упруги» и «Вода – жидкость», можно получить новое утверждение следующим образом: «Все жидкости упруги. Вода – жидкость, значит, вода упруга». Здесь исходные утверждения «Все жидкости упруги» и «Вода – жидкость» являются посылками, а новое утверждение «Вода упруга» является заключением умозаклучения.

Рассмотрим примеры умозаклучений, которые выполняют младшие школьники при изучении математики.

Пример 3. Ученику предлагается объяснить, почему число 35 можно представить в виде суммы 30 и 5. Он рассуждает: «Число 35 – двузначное. Любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых. Следовательно, $35=30+5$ ».

В этом умозаклучении первое и второе предложения – посылки, причем первая – частная (характеризует только 35), а вторая – общего характера; заключение – это часть предложения, которая стоит после слова «следовательно», причем заключение носит частный характер.

Пример 4. Один из приемов ознакомления с переместительным свойством умножения заключается в следующем. Используя различные средства наглядности, школьники вместе с учителем устанавливают, что, например, $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$, $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$, $4 \cdot 7 = 7 \cdot 4$. А затем на основе полученных равенств делают вывод: для всех натуральных чисел a и b верно равенство $a \cdot b = b \cdot a$.

В данном умозаключении посылками являются первые три равенства, в которых утверждается, что для конкретных натуральных чисел выполняется такое свойство, т.е. посылки будут частными. Заключение является утверждением общего характера – сделанный вывод.

Как видно из рассмотренных примеров, умозаключения бывают разные. В примере 1 заключение логически следует из посылок, и мы не сомневаемся в его истинности.

В логике принято указывать вначале посылки, а потом заключение, но в конкретном умозаключении их порядок может быть произвольным: вначале заключение – потом посылки; заключение может находиться между посылками.

В зависимости от того, существует ли между посылками и заключением отношение логического следования, выделяют *два вида умозаключений: дедуктивные* (лат. слово «deduction» означает «выведение»), которые в логике считают *правильными* и *недедуктивные (неправильные)*.

Дедуктивным умозаключением называется умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования, т.е. во всех случаях, когда посылки истинны, заключение тоже истинно.

Если посылки умозаключения обозначить буквами $A_1, A_2, \dots, A_n$, а заключение – буквой B , то схематично умозаключение можно представить в виде: $A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow B$.

Используют в логике и такую запись $\frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{B}$. Черта в данной записи заменяет слово «следовательно» («значит»).

Впервые правильные и неправильные умозаключения исследовал древнегреческий философ Аристотель (384-322 гг. до н.э.). Он рассматривал умозаключения, которые содержат две посылки. Такие умозаключения называют *силлогизмами*.

Дедуктивное умозаключение всегда от истинных посылок ведет к истинному заключению. К дедуктивным умозаключениям относятся, например, следующие:

Пример 5. «Если идёт дождь, то земля становится мокрой. Идёт дождь. Следовательно, земля мокрая».

Пример 6. $\frac{a \geq b, b \geq c}{a \geq c}$. Пример 7. $\frac{a:b, b:c}{a:c}$.

Пример 8. Если $x:2$, то x – чётное число. Число $2002:2$.

Число 2002 – чётное.

Пример 9. Если $x:9$, то $x:3$. Число 122 не делится на 3.

Число 122 не делится на 9.

Правильность умозаключения определяется его формой, а не истинностью входящих в него утверждений. При анализе правильности умозаключения необходимо помнить о том, что нельзя отождествлять правильность умозаключения с истинностью полученного вывода. В логике существуют правила, соблюдая которые, можно строить дедуктивные умозаключения. Эти правила называют *правилами вывода* или *схемами дедуктивных умозаключений*.

Наиболее часто встречаются следующие схемы дедуктивных умозаключений:

1. $\frac{A(x) \Rightarrow B(x), A(a)}{B(a)}$ – *правило заключения*;

2. $\frac{A(x) \Rightarrow B(x), \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}}$ – *правило отрицания*;

3. $\frac{A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow C(x)}{A(x) \Rightarrow C(x)}$ – *правило силлогизма*.

Утверждение $A(x) \Rightarrow B(x)$ называют общей посылкой, $A(a)$ – частной посылкой, $B(a)$ – заключением.

Применение данных правил гарантирует, что умозаключение (рассуждение) будет правильным.

При анализе правильности умозаключений есть два способа.

Первый способ – это показать, что данное умозаключение выполнено по одному из трех правил вывода дедуктивных умозаключений.

Второй способ – сформулировать данное умозаключение на теоретико-множественном языке и воспользоваться иллюстрацией на диаграмме Эйлера-Венна; если заключение истинно по диаграмме, то умозаключение будет правильным (дедуктивным).

В рассмотренных примерах 5 и 8 умозаключение построено по правилу заключения, в примерах 6 и 7 – по правилу силлогизма, в примере 9 – по правилу отрицания, значит все они дедуктивные умозаключения.

