Г.А. Троякова, А.С. Монгуш

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Кызыл
2018

Тувинский государственный университет

Г.А. Троякова, А.С. Монгуш

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Задачник-практикум для студентов физико-математического факультета

Кызыл
2018

УДК 373:51
ББК 22.1я721
Т76

Печатается по решению учебно-методического совета
Тувинского государственного университета

Троякова Г.А.
Математическая логика: задачник-практикум для студентов физико-математического факультета / Г.А. Троякова, А.С. Монгуш. – Кызыл: Изд-во ТувГУ, 2018. – 101 с.

Задачник-практикум предназначен для студентов педагогических университетов, изучающих математическую логику. Внимание уделено четырем разделам: алгебра логики, исчисление высказываний, логика предикатов, математические теории. Задачник-практикум написан в соответствии со стандартами 2016 года для математических специальностей.

Рецензенты:

- доцент кафедры математического анализа и МПМ ТувГУ, кандидат педагогических наук Н.М. Кара-Сал
- Заведующий кафедрой физико-математического и дистанционного образования ТИРОиПК кандидат педагогических наук С.К. Сат

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Особенности математического мышления объясняются особенностями математических абстракций и многообразием их взаимосвязей. Они отражаются в логической систематизации математики, в доказательстве математических теорем. В связи с этим современную математическую логику определяют как раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики.

Изучение математической логики важно в силу той роли, которую они играет в освещении природы математики. Целью настоящего курса является изложение основ математической логики и ознакомление студентов с формализацией математического языка, формализованным аксиоматическим методом построения математических теорий и проблемами непротиворечивости, полноты, разрешимости.

Изучение математической логики будет способствовать более ясному представлению об общей структуре математических теорий, о математике в целом, следовательно, и о школьной математике.

Важно, что в настоящее время с введением ФГОС третьего поколения все более актуальной становится потребность изменения методики преподавания дисциплин. Одно из требований к условиям реализации основных образовательных программ данного бакалавриата на основе ФГОС является широкое использование компетентностного подхода к обучению, с целью формирования и развития знаний, умений и навыков, составляющих ключевые, профессиональные и специальные предметные компетенции обучающихся. Данный задачник-практикум ориентирован на обучение на компетентностной основе, применение бально-рейтинговой системы и организацию самостоятельной работы студентов.

Цель: формирование представлений о понятиях и методах математической логики, их месте и роли в системе математических наук, приложениях естественных наук.

Задача дисциплины: сформировать представление о месте и роли математической логики в современном мире, об основных понятиях математической логики; сформировать определенный навык использования математической логики, ориентированного на науки педагогического профиля.

I. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

1.1. Формулы алгебры логики. Равносильные формулы

Под символом ***x*** мы понимаем некоторое высказывание, которое может быть истинным или ложным. Нам лишь важно, что x – переменная, которая может принимать лишь два значения «**истина – 1**», «**ложь – 0**». Над высказываниями выполняются операции: **$x \wedge y$ – конъюнкция, x v y – дизъюнкция, $x \to y$ – импликация, $x \leftrightarrow y$ – эквиваленция, $\neg x$ - отрицание.** Имеют место и другие обозначения конъюнкции: x&y, xy.

На операции можно смотреть как на функции с областью определения $\{0, 1\}^n$ и областью значений $\{0, 1\}$.

x	y	$x \wedge y$	x v y	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$\neg x$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Здесь импликация определена как операция, но не как отношение следования одного из другого.

С помощью логических операций над высказываниями можно строить различные сложные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками, $((x \wedge y) \vee \neg z)$.

Определение формулы (индуктивное):

1. Всякая переменная: x, y, z… взятая в отдельности есть формула, символы 0, 1 – также формулы.

2. Если A, B – формулы, то следующие выражения суть формулы: $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $\neg A$.

3. Никакие другие выражения, составленные из переменных и символов логических операций, не являются формулой.

Обозначаем формулы буквами A, B, C.

Пример: x, y, $(x \wedge y)$, $((x \wedge y) \to y)$ – формулы.

$(x \wedge y) \rightarrow$, $x \wedge y$ – формулами не являются.

В определении формулы четко вырисована структура: у любой формулы есть главный логический знак, тот, который фигурирует последним.

Скобки играют большую роль, но и делают записи громоздкими. Мы договоримся о сокращении числа написания скобок. Внешние скобки опустим. Договоримся о приоритете логических символов, т.е. об их силе связывания. Порядок таков: $\neg$, $\wedge$, v, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

И вместо $((x \wedge y) \rightarrow x)$ пишем $xy \rightarrow x$

Определение подформулы (индуктивное):

1.Подформулой формулы пункта 1 является она сама.

2. Подформулами формулы пункта 2 являются: A, B, она сама, все подформулы формулы A и все подформулы формулы B.

Часто мы будем говорить о вхождении переменной в формулу. Например, в формуле $xyz \rightarrow y$ два вхождения переменной y.

Пусть дана формула $A = \neg(x \vee y) \rightarrow x\neg y$. Здесь переменные принимают значения из множества $\{0,1\}$. В зависимости от значений x, y определенное значение принимает формула A.

x	y	x v y	$\neg$(x v y)	$\neg$ y	x$\neg$ y	$\neg$(x v y) $\rightarrow$ x$\neg$ y
1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0

Придавая значения α_1 ,α_2 , …, α_n всем переменным, а их 2^n (почему?), мы вычислим соответствующие значения формулы A. Фактически формула A является суперпозицией функций v, $\rightarrow$, $\neg$

У нас есть эффективный способ вычисления значения формулы в двоичном наборе – алгоритм вычисления истинности всякой формулы.

Введем понятие равносильных формул.

Определение. Даны две формулы A и B алгебры логики и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – список переменных, входящих в формулы A и B. Две формулы алгебры логики A и B называются **равносильными**, если они принимают одинаковые логические значения на каждом наборе значений переменных и записываются: $A \equiv B$ или $A = B$.

Пример: $x \to y = \neg x \vee y$, $x \vee \neg x \neq (x \vee \neg x)y$, $y = (x \vee \neg x)\, y$

Формулы различны, функции одинаковы.

Определение. Формула A называется **тождественно истинной** (тавтологией), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее переменных.

Определение. Формула A называется **тождественно ложной (противоречие)**, если она принимает значение 0 при всех значениях входящих в нее переменных.

Очевидно, что отношение равносильности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Между понятиями равносильности и эквивалентности существует следующая связь: если формулы A и B равносильны, то формула $A \leftrightarrow B$– тавтология, и обратно, если формула $A \leftrightarrow B$ – тавтология, то A и B равносильны.

Основные равносильности:

1. $xy = yx$
2. $x \vee y = y \vee x$
3. $x(yz) = (xy)z$
4. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
5. $(x \vee y)z = (xz) \vee (yz)$
6. $xy \vee z = (xz) \vee (yz)$
7. $\neg xy = \neg x \vee \neg y$
8. $\neg (x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
9. $x \to y = \neg x \vee y$
10. $x \vee y = \neg x \to y$
11. $x \to y = \neg y \to \neg x$
12. $\neg\neg x = x$ – закон снятия двойного отрицания
13. $xx = x$ – закон
14. $x \vee x = x$ идемпотентности

15. $x \wedge 0 = 0$

16. $x \wedge 1 = x$

17. $x \vee 1 = 1$

18. $x \vee 0 = x$

19. $x \vee \neg x = 1$

20. $x \wedge \neg x = 0$ – закон противоречия.

Выделим ряд равносильностей, которые встречаются часто и позволяют значительно упростить формулу. Здесь символами A, B обозначаются произвольные формулы

Правила сокращения:

1. $Ax \vee A\neg x = A$	склеивание
2. $Ax \vee \neg x = A \vee \neg x$	удаление
$A\neg x \vee x = A \vee x$	удаление
3. $A \vee AB = A$	поглощение
$A(A \vee B) = A$	поглощение

Данные правила предлагается доказать самостоятельно

Определение. Операция подстановки A_C^x – результат замены каждого вхождения переменной x формулой C.

Тогда, если A = B, то $A_C^x = B_C^x$

Примеры упрощения формул:

1. $(\neg(x \vee y) \rightarrow x \vee y)y = (x \vee y \ \vee \ x \vee y)y = (x \vee y)y = xy \vee y =$
$= (x \vee 1)y = y$

2. $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z)) = \neg(\neg x \vee y) \vee (\neg(\neg y \vee z) \vee$
$\vee (\neg(x \vee y) \vee z)) = x\neg y \ \vee \ y\neg z \ \vee \ \neg x\neg y \ \vee \ z = \neg y(x \vee \neg x) \vee$
$\vee (y \vee z)(\neg z \vee z) = \neg y \vee y \vee z = 1.$

1.2. Закон двойственности

Пусть формула f содержит только операции $\neg$, $\vee$, $\wedge$. Назовем операцию $\wedge$ двойственной операции $\vee$ и наоборот.

Определение. Формулы А и A^* называются **двойственными**, если A^* получили из А путем замены в ней каждой операции на двойственную.

Пример: $A = (x \vee y)z$ и $A^* = (xy) \vee z$

ТЕОРЕМА: Если формулы А и В Равносильны, то равносильны и двойственные им формулы, т.е. $A^* = B^*$

1.3. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) и совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)

Определение. Элементарной конъюнкцией n переменных называется конъюнкция переменных или их отрицаний. (ЭК).

Элементарную конъюнкцию можно записать:

$$x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}, \quad x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, \text{если } \alpha_i = 1 \\ \neg x_i, \text{если } \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Определение. Дизъюнктивной нормальной формой формулы А (ДНФ А) называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Для любой формулы А алгебры логики можно путем равносильных преобразований получить ее ДНФ, причем не единственную.

Пример: $A = x(x \to y) = x(\neg x \vee y) = (x\neg x) \vee (xy) = xy$

ДНФ $A = (x\neg x) \vee (xy)$, ДНФ $A = xy$

Среди всех дизъюнктивных нормальных форм формулы А можно выделить единственную со свойством С.

Определение. ДНФ А со свойством С называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой** формулы А (СДНФ А)

СДНФ может быть получена с помощью таблицы истинности (см I.5). Есть и другой способ:

1. равносильными преобразованиями из формулы А получаем ДНФ А;
2. если ДНФ А элементарная конъюнкция В не содержит переменной x_i, используем равносильность $B = B \wedge (x_i \vee \neg x_i) = (Bx_i) \vee (B\neg x_i)$
3. если в ДНФ А есть одинаковые элементарные конъюнкции одну можно отбросить, $B \vee B = B$

4. из ДНФ А можно исключить ЭК, содержащую x_i и ┐ x_i ;
5. если ЭК ДНФ А содержит $x_i x_i$, то можно заменить на x_i .

Получим СДНФ А .

Всякая не тождественно ложная формула имеет единственную СДНФ.

Пример: А = x v (y(x v ┐ y))

СДНФ = x v yx v y┐ y

С учетом x v (y v ┐ y) = (xy) v (x┐ y), имеем

СДНФ А = xy v x┐ y

1.4. Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) и совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

Определение. **Элементарной дизъюнкцией** n переменных называется дизъюнкция переменных или их отрицаний. (ЭД).