Приведём пример использования правила заключения в работе с младшими школьниками.

Пример 10. Имеется одинаковое число чашек и блюдец.

Задание ученику: «Покажи, что чашек столько же, сколько блюдец».

Рассуждения ученика: «Поставим на каждое блюдо чашку».

Общая посылка: $A(x) \Rightarrow B(x)$	Если можно образовать пары (чашка – блюдо), то предметов поровну.
Частная посылка: $A(a)$	На каждом блюде стоит чашка, все блюда заняты, и нет чашек без блюда, т.е. из чашек и блюдец можно образовать пары.
Заключение: $B(a)$	Чашек и блюдец поровну.

Рассмотрим пример использования правила отрицания в работе с учениками.

Пример 11. Имеется несколько чашек и блюдец.

Задание ученику: «Установи, поровну ли чашек и блюдец».

Рассуждения ученика: «На одном блюде нет чашки, значит блюдец больше, чем чашек».

Общая посылка: $A(x) \Rightarrow B(x)$	Если предметов поровну, то можно образовать пары (чашка – блюдо).
Частная посылка: $\overline{B(a)}$	Для одного блюда нет пары.
Заключение: $\overline{A(a)}$	Блюдец и чашек не поровну.

Проанализируем правильность следующего умозаключения.

Пример 12. Дано умозаключение «Если запись числа заканчивается цифрой 5, то число делится на 5. Число 125 делится на 5. Следовательно, запись числа 125 оканчивается цифрой 5».

Первый способ. Это умозаключение выполнено по схеме:

$A(x) \Rightarrow B(x), B(125)$ или в общем виде: $A(x) \Rightarrow B(x), B(a)$.
 $A(125)$ $A(a)$

Но такой схемы нет среди названных выше схем дедуктивных умозаключений. Является ли оно правилом дедуктивного умозаключения?

Воспользуемся вторым способом анализа правильности умозаключения. Запишем это правило на теоретико-множественном языке: $\frac{T_A \subset T_B, a \in T_B}{a \in T_A}$.

Изобразим посылки на диаграммах Эйлера-Венна (рис.27) и проверим, истинно ли заключение. Очевидно, что элемент a может содержаться в множестве T_B , но может как принадлежать множеству T_A (рис.27 а), так и не принадлежать множеству T_A (рис.27 б).

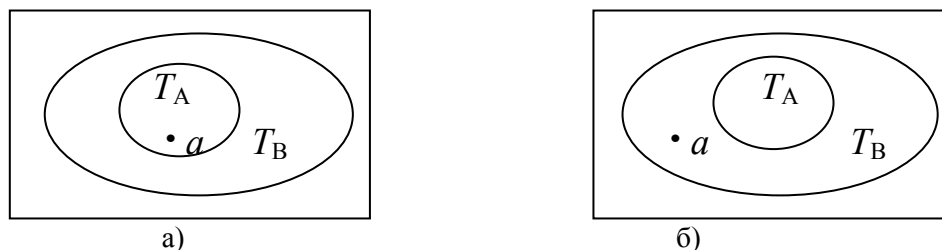


Рис. 27

В логике считают, что такая схема не является правилом дедуктивного умозаключения, т.к. она не гарантирует истинности заключения. Данное умозаключение является *недедуктивным*.

Недедуктивным умозаключением называется умозаключение, в котором нет логического следования между посылками и заключением, т.е. возможен случай, когда из истинных посылок можно получить ложное заключение.

Недедуктивные умозаключения в логике считают *неправильными* умозаключениями.

К недедуктивным умозаключениям относятся *индуктивные умозаключения*, (от лат. слова «induction» – «наведение»), примерами которых являются *неполная индукция, аналогия, обобщение* и др. В индуктивных умозаключениях, в отличие от дедуктивных, нельзя сформулировать правила, устанавливающие условия, при соблюдении которых заключение будет обязательно истинным. Индуктивное умозаключение от истинных посылок ведет к заключению, являющимся не истинным, а только вероятным, предположительным.

Пример 13. Один из приёмов ознакомления младших школьников с переместительным свойством сложения заключается в следующем. Используя различные средства наглядности, учащиеся вместе с учителем устанавливают, что, например, $2+3=3+2$, $5+4=4+5$, $2+7=7+2$. А затем на основе полученных равенств делают вывод: для всех натуральных чисел a и b верно равенство: $a+b=b+a$.

В данном умозаключении приведены три посылки частного характера, которые показывают, что *некоторые* натуральные числа обладают свойством: от перестановки слагаемых сумма не меняется. На этой основе сделан вывод, что этим свойством обладают *все* натуральные числа. Такие умозаключения называют *неполной индукцией*.

Неполной индукцией называется умозаключение, в котором на основании того, что *некоторые* объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают *все* объекты данного класса.

Вывод в умозаключении примера 13 является истинным, но так бывает не всегда.