Элементарная дизъюнкция n переменных может быть записана в виде:

$$x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n}, x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, если\, \alpha_i = 1 \\ \neg x_i, если\, \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Определение. Конъюнктивной нормальной формой формулы А (КНФ А) называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Для любой формулы А алгебры логики существует КНФ А, причем не единственная.

Пример: А = ┐ (x v y) ↔ x ∧ y

КНФ А = (x v x v y)(x v y v y)(┐ x v ┐ y v ┐ x)(┐ x v ┐ y v ┐ y)

КНФ А = (x v y)(x v y)(┐ x v ┐ y)

Получите эти формы равносильными преобразованиями самостоятельно.

Определение. КНФ А называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой** формулы А (СКНФ А), если выполнены условия:

1. все элементарные дизъюнкции в КНФ А различны;
2. все элементарные дизъюнкции в КНФ А содержат все переменные.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Таблицы истинности. Выполнимость. Тавтологии. Совместность.

1.1.1. Построить таблицы истинности для следующих формул:

1. $(X \to Y) \vee (X \to Y \to X)$;
2. $X \to (Y \to X) \to \neg X$;
3. $((X \wedge \neg Y) \to Y) \to (X \to Y)$;
4. $X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$;
5. $X \wedge (Y \vee \neg X) \wedge ((\neg Y \to X) \vee Y)$.

1.1.2. Доказать, что следующие формулы являются тавтологиями:

1. $(X \to Y) \to (Y \to X)$;
2. $((X \to Y) \to X) \to X)$;
3. $(X \to Y) \vee (X \to \neg Y)$;
4. $(\neg X \to \neg Y) \to ((\neg X \wedge Y) \neg X)$;
5. $\neg X \to (X \to Y)$;
6. $X \wedge \neg X \to (Y \vee Z \to (Z \wedge \neg X))$;
7. $X \wedge \neg X \leftrightarrow \neg X$;
8. $(X \to Z) \to (Y \to T) \wedge (\neg Z \vee \neg T) \to \neg X \vee \neg Y$.

1.1.3. Определить, являются ли следующие формулы тавтологиями ($X \wedge Y$ можно заменить XY):

1) $X \vee \neg X$;
2) $(X \to \neg X) \to \neg X$;
3) $(X \to \neg X) \to X$;
4) $(\neg X \to X) \to X$;
5) $XY \to X$;
6) $X \to XY$;
7) $X \to (Y \to X)$;
8) $\neg X \to (X \to Y)$;
9) $(X \to Y) \to X$;
10) $(Y \to X) \to X$;
11) $X \to (Y \to XY)$;
12) $X \vee Y \to XY$;
13) $(X \to Y) X \to Y$;
14) $(X \to Y) \neg Y \to \neg X$;
15) $(X \vee Y) \neg X \to Y$;
16) $X \vee Y \to X$;
17) $X \to X \vee Y$;
18) $XY \to X \vee Y$;
19) $XY \to \neg X \neg Y$;
20) $Y \to X \vee \neg X$;

21) $X \vee \neg X \to Y$;

22) $(X \to \neg Y) \to (Y \to \neg X)$;

23) $(X \to Y) \to (Y \to X)$;

24) $XYZ \vee \neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$;

25) $(X \to Y)(X \to \neg Y)(\neg X \to \neg Y)$;

26) $X \to Y \leftrightarrow \neg Y \to \neg X$;

27) $X \to Y \leftrightarrow (X \to \neg Y) \to \neg X$;

28) $(X \to Z) \to ((Y \to Z) \to (X \vee Y \to Z))$;

29) $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to Z)$;

30) $((X \to Y) \to Z) \to (X \to (Y \to Z))$.

1.1.4. Выяснить, являются ли следующие формулы тавтологиями, выполнимыми или противоречием:

1. $((X \to Y \wedge Z) \to (\neg Y \to \neg X)) \to \neg Y$;
2. $X \vee Y \vee Z \to (X \vee Y) \wedge (X \vee Y)$;

3) $X \vee Y \to X \wedge Y$;

4) $(X \to Y) \to (Y \to X)$.

1.1.5. Доказать, что следующие высказывательные схемы выполнимы:

1) $\neg X \to X$;

2) $(X \vee Y) \to (Y \to X)$;

3) $(Y \to X \wedge Y) \wedge (X \vee Z \to Y)$;

4) $\neg(X \to \neg X)$;

5) $(X \to Y) \to (Y \to Y)$;

6) $(Y \to (X \wedge Z)) \wedge \neg((X \vee Z) \to Y)$.

1.1.6. Выяснить, выполнимы ли следующие формулы:

1) $(X \vee Y \vee Z) \to (X \to Z) \to (\neg Y)$;

2) $(X \vee Y \vee Z) \to (X \wedge Z) \to (\neg Z)$;

3) $(X \vee Y \vee Z) \to (X \wedge Z) \to (\neg Y) \to (\neg Z)$;

4) $(X \vee Y) \to (X \to Y) \to (Y \to Z)$;

5) $(X \vee Y) \to (Y \to Z) \to (\neg Z)$;

6) $(X \vee Y) \to (X \to Y) \to (Y \to Z) \to (\neg Z)$.

1.2. Равносильные формулы алгебры логики.

1.2.1. Построить формулу, равносильную $X \vee У$, использующую только импликацию $\to$

1.2.2. Построить формулу, равносильную $X \wedge Y$, использующую только импликацию $\to$ и эквиваленцию $\leftrightarrow$.

1.2.3. Доказать равносильность формул:

1. $X \to Y$ и $\neg Y \to \neg X$;

2. $(\neg X \to Y) \to Y$ и $X \to Y$;

3. $(X \to \neg Y) \to \neg X$ и $X \wedge Y$;

4. $\neg X \vee YZ \vee XY$ и $X \to Y$;

5. $X \leftrightarrow Y$ и $XY \vee \neg X \neg Y$;

6. $X \leftrightarrow Y$ и $(X \vee \neg Y)(\neg X \vee Y)$;

7. $(X \to Y)(Y \to X)$ и $X \leftrightarrow Y$;

8. $X \neg Y \vee \neg XZ \vee Y \neg Z$ и $\neg XY \vee \neg YZ \vee X \neg Z$;

9. $X \to (Y \to Z)$ и $Y \to (X \to Z)$;

10. $X \to (Y \to Z)$ и $XY \to Z$;

11. $X \to (Y \to Z)$ и $(X \to Y) \to (X \to Z)$;

12. $(X \to Z) \vee (Y \to Z)$ и $XY \to Z$;

13. $(X \to Z)(Y \to Z)$ и $X \vee Y \to Z$;

14. $(Z \to X)(Z \to Y)$ и $Z \to XY$;

15. $XY \to Z$ и $X \neg Z \to \neg Y$;

16. $(XY \to Z)(\neg Z \to XY)$ и Z;

17. $X(Z \to Y) \vee (X \to Z)Y$ и $(X \vee Y)(Y \vee \neg Z)$;

18. $((X \to Y) \to ((X \to \neg Y) \to \neg X) \to X$ и X;

19. $XY \vee \neg X \neg Z \vee \neg YZ$ и $\neg X \neg Y \vee XZ \vee Y \neg Z$;

20. $(\neg X \neg YZ \to X \vee Y) \neg Z \to \neg(\neg XZ \vee Y)$ и $\neg Y \vee Z$.

1.2.4. Доказать неравносильность формул:

1. $X \to Y$ и $Y \to X$;

2. $X(X \to Y)$ и Y;

3. $\neg XY \vee XY$ и XY;

4. $X \vee X \neg Y \vee \neg X \neg Y$ и $X \vee Y$;

5. $XY \vee \neg XY \vee X \neg Y$ и $XY \vee \neg X \neg Y$;

6. $X(Y \vee Z)$ и $X \vee YZ$;

7. $(X \to Y) \to Z$ и $X \to (Y \to Z)$;

8. $Z(X \to Y)$ и $ZX \to ZY$;

9. $Z(X\leftrightarrow Y)$ и $ZX\leftrightarrow ZY$;

10. $(X\vee Y)(X\vee\neg Y)(\neg X\vee Y)(\neg X\vee\neg Y)$ и $\neg XY$;

11. $X\neg YZ\vee\neg XYZ$ и $XY\neg Z\vee\neg XY\neg Z$;

12. $XYZ\vee XY\neg Z\vee\neg X\neg YZ$ и $XYZ\vee X\neg YZ\vee\neg X\neg YZ$.

1.2.5. Упростить формулу:

1. $\neg(\neg X\vee Y)\to(X\vee Y\to X)$;
2. $\neg(\neg X\wedge\neg Y)\vee(X\to Y)\wedge X$;
3. $(X\to Y)\wedge(Y\to X)\wedge(X\vee Y)$;
4. $(X\to Y)\wedge(Y\to\neg X)\wedge(Z\to X)$;
5. $X\wedge Z\vee X\wedge\neg Z\vee Y\wedge Z\vee\neg X\wedge Y\wedge Z$;
6. $(X\to X)\to X$;
7. $\neg X\to(X\to Y)$;
8. $X\to(Y\to X)$;
9. $((X\to Y)\to X)\to Y$;
10 $(X\leftrightarrow Y)\to(X\to Y)$

11. $\neg(X\to Y)\wedge(Y\to\neg X)$;
12. $X\to\neg X$;
13. $X\leftrightarrow\neg X$;
14. $(X\to Y)\to(Y\to X)$;
15. $(\neg X\to Y)\to(\neg Y\to X)$.

1.2.6. Выразить в равносильной данной формуле операции через отрицание $\neg$ и конъюнкцию $\wedge$:

1) $(X\vee Y)\to(\neg X\to Z)$;
2) $(\neg X\to Z)\vee\neg(X\to Y)$;
3) $(X\vee Y\vee Z\to X)\vee Z$;
4) $((X\to Y)\to Z)\to\neg X$;
5) $X\vee(Y\to Z)\to X$;

1.2.7. Выразить в равносильной данной формуле операции через отрицание $\neg$ и дизъюнкцию $\vee$:

1) $(X\to Y)\to Y\wedge Z$;
2) $\neg X\wedge\neg Y\to X\wedge Y$;
3) $\neg X\wedge\neg Y\vee Z\to Z\wedge\neg Y$;
4) $((X\to Y\wedge Z)\to(\neg Y\to\neg X))\to\neg Y$;
5) $(X\to Y)\wedge(Y\to Z)\to(X\to Z)$.

1.2.8. Найти равносильную формулу с тесными отрицаниями:

1. $\neg(X\wedge(\neg Y\vee\neg Z)\vee Z)$;
2. $\neg(X\wedge Y\vee\neg Z)\to\neg(X\wedge Z)$;
3. $\neg(T\to\neg(Z\wedge\neg(Y\wedge\neg X)))$;
4. $\neg(\neg(\neg(X\wedge Y)\to Y)\to(\neg X\wedge Z))$;
5. $\neg(\neg(X\vee\neg Y\to Z\vee\neg Z)\vee Y\wedge Z)$;
6. $(X\to Y)\wedge(Y\to X)\to X\vee Y$;
7. $(X\to Y)\wedge(Y\to\neg X)\to(Z\to X)$;
8. $(X\to Y)\wedge(\neg X\to\neg Y)\to(X\vee Y)\wedge(\neg X\vee\neg Y)$;
9. $((X\neg Y)\to Z)\to(X\neg Z)$;
10. $(X\to(Y\to Z))\to((X\to Y)\to Z)$.