Пример 14. Умозаключение «Если $3+5<3\cdot 5$, $2+7<2\cdot 7$, $4+8<4\cdot 8$, следовательно, для всех натуральных чисел верно неравенство $a+b<a\cdot b$ » является *неправильным*, т.е. из того, что для некоторых натуральных чисел их сумма меньше произведения этих чисел, сделанный вывод, что этим свойством обладают все натуральные числа, является ложным. В этом можно убедиться, если привести контрпример: сумма 1 и 2 не меньше произведения 1 и 2, то есть $1+2\geq 1\cdot 2$. К выводам, полученным с помощью неполной индукции, надо относиться критически, т.к. они носят характер предположения и нуждаются в дальнейшей проверке: их надо либо доказывать, либо опровергать.

Пример 15. Рассмотрим ещё один пример использования неполной индукции. Известно, что 15 делится на 5, 25 делится на 5, 35 делится на 5. Следовательно, можно утверждать, что любое число, запись которого оканчивается цифрой 5, делится на 5. В данном случае заключение истинно – нам известен признак делимости на 5.

Выводы, получаемые при неполной индукции носят характер предположения, гипотезы. Их надо доказывать или опровергать.

В начальном курсе математике широко используется такой вид индуктивных умозаключений, как *аналогия* (греч. слово «analogia» означает «сходство, соответствие»).

Аналогией называется умозаключение, в котором на основе сходства двух объектов по некоторым признакам делается вывод об их сходстве и по другим признакам.

Заметим, что в этом определении термин «объект» понимается в широком смысле: это может быть предмет, элемент, модель, рисунок, выражение, задача и т.д. В качестве признаков могут выступать свойства объектов, отношения между ними, способы деятельности и т.п.

Рассуждение по аналогии дало науке много блестящих результатов, нередко совершенно неожиданных. Аналогия важна тем, что наводит на догадки, предположения, способствует развитию математической интуиции. Однако подмеченная аналогия не может служить доказательством, а умозаключение по аналогии не дает достоверного знания. Если посылки такого умозаключения истинны, то это ещё не означает, что и его заключение будет истинным, т.е. умозаключение, сформулированное по аналогии с истинными высказываниями, может оказаться ложным.

Пример 16. По аналогии с истинными высказываниями «Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3» и «Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9» – можно сформулировать умозаключение: «Если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27». Но этот вывод ошибочен, т.к. легко привести пример, опровергающий этот вывод: в числе 1899 сумма цифр равна 27, эта сумма делится на 27, но число 1899 на 27 не делится.

Тем не менее, аналогия используется в обучении младших школьников довольно широко, например, при изучении свойств объектов, отношений между ними и действий с объектами.

Пример 17. «У четырёхугольника 4 угла и 4 стороны, следовательно у пятиугольника 5 углов и

5 сторон».

Пример 18. Наглядный материал: «Чудесный мешочек» с объёмными геометрическими фигурами.

Задание ученику: «Достань одну фигуру и назови».

Варианты ответов: - шар,

- шар,

- шар.

- Здесь, наверное, все шары.

Пример 19. «Если треугольник разделить пополам, получится два треугольника, следовательно, если квадрат разделить пополам получится два квадрата» (рис. 28).

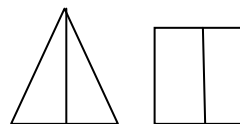


Рис. 28

Выводы полученные по аналогии могут быть истинными или ложными, их надо доказывать дедуктивным способом или опровергать контрпримером. Аналогия важна тем, что наводит нас на догадки, способствует развитию математической интуиции.

Аналогия используется при «открытии» новых свойств изучаемых объектов. Например, если при изучении классов было установлено, что в классе единиц три разряда – единицы, десятки и сотни, а в классе тысяч тоже три разряда – единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч, то вывод о числе разрядов и их названий в классе миллионов учащиеся могут сделать по аналогии самостоятельно.

Аналогия может быть использована для установления отношений между данными объектами. Например, учащиеся установили, что $5 \cdot (4+6) > 5 \cdot 4 + 5 \cdot 5$, т.к. $5 \cdot (4+6) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6$, а $5 \cdot 6 > 5 \cdot 5$. Рассматривая далее выражения $3 \cdot (8+9)$ и $3 \cdot 8 + 3 \cdot 7$, учащиеся могут по аналогии сделать вывод о том, что $3 \cdot (8+9) > 3 \cdot 8 + 3 \cdot 7$. Проверить правильность этого вывода можно либо путем рассуждений, аналогичных тем, что проводились при выполнении первого задания, либо при помощи вычислений.

Аналогия может использоваться и для выводов о способе действия на основе изучения другого способа. Так, после рассмотрения способа умножения двухзначного числа на однозначное на примере умножения 27 на 3 [$27 \cdot 3 = (20+7) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 7 \cdot 3$] детям предлагается умножить 721 на 4. Действуя по аналогии, они устанавливают, что $721 \cdot 4 = (700+20+1) \cdot 4 = 700 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 2800 + 80 + 4 = 2884$. Далее по аналогии устанавливают, как умножить 6288 на 3.

Следующим шагом может быть обобщение, т.е. получение правила умножения многозначного числа на однозначное, т.е. использование неполной индукции.

Ошибки в рассуждениях, неправильные чертежи, неумение использовать теоремы и формулы приводят к ложному заключению.

Математики стали специально придумывать умышленно неправильные рассуждения, имеющие видимость правильного. Такие рассуждения называются *софизмы*. Разбор софизмов формирует умение правильно рассуждать, помогает усваивать многие математические факты.

Пример 20.

Верно ли равенство?

$$35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$$

Вынесем общий множитель за скобку.

$$5 \cdot (7+2-9) = 6 \cdot (7+2-9)$$

Разделим правую и левую часть равенства на выражение в скобках.

$$5=6$$

Где ошибка?

На 0 делить нельзя !

Таким образом, изученные нами виды умозаключений можно представить следующей схемой (рис 29).

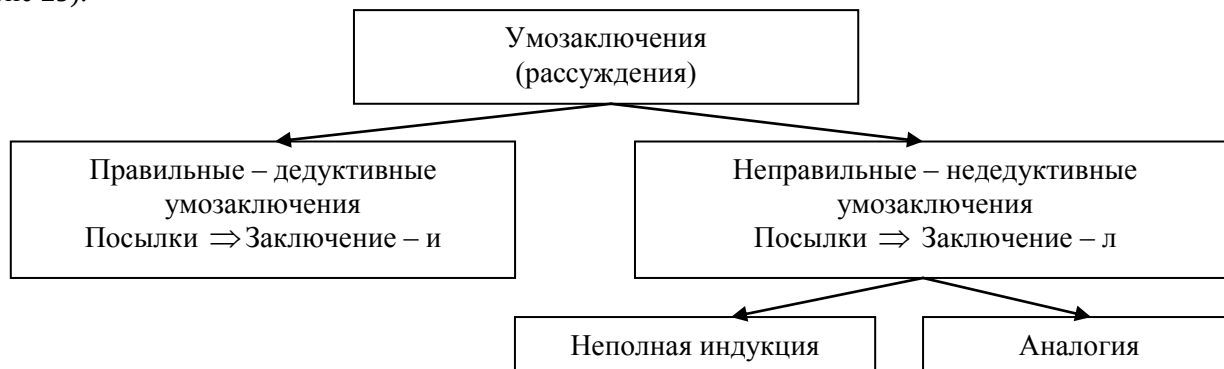


Рис. 29

4.4. Математическое доказательство

В повседневной жизни, говоря о доказательстве, имеют в виду просто проверку высказанного утверждения. В математике *проверка* и *доказательство* – это разные вещи, хотя и связанные между собой.

Пусть, например, требуется доказать утверждение «Если в четырехугольнике три угла прямые, то он – прямоугольник».

Проверка данного утверждения заключается в практической работе: возьмем какой-либо четырехугольник, у которого три угла прямые, и, измерив четвертый, убедимся в том, что он тоже прямой, следовательно четырехугольник – прямоугольник. Эта проверка делает наше утверждение правдоподобным, но ещё не доказанным.

Чтобы доказать данное утверждение, рассмотрим произвольный четырехугольник, у которого три угла прямые. Т.к. в любом выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360° , то и для выбранного четырехугольника она равна 360° . Сумма трех прямых углов равна 270° , значит, четвертый угол равен 90° ($360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$). Если все углы четырехугольника прямые, то он – прямоугольник. Доказали, что данный четырехугольник с тремя прямыми углами является прямоугольником.

Доказательство – рассуждение, устанавливающее истинность какого-либо утверждения путем приведения других утверждений, истинность которых уже доказана.

В логике считают, что если рассматриваемое утверждение логически следует из уже доказанных утверждений, то оно обоснованно и также истинно.

Таким образом, основой математического доказательства является дедуктивный метод. А само доказательство – это цепочка умозаключений, причем заключение каждого из них (кроме последнего) является посылкой для последующего умозаключения.

Например, в приведенном выше доказательстве утверждения «Если в четырехугольнике три угла прямые, то он – прямоугольник» можно выделить цепочку умозаключений:

1. В любом выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360° ; данная фигура – выпуклый многоугольник. Следовательно, сумма углов в нем равна 360° .

2. Если известна сумма всех углов четырехугольника и сумма трех из них, то вычитанием можно найти величину четвертого; сумма всех углов четырехугольника равна 360° , сумма трех углов 270° . Следовательно, величина четвертого равна 90° .

3. Если в четырехугольнике все углы прямые, то этот четырехугольник – прямоугольник; в данном четырехугольнике все углы прямые. Следовательно, он прямоугольник.

Все приведенные умозаключения выполнены по правилу заключения и, значит, являются дедуктивными.

Итак, *структура математического доказательства* включает в себя утверждение, которое доказывается, и систему истинных утверждений, с помощью которых проводят доказательство.