1.2.9. Доказать, что формула является противоречием:

1. $(X\to Y)\wedge(Y\to X)\wedge(X\wedge\neg Y\vee\neg X\wedge Y)$;
2. $(X\wedge\neg Y\to\neg X\vee X\wedge Y)\wedge(\neg X\vee X\wedge Y\to X\wedge\neg Y)$;
3. $(X\to Y)\wedge(Y\to Z)\to\neg(X\to Z)$;
4. $(X\to Y)\wedge(X\to\neg Y)\wedge X$;
5. $X\wedge\neg Y\vee X\wedge\neg Z\leftrightarrow(X\to Y)\wedge(X\to Z)$.

1.2.10. Упростить :

1) $\neg X\neg Y Z\vee\neg X YZ\vee X\neg Y Z\vee XY\neg Z\vee XYZ$;
2) $(\neg X\vee\neg Y\vee\neg Z)(\neg X\vee Y\vee\neg Z)(X\vee\neg Y\vee\neg Z)(X\vee Y\vee\neg Z)(X\vee Y\vee Z)$;
3) $(X\vee Y\vee Z)(X\vee Y\vee\neg Z)(X\vee\neg Y\vee Z)$;
4) $\neg X YZ\vee X\neg Y Z\vee XYZ$;
5) $X(\neg Y\vee\neg Z)\vee(\neg X\vee YZ)(X\vee UV)$;
6) $(\neg X\vee Y\vee Z)(X\vee\neg Y\vee Z)(X\vee Y\vee Z)$.

1.2.11. Упростить:

1) $X\neg Y\vee\neg X YZ\vee XZ$;
2) $X\neg Y\vee X\neg Z\vee\neg X Y\neg Z$;
3) $\neg XYZ\vee\neg X\neg YZ\vee X\vee\neg X\neg Y\neg Z\vee T$;
4) $XYZ\vee X\neg YZ\vee XY\neg Z T$;
5) $X\vee\neg YZT\vee\neg Y\neg ZT\vee Y\vee\neg Y\neg Z\neg T$;
6) $XYZ\vee XY\neg Z\vee X\neg Y ZT\vee XYZ\neg T\vee XYZT$;

7) $XY(Z\neg T\vee \neg Y\vee X) \vee\neg X(Z \vee T)(X\vee Y)$;

8) $XYZ \vee YZT \vee X\neg Y \neg T\vee \neg X YZ\neg T\vee X\neg Y\neg T$;

9) $XT(\neg X\vee \neg YS \vee T) \vee \neg T(Y \vee \neg S)(X\vee Z) \vee XT\neg T$

1.2.12. С помощью равносильных преобразований доказать, что формула является тавтологией:

1. $((X\to Y)\to X)\to X$;
2. $(X\vee X)'\to Y$;
3. $(X\to Y)\to((\neg X\to Y)\to Y)$;
4. $(X\to Y)\to((X\to Y')\to\neg X)$;
5. $(X\to(X\to Y))\to(X\to Y)$;
6. $X \vee Y\to((X\to Y)\to Y)$;
7. $XY \vee X\neg Y\vee \neg XY \vee \neg X\neg Y$;
8. $X\vee (X\neg Y\to\neg X\vee \neg Y)(X\to\neg Y)$;
9. $(X\to Y)\to((Y\to Z)\to(X\to Z))$;
10. $(Y\to Z)\to((X\to Y)\to(X\to Z))$;
11. $(X\to Y)\to(XZ\to YZ)$;
12. $(XZ\to YZ)\to(X\to Y)$;
13. $(X\to Y)\to(X \vee Z\to Y \vee Z)$;
14. $(X\vee Y\to X \vee Z)\to X \vee (Y\to Z)$;
15. $X\vee Y\to((X\to Z)\to(\neg Y\neg Z)')$.

1.2.13. Упростить до двух вхождений всех переменных:

1. $XY \vee X\neg Y\vee \neg X Y'$;
2. $(X\vee Y)(X\vee \neg Y)(\neg X\vee Y)$;
3. $(X\neg Y\to X) \vee \neg Y\to X\neg Y$;
4. $(XY)'\to(X\vee Y)'\vee\neg XY$;
5. $\neg X\vee XY \vee \neg X Y\neg Z\vee XYZ$;
6. $(Z\to X)\to XY \vee YZ \vee X$;
7. $(X\to\neg Y)(X\neg Y)'\vee X\neg Y\to(\neg X\wedge\neg X\neg Y)$;
8. $(X \vee XY \vee YZ \vee \neg XZ)(X\vee Z)$;
9. $(X \vee Y)(\neg Y\vee Z) \vee (X \vee \neg Y)(Y \vee Z)$;
10. $Y \vee (XY\neg Z\vee \neg X\vee \neg Y\vee \neg Z)X$;
11. $(XY \vee Z \vee (\neg X\vee \neg Y)\neg Z(X\vee Z))(X\vee Z)$;

12. $\neg X\neg YZ \vee \neg XY\neg Z\vee X\neg Y\neg Z\vee XY\neg Z\vee X\neg YZ \vee \neg X \neg Y \neg Z$,

1.2.14. Преобразовать формулу к нормальной форме (здесь *l* есть число вхождений всех переменных):