По способу проведения (т.е. по форме) доказательство делятся на *прямые* и *косвенные*.

При прямом доказательстве задача состоит в том, чтобы найти такие аргументы (доказанные ранее истинные утверждения), из которых логически следует нужное утверждение.

Косвенное доказательство устанавливает справедливость данного утверждения тем, что раскрывает ошибочность противоположного ему допущения.

К прямым доказательствам относятся, например, *дедуктивный метод* и *полная индукция*.

Рассмотренное выше доказательство было прямым, оно проведено по *дедуктивному методу* – в нем, основываясь на некотором истинном утверждении и с учетом условия теоремы, строилась цепочка дедуктивных умозаключений, которая привела к истинному заключению.

Полная индукция – это такой метод доказательства, при котором истинность утверждения следует из его истинности во всех частных случаях.

Например, нужно доказать утверждение «Каждое составное число, большее 4, но меньшее 20, представимо в виде суммы простых чисел».

По условию мы имеем составные числа от 4 до 20: 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18. Каждое из них можно представить в виде суммы двух простых чисел: $6=3+3$, $8=3+5$, $9=2+7$, $10=5+5$, $12=5+7$, $14=7+7$, $15=2+13$, $16=3+13$, $18=5+13$. Так как данное утверждение истинно во всех частных случаях, то данное утверждение истинно, т.е. доказано.

К косвенным доказательствам относятся *метод контрапозиции* и *метод доказательства от противного*.

В основе *метода контрапозиции* лежит закон контрапозиции импликации. Метод заключается

в следующем: чтобы доказать истинность теоремы $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$, доказывают истинность теоремы, обратной противоположной, т.е. теоремы $(\forall x \in X) \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$.

Метод доказательства от противного заключается в следующем. Чтобы доказать теорему $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$, допускают, что заключение теоремы $B(x)$ – ложно, а, значит, его отрицание истинно. Присоединив предложение $\overline{B(x)}$ к совокупности истинных посылок, используемых в процессе доказательства (среди них и условие $A(x)$), строят цепочку дедуктивных умозаключений до тех пор, пока не получат утверждение, противоречащее одной из посылок и, в частности, условию $A(x)$. При установлении противоречия процесс доказательства заканчивают и говорят, что полученное противоречие доказывает истинность утверждения $B(x)$, а значит истинность импликации $A(x) \Rightarrow B(x)$ и всей теоремы $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$.

Таким образом, мы вкратце изучили способы математического доказательства, которые можно представить следующей схемой (рис. 30).

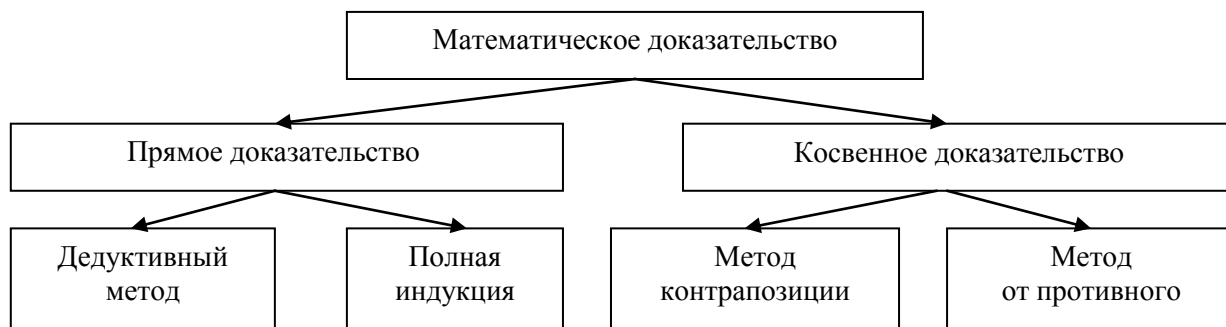


Рис. 30

Задания для самоконтроля

Изучив тему «Теоремы. Умозаключения (рассуждения)», студент должен *уметь*:

- строить дедуктивные умозаключения, используя правила заключения, отрицания, силлогизма;
- устанавливать правильность умозаключений с помощью кругов Эйлера;
- строить умозаключения, используя неполную индукцию и аналогию;
- проводить несложные доказательства, в том числе и методом от противного, а также используя полную индукцию;
- применять знания о математических доказательствах к анализу материала учебников математики для начальных классов.

Проверить сформированность названных умений можно, выполнив *следующие задания*.

1. В следующих теоремах выделите преамбулу, условие и заключение:

а) Если точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, то она равноудалена от концов этого отрезка.

б) Если натуральное число оканчивается двумя нулями, то оно кратно 4.

в) Если углы A и B являются вертикальными, то они равны.

г) Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

2. В следующих теоремах выделите преамбулу, условие и заключение, предварительно сформулировав их с помощью логической связки «если..., то...»:

а) Во всяком треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

б) Отрезок прямой, соединяющий какие-нибудь две точки, короче всякой ломаной, соединяющей эти же точки.

в) Перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых есть также перпендикуляр к другой.

г) Сумма величин смежных углов равна 180° .

д) Параллелограмм имеет центр симметрии.

е) Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

ж) Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.

з) Всякий квадрат x является правильным многоугольником.

и) Любые три точки окружности не лежат на одной прямой.

3. Сформулируйте следующие теоремы без использования логической связки «если..., то...»:

а) Если многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность.

б) Если две прямые пересекаются, то они лежат в одной плоскости.

в) Если две стороны треугольника равны друг другу, то биссектриса угла между ними

перпендикулярна третьей стороне и делит её пополам.

г) Если число делится на 3, то сумма цифр числа делится на 3.

д) Если хотя бы один сомножитель делится на данное число, то и произведение делится на это число.

4. На множестве всех треугольников плоскости заданы высказывательные формы $A(x)$: «Треугольник x равнобедренный», $B(x)$: «Два внутренних угла треугольника x равны между собой», $C(x)$: «Три внутренних угла треугольника x равны между собой», $D(x)$: «Две высоты треугольника x равны между собой».

а) Какие из этих высказывательных форм находятся в отношении логического следования? Составьте из соответствующих пар высказывательных форм теоремы.

б) Сформулируйте эти теоремы, используя термины «необходимо», «достаточно».

5. Для каждой пары высказывательных форм сформулируйте теорему вида $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$ и обратную теорему. Укажите, в каких случаях обратная теорема истинна.

а) $A(x)$: «Число x оканчивается нулем», $B(x)$: «Число x делится на 5», где $x \in \mathbb{Z}_0$.

б) $A(x)$: «Треугольник x равносторонний», $B(x)$: «Высоты треугольника x равны между собой», $x \in X$, где X – множество треугольников.

в) $A(x)$: «Параллелограмм x – ромб», $B(x)$: «Диагонали параллелограмма x делят углы пополам», $x \in X$, где X – множество параллелограммов.

6. Для каждой из следующих теорем сформулируйте обратную, противоположную и обратную противоположную. Установите значение истинности теоремы каждого вида.

а) Если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

б) Если углы смежные, то сумма их величин равна 180° .

в) Если каждое слагаемое делится на данное число, то и сумма их делится на это число.

г) Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

д) В правильный многоугольник можно вписать окружность.

е) Длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон.

ж) Если число делится на 9, то оно делится на 3.

7. На множестве X всех трапеций заданы высказывательные формы $A(x)$: «Трапеция x равнобедренная» и $B(x)$: «Диагонали трапеции x равны». Покажите, что данные высказывательные формы являются необходимым и достаточным условием друг для друга. Сформулируйте теорему вида $(\forall x \in X) A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

8. Определите, какие из следующих теорем истинны и какие из них являются по отношению друг к другу обратными, противоположными, обратными противоположной. Запишите все теоремы в символах.

а) Если каждое из слагаемых делится на 7, то и сумма делится на 7.

б) Если ни одно из слагаемых не делится на 7, то и сумма не делится на 7.

в) Если сумма делится на 7, то и каждое слагаемое делится на 7.

г) Если сумма не делится на 7, то и каждое слагаемое не делится на 7.

9. Выясните, какие из следующих утверждений истинны:

а) Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 5.

б) Для того чтобы натуральное число делилось на 5, достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 5.

в) Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 5 или цифрой 0.

г) Для того чтобы четырехугольник был ромбом, достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.

д) Для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.

10. Вставьте вместо многоточия слова «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно», чтобы получилось истинное высказывание:

а) Для того чтобы разность двух чисел была положительной,..., чтобы уменьшаемое было больше вычитаемого.

б) Для того чтобы сумма чисел делилась на 11,..., чтобы каждое слагаемое делилось на 11.

в) Для того чтобы число делилось на 24,..., чтобы оно делилось на 4 и 3.

г) Для того чтобы $(a-1) \cdot 5 = 0$,..., чтобы $a = 1$.

- д) Для того чтобы число делилось на 15,..., чтобы оно делилось на 5.
- е) Для того чтобы $2n > 7$,..., чтобы $n > 4$, где n – натуральное число.
- ж) Для того чтобы сумма двух чисел делилась на 2,..., чтобы каждое слагаемое было четным.
- з) Для того чтобы сумма двух чисел делилась на 2,..., чтобы каждое слагаемое было нечетным.
11. Покажите, что следующие теоремы являются конъюнкцией двух теорем:
- а) На 5 делятся те и только те числа, запись которых оканчивается цифрой 0 или цифрой 5.
- б) Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда они перпендикулярны одной и той же прямой.
- в) Для того чтобы в прямоугольном треугольнике катет равнялся половине гипотенузы, необходимо и достаточно, чтобы угол, лежащий против этого катета, был равен 30° .
12. Выделите условие и заключение в каждой из следующих теорем:
- а) Во всяком прямоугольнике диагонали равны.
- б) Для того чтобы четырехугольник был квадратом, достаточно, чтобы в нем был хотя бы один прямой угол.
- в) Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо, чтобы его противоположные стороны были попарно равны.
- г) Для того чтобы число делилось на 25, достаточно, чтобы его запись оканчивалась двумя нулями.
13. Выделите посылки и заключение в следующих умозаключениях:
- а) Если число натуральное, то оно целое; если число целое, то оно рациональное. Следовательно, если число натуральное, то оно рациональное.
- б) Если число натуральное, то оно целое. Число 138 – натуральное; следовательно, оно целое.
- в) Всякое натуральное число целое; число 138 – целое; следовательно, оно натуральное.
- г) Всякое натуральное число целое; число 0,2 не является целым. Следовательно, оно не является и натуральным.
14. Проанализируйте схему каждого умозаключения из упражнения 13 и сделайте вывод о правильности данных умозаключений. Если ли среди них умозаключения, не являющиеся дедуктивными?
15. Используя правило заключения, закончите умозаключение так, чтобы оно было дедуктивным:
- а) Если четырехугольник – прямоугольник, то в нем диагонали равны. Четырехугольник $ABCD$
- б) Равные треугольники имеют равные площади. Треугольники ABC и KLM
- в) Для того чтобы ромб был квадратом, достаточно, чтобы в нем был прямой угол. Ромб $ABCD$
16. Используя правило отрицания, закончите умозаключения из упражнения 15 так, чтобы они были дедуктивными.
17. Используя правило силлогизма, закончите следующие умозаключения так, чтобы они были дедуктивными:
- а) Если x делится на y и y делится на z , следовательно... .
- б) Всякий квадрат является прямоугольником, всякий прямоугольник является четырехугольником. Следовательно... .
18. Восстановите общую посылку в умозаключении:
- а) Число 12 – натуральное, следовательно, оно положительное.
- б) Число 15 – нечетное, следовательно, оно не делится на 2.
19. Постройте дедуктивное умозаключение, доказывающее, что:
- а) Число 130 делится на 10.
- б) Число 137 не делится на 10.
- в) Четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник.
- г) Четырехугольник $ABCD$ не является прямоугольником.
20. Используя теоретико-множественный язык, проверьте, правильны ли следующие умозаключения:
- а) Всякий квадрат является прямоугольником; четырехугольник $ABCD$ – не квадрат, следовательно, он не является прямоугольником.
- б) Некоторые прямоугольники – квадраты; все квадраты – правильные многоугольники. Следовательно, некоторые прямоугольники являются правильными многоугольниками
- в) Все деревья – растения. Дуб – дерево. Значит дуб – растение.

г) Все квадраты – ромбы. В каждом ромбе диагонали взаимно перпендикулярны; следовательно, диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.

21. Сравните значение выражений $(a+6)(7-a)$ и $a(a-1)$ при $a = -3, 0, 2$. Верно ли, что при любом целом a значение первого выражения больше второго?

22. Даны верные равенства: $74-47=27$, $52-25=27$, $63-36=27$. Верно ли, что разность любого двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 27?

23. Учителю необходимо подвести учащихся к выводу о том, что «при сложении любого числа с нулем получается то число, которое складывали с нулем». Какой метод рассуждений вы выберете?

24. Известно, что если число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3. Верны ли следующие высказывания, сформулированные по аналогии с данным.

а) Если число делится на 10, то оно делится на 2 и на 5.

б) Если число делится на 12, то оно делится на 2 и на 6.

в) Если число делится на 14, то оно делится на 2 и на 7.

25. Докажите, что если к произведению двух последовательных натуральных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

26. Докажите, что значением выражения $(x-4)(2x+1)$ будет целое число, если x принимает значения $-1, 0, 1, 4$.

27. Разность двух углов равна 10° . Докажите, что эти углы не могут быть вертикальными.

28. Следующие теоремы докажите методом контрапозиции:

а) Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.

б) Во всяком треугольнике против большего угла лежит и большая сторона.

29. Докажите следующие утверждения:

а) Если натуральное число не кратно 3, то значение выражения n^2+2 кратно 3.

б) Если четыре последовательные числа нечетны, то произведение крайних чисел меньше произведения средних на 8.

30. Докажите следующие утверждения методом от противного:

а) Произведение нечетных чисел есть число нечетное.

б) Если x^2 – четное число, то x – четно.

в) Ни один треугольник не может иметь два прямых угла.

31. Используя индукцию и дедуктивный метод, докажите следующие утверждения:

а) Произведение средних чисел из четырех последовательных натуральных чисел больше произведения крайних чисел на 2.

б) Произведение двух последовательных нечетных натуральных чисел делится на 4.

32. Каким числом может быть сумма двух нечетных чисел? Рассмотрите несколько частных случаев и выскажите предположение. Каким образом можно доказать его истинность?