1. $(X\neg Z\to XY)\to\neg YZ$ $(l < 3)$;
2. $(XY\to Z)(X\neg Z\to\neg Y)$ $(l = 3)$;
3. $(Y\to Z)(Z\to Y) \vee X \vee Y$ $(l = 3)$;
4. $(XYZ\wedge XZ)(\neg(X\to Y)\vee Z)$ $(l = 3)$;
5. $XY \vee \neg X \neg Y\vee XZ \vee \neg YZ$ $(l < 6)$;
6. $\neg X \neg YZ \vee X\neg YZ \vee X\neg Y\neg Z\vee XY\neg Z$ $(l < 4)$;
7. $XYZ \vee X\neg YZ \vee\neg X \neg YZ \vee\neg X \neg Y\neg Z$ $(l < 4)$;
8. $(Y\to Z)\to(X\vee \neg Y\vee Z)(Y \vee Z)XZ$ $(l < 4)$;
9. $X\neg Y\vee \neg X Y \vee XZ \vee \neg X \neg Z$ $(l = 6)$;
10. $\neg X\neg Y\vee Y\neg Z\vee\neg X\neg Z$ $(l = 4)$;
11. $\neg X Y \vee \neg YZ \vee\neg XZ$ $(l = 4)$;
12. $XY \vee \neg Y\neg Z\vee X\neg Z$ $(l = 4)$;
13. $X\neg Y\vee YZ \vee XZ$ $(l = 4)$;
14. $(\neg X \neg Y\neg Z\to X\vee Y)Z\to\neg(\neg XZ \vee Y)$; $(l = 3)$;
15. $(X \vee Y)(\neg X \neg Y\vee Z) \vee \neg Z\vee (X\vee Y)(T \vee U)$ $(l = 3)$;
16. $(X(Z \vee T) \vee ZT)(\neg Y(Z \vee T) \vee \neg T \neg U)(\neg UT(X\vee Y) \vee \neg X Y$ $(l = 3)$;
17. $(X\vee Y \vee Z)(X\vee \neg Y\vee Z)(\neg X\vee Y \vee Z)(\neg X\vee \neg Y\vee Z)(\neg X\vee \neg Y\vee \neg Z)$ $(l < 4)$;
18. $\neg X \neg YZ \vee \neg X Y\neg Z\vee X\neg Y\neg Z\vee XYZ \vee X\neg YZ \vee \neg X YZ$ $(l < 5)$;
19. $\neg X \neg Y Z \vee \neg X Y\neg Z\vee X\neg Y \neg Z\vee XY\neg Z\vee X\neg Y Z \vee \neg X YZ$ $(l < 6)$;
20. $XYZ \vee XY\neg Z\vee X\neg Y Z \vee \neg X YZ \vee \neg X Y\neg Z$ $(l = 3)$;
21. $X\neg Y\vee Y\neg Z\vee X\neg Z\vee \neg YZ\vee\neg XY\vee\neg XZ$ $(l < 6)$;
22. $(\neg X\vee \neg T)\neg Y\neg Z\vee X\neg ZT \vee \neg Y\neg Z T$ $(l < 5)$.

1.3. Закон двойственности

1.3.1. Записать формулу, двойственную данной:

1. $(X \vee \neg Y)X(\neg Z\vee XZ)$;
2. $\neg((\neg X\vee Y)(X\vee \neg Z))$;
3. $\neg(X\neg Y)\vee \neg XZ$;
4. $\neg(X \vee Y)\neg(X \vee Z)$;

5. $\neg(X \vee Y \vee Z)(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$;
6. $\neg XY\neg Z \vee X\neg Y$;
7. $\neg((X \vee Y)\neg(XY))$;
8. $(\neg(XY) \vee \neg X\neg Z$;
9. $(X \vee Y)(\neg Z \vee Y) \vee X$;
10. $\neg(XY) \vee XZ \vee \neg YZ$;
11. $X\neg Y \vee \neg(X \vee Z)$;

1.3.2. Найти исходную и двойственную для данной формулы. Представить их в виде формул с тесными отрицаниями:
1. $(\neg X \vee \neg(YZ))(XY \vee \neg(XZ))$;
2. $(X \vee \neg Y)Z\neg T \vee \neg(XT)$.

1.3.3. С помощью равносильных преобразований убедиться в справедливости закона двойственности для формул из примера 1.

1.3.4. Составить отрицание формулы, пользуясь законом двойственности:
1. $X(Y \vee \neg Z) \vee \neg XY$;
2. $(\neg X\neg Y\neg Z \vee S)\neg T\neg U\neg V$;
3. $\neg X(\neg Y \vee Z) \vee S)\neg T \vee \neg U(V \vee \neg W)$;
4. $(X(\neg Y \vee \neg ZT) \vee \neg U)V$.

1.3.5. Используя закон двойственности, доказать:
1. $X(X \to Y) \to Y$ – тавтология;
2. $\neg Y(X \to Y) \to \neg X$ – тавтология;
3. $\neg(X \vee Y)(\neg Y \vee Z) \vee X \vee Z$ – тавтология;
4. $(X \vee Y)(\neg Y \vee Z)\neg(X \vee Z)$ – противоречие;
5. $\neg((X \vee Y)(\neg X\neg Y \vee (X \to Z)))$ – противоречие;
6. $\neg(X\neg Y) \to (\neg X \vee X\neg Y \to \neg X \vee Y)$ – тавтология;

7) $\neg(X \to X \vee Y)$ – противоречие;

8. $(X \to Y) \to (XZ \to (Y \to Z))$ – тавтология;
9. $(XY \to Z) \to (X \to (Y \to Z))$ – тавтология;
10. $(XY \to Z)\neg(X \to (Y \to Z))$ – противоречие.