33. Докажите, что любое однозначное число является решением неравенства $x+3>x$. Какой способ доказательства используется?

34. Докажите, используя определение понятия «меньше», что $12<15$.

35. Покажите, что, обосновывая решение следующих задач, младшие школьники могут использовать полную индукцию:

а) Дан ряд чисел: 3545, 3550, 3555, 3050, 3565. Можно ли утверждать, что каждое число этого ряда делится на 5?

б) Можно ли утверждать, что значения всех данных выражений одинаковы: $326326:326$; $236236:236$; $626626:626$.

Проектная задача. «Доказательство в начальном курсе математики».

1. Какие способы доказательства используются в начальном курсе математики? Ответы подтвердите примерами.

2. В каких учебниках математики для начальных классов есть задания, предполагающие доказательство?

3. Какими заданиями на доказательство можно дополнить эти учебники?

ЛИТЕРАТУРА

1. Аматава Г.М. Математика: в 2 кн. Кн. 1: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / Г.М. Аматава, М.А. Амагов. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 256 с.
2. Васильева Т.А. Элементы математической логики: учебное пособие для студентов, обучающихся по специальности 031200 «Педагогика и методика начального образования». – Кызыл: Издательство ТывГУ, 2005. – 113 с.
3. Вечтомов Е.М. Математика: логика, множества, комбинаторика: учеб. пособие для академического бакалавриата / Е.М. Вечтомов, Д.В. Широков. – 2-е изд. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 243 с.
4. Виленкин Н.Я. Математика: учеб. пособие для студентов пед. институтов / Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1977. – 352 с.
5. Виленкин Н.Я. Задачник-практикум по математике. – М.: Просвещение, 1977. – 189 с.
6. Гетманова А.Д. Занимательная логика для школьников: Ч. 1 / А.Д. Гетманова. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1998. – 240 с.
7. Гетманова А.Д. Логика: учебник, словарь, практикум / А.Д. Гетманова. Изд. 2-е. – М.: Академический Проект, 2010. – 712 с.
8. Гладких О.Б. Математическая логика : учебно-методическое пособие / О.Б. Гладких, О.Н. Белых ; Министерство образования Российской Федерации, Елецкий государственный университет. - Елец : ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011. - 142 с. - Библиогр. в кн. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=272140>
9. Лаврова Н.Н. Задачник-практикум по математике: учеб. пособие для студентов-заочников I–III курсов фак. педагогики и методики нач. обучения пед. ин-тов / Н.Н. Лаврова, Л.П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1985. – 183 с.
10. Математика. Сборник задач: учеб. пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / Л.П. Стойлова, Е.А. Конобеева, Т.А. Конобеева, И.В. Шадрина. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 240 с.
11. Методика обучения математике. Формирование приемов математического мышления: учеб. пособие для вузов / под ред. Н.Ф. Талызиной. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 193 с.
12. Сборник задач по математике: пособие для педучилищ / А.М. Пышкало, Л.П. Стойлова, Н.Н. Лаврова, Н.П. Ирошников. – М.: Просвещение, 1979. – 208 с.
13. Стойлова Л.П. Математика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / Л.П. Стойлова. – 3-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 464 с. – (Сер. Бакалавриат).
14. Стойлова Л.П. Основы начального курса математики: учеб. пособие для учащихся пед.училищ / Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988.
15. Столяр А.А. Математика. (Для студентов I курса факультетов подготовки учителей начальных классов педагогических вузов.) / А.А. Столяр, М.П. Лельчук. – Минск.: Вышэйшая школа, 1975. – 272 с.
16. Теоретические основы формирования математических представлений у детей дошкольного возраста: учебно-методическое пособие для студентов направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиль «Дошкольное образование» / сост. Ч.М. Ондар. – Кызыл: Изд-во ТувГУ, 2016. – 72 с.
17. Тонких А.П. Математика: учебное пособие для студ. подготовки учителей нач. классов. – М.: Книжный дом «Университет», 2002.
18. Царева С.Е. Методика преподавания математики в начальной школе: учебник для студ. учреждений высш. образования / С.Е. Царева. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 496 с.
19. Шадрина И.В. Теория и методика математического развития: учебник и практикум для СПО / И.В. Шадрина. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 279 с.

Учебное издание

Основы начального курса математики. Элементы математической логики

*Учебно-методическое пособие
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
Педагогическое образование профиля «Начальное образование»*

Составитель
**Ондар Чечена Момужаевна
Кара-Сал Надежда Маасовна**

Редактор *А.Р. Норбу*
Дизайн обложки *К.К. Сарыглар*

Сдано в набор: 15.11.2018. Подписано в печать: 14.12.2018
Формат бумаги 60×84 ¹/₈. Бумага офсетная
Физ. печ. л. 7,4. Усл. печ. л. 6,9. Заказ № 1465. Тираж 50 экз.

667000, г. Кызыл, Ленина, 36
Тувинский государственный университет
Издательство ТувГУ