1.4. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), конъюнктивная нормальная форма (КНФ), совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ), совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

1.4.1. Равносильными преобразованиями привести к СДНФ:

1. $(\neg X \vee Z)\wedge(Y \vee Z)$;
2. $X\wedge Y \vee Y\wedge Z$;
3. $X \vee Y\wedge Z$;
4. $X\wedge Y \vee Z\wedge T$;
5. $(X\wedge\neg Y\vee Z)\wedge(\neg X\vee Z)$;
6. $(X\vee Y)\wedge(X\vee Z) \vee\neg Y\wedge(Z \vee\neg Y)$;
7. $X \vee Y \vee Z$;
8. $(X \vee Y\vee Z)\wedge(X \vee T)\wedge(Z \vee T)$;
9. $X \vee Y \vee Z \vee S \vee T$;
10. $\neg X\vee X\wedge Y\vee X\wedge Z\vee Z\wedge T$;
11. $X\wedge \neg Y \vee \neg X\wedge Y\vee\neg X\wedge Z \vee X\wedge \neg Z \vee Y\wedge\neg Z \vee\neg Y\wedge Z$.

1.4.2. Равносильными преобразованиями привести к СКНФ:

1. $\neg X\wedge Z \vee Y\wedge Z$;
2. $(X \vee Y)\wedge Z$;
3. $(\neg X \vee Y)\wedge(X \vee Z)$;
4. $\neg X\wedge Y \vee Z\wedge T$;
5. $X\wedge Y\wedge Z \vee T$;
6. $X\wedge Y\wedge Z$;
7. $X\wedge Y \vee Y\wedge Z \vee Z\wedge T$;
8. $X \vee Y \vee \neg Z\wedge T$;
9. $X\wedge Y \vee Z$;
10. $X\wedge Y\wedge Z\wedge T$;
11. $(X\vee\neg Y)\wedge(\neg X\vee Y \vee Z)\wedge\neg Z$.

1.4.3. Равносильными преобразованиями привести к ДНФ:

1. $\neg(X\vee Z)\wedge(X\wedge Y)$;
2. $(X\leftrightarrow Y)\wedge\neg(Z\wedge T)$;
3. $(X\vee Y\wedge\neg Z)\wedge(X\vee Z)$;
4. $((X\wedge Y)\wedge(Z\wedge\neg X))\wedge(\neg Y\wedge\neg Z)$;
5. $(X\wedge(Y\wedge Z))\wedge((X\wedge\neg Z)\wedge(X\wedge\neg Y))$.

1.4.4. Равносильными преобразованиями привести из задания 3 к КНФ.

1.4.5. Равносильными преобразованиями привести из задания 3, а также следующие три схемы, к СДНФ:

1. $\neg X\wedge Y\vee Y\wedge Z\wedge T\vee\neg X\wedge Y\wedge Z\wedge T$;
2. $\neg((X\wedge Y)\wedge\neg Y)\wedge(X\wedge Y\wedge X)$;
3. $\neg(X\wedge Y\wedge\neg X)\wedge\neg(X\wedge Y\wedge\neg Y)$

1.4.6. Равносильными преобразованиями привести из задания 3, а также следующие три схемы, к СКНФ:

1. $(X\vee Y)\wedge(Y\vee Z)\wedge(Z\vee T)$;
2. $X\wedge(Y\vee\neg Y)\wedge(X\vee Y\vee X)$;
3. $\neg(X\wedge Y\wedge X))\rightarrow X\wedge Y\vee Y$.

1.4.7. Для каждой из следующих формул построить равносильную ей ДНФ и КНФ:

1. $((X\wedge Y)\wedge(Z\wedge\neg X))\wedge(\neg Y\wedge\neg Z)$;
2. $((((X\wedge Y)\wedge\neg X)\wedge\neg Y)\wedge\neg Z)\wedge Z$;
3. $(X\wedge(Y\wedge Z))\wedge((X\wedge\neg Z)\wedge(X\wedge\neg Y))$.

1.4.8. Для каждой из следующих формул построить равносильную ей СДНФ:

1. $((X\wedge Y)\wedge\neg X)\wedge(X\wedge Y\wedge X)$;
2. $\neg(X\wedge Y\wedge\neg X)\wedge\neg(X\wedge Y\wedge\neg Y))$;
3. $(\neg X\wedge\neg Y)\wedge(Y\wedge Z\wedge X\wedge Z)$.

1.4.9. Для каждой из следующих формул построить равносильную ей СКНФ:

1. $(Z\wedge X)\wedge(\neg(Y\vee Z)\wedge X)$;
2. $\neg(X\wedge Y\wedge X)\vee(X\wedge(Y\vee Z))$;
3. $\neg(X\wedge(Y\vee Z))\wedge X\wedge Y\vee Z$.

1.4.10. Для данной формулы найти ее СДНФ с помощью таблицы истинности:

1. $\neg(X \wedge Y) \wedge \neg(X \vee Z)$;
2. $X \wedge Y$;
3. $X \wedge Y \vee Z$;
4. $(X \wedge Z) \wedge X \wedge \neg Y$;
5. $X \vee (Y \wedge (Z \wedge X \wedge Y))$;
6. $(X \wedge \neg Y \vee Z) \wedge T$;
7. $X \wedge (Y \wedge Z \vee T) \vee \neg T$.

1.4.11. Для данной формулы найти ее СКНФ с помощью таблицы истинности:

1. $\neg(X \wedge Y) \wedge \neg(X \vee Y)$;
2. $X \wedge Y$;
3. $(X \vee Y) \wedge Z$;
4. $\neg(\neg X \vee \neg Y) \wedge (X \wedge Y \wedge Z)$;
5. $X \wedge Y \wedge Z \vee T$;
6. $X \wedge \neg(\neg Y \wedge (Z \wedge (X \wedge Y)))$;
7. $X \wedge Y \vee Y \wedge Z \vee Z \wedge T$.

1.4.12. Построить формулу от трех переменных, которая истинна тогда и только тогда, когда ровно две переменные ложны.

1.4.13. Построить формулу от трех переменных, которая принимает такое же значение, как и большинство переменных.

1.4.14. Построить формулу от трех переменных, которая принимает такое же значение, как и меньшинство переменных.

II. ПРИЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

2.1. Релейно-контактные схемы

Будем называть *элементом* простейший двухполюсник, а именно отрезок проводника, содержащий переключатель x и имеющий один вход и один выход, которые в этом случае назовем полюсами схемы

а. ——— x ———

Рис. 1.

Контакт может быть разомкнут (рис. 1), тогда x = 0, или замкнут, тогда x = 1. Если принимать во внимание не смысл высказывательного переменного, а только его значение, то можно считать, что любой переменной может быть поставлена в соответствие схема рисунка 1.

Операция x означает изменение положения контакта: если контакт x разомкнут (замкнут), то контакт x′ замкнут (разомкнут).

Введем два особых элемента. Один – отрезок проводника, из которого вырезан кусок и который не снабжен контактом. Он никогда не проводит ток. В нашей модели он будет играть роль нуля и обозначаться 0. Другой – сплошной отрезок проводника без контакта. Он всегда проводит ток. В нашей модели он будет играть роль единичного элемента и обозначаться 1.

Дизъюнкция x ∨ y определяется как схема из двух элементов, соединенных параллельно (рис. 2). Ясно, что такая схема проводит ток тогда и только тогда, когда хоть один из контактов x, y замкнут. Конъюнкция xy есть последовательное соединение элементов x, y (рис.3).

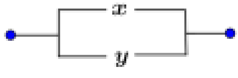
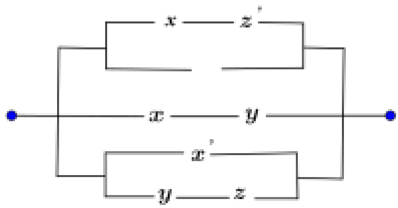


Рис 2

Рис. 3

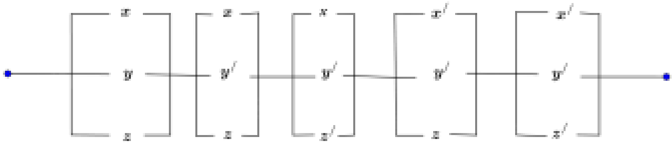
Определение. ***Релейно-контактной схемой*** назовем устройство из проводников и двухпозиционных контактов, через которое полюсы источника тока связаны с некоторым потребителем.

Пример 1. По данной релейно-контактной схеме найдите ее функцию проводимости:



Данная схема состоит из трех параллельно соединенных ветвей, функция проводимости каждой из которых соответственно есть $(xz')\vee y$; xy, $x'\vee(yz)$. Тогда функция проводимости всей схемы есть их дизъюнкция: $\pi(x,y,z) = [(xz')\vee y)] \vee [xy] \vee [x'\vee(yz)]$.

Пример 2. Упростите релейно-контактную схему:



Функция проводимости этой схемы

$\pi(x,y,z) = (x\vee y\vee z)\ (x\vee y'\vee z)\ (x\vee y'\vee z')\ (x'\vee y'\vee z)\ (x'\vee y'\vee z') =$

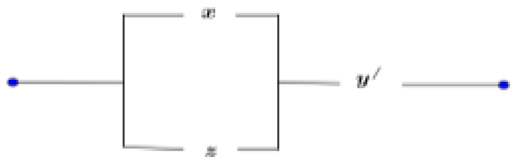
$=[(x\vee z) \vee yy'](x\vee y' \vee z')[(x' \vee y')\vee zz'] =$

$= [(x \vee z) \vee 0]\ (x \vee y' \vee z')\ [(x' \vee y') \vee 0] = (x \vee z)(x \vee y' \vee z')(x' \vee y')= =$

$(x \vee z)[y' \vee((x \vee y')x')] = (x \vee z)[y' \vee (x'y')] =$

$= (x \vee z)y' (1 \vee x') = (x \vee z)y'$

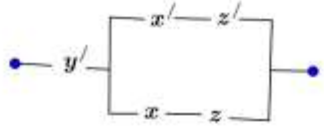
Итак, полученная функция, конечно, осталась той же самой в силу равносильности преобразований, изменилась лишь форма аналитической записи. При этом схема стала более простой:



Пример 3. Постройте наиболее простую релейно-контактную схему по заданным условиям работы:

$\pi(0,0,0) = \pi(1,0,1) = 1$. В остальных случаях $\pi = 0$

Найдем аналитическое выражение для функции π, используя СДНФ, упростим полученное выражение и начертим соответствующую схему: $\pi(x,y,z) = (x'y'z') \vee (xy'z) = y' (x'z' \vee xz)$,



2.2. Решение логических задач методами алгебры логики

Суть этого метода при решении логических задач состоит в том, что, имея конкретные условия задачи, записываем их в виде формул алгебры логики. Далее путем равносильных преобразований упрощаем полученную формулу. Упрощенный вид формулы, как правило, приводит к ответу на все вопросы.

Пример1. Пытаясь вспомнить победителей прошлого турнира, пять бывших зрителей турнира заявили:

1. Антон был вторым, а Борис – пятым.
2. Виктор был вторым, а Денис – третьим.
3. Григорий был первым, а Борис – третьим.
4. Антон был третьим, а Евгений – шестым.
5. Виктор был третьим, а Евгений – четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест в турнире?

Решение. Обозначим через X_y ситуацию, где Х – первая буква имени участника турнира, у – номер места, которое он занял в турнире. В паре высказываний каждого зрителя одно истинно, а второе ложно, значит их дизъюнкция будет истинной. В итоге истинной будет формула:

$L = (А_2 \vee Б_5)(В_2 \vee Д_3)(Г_1 \vee Б_3)(А_3 \vee Е_6)(В_3 \vee Е_4)$.

Путем равносильных преобразований получим,

$L = А_3\ Б_5\ В_2\ Г_1\ Е_4 = 1$.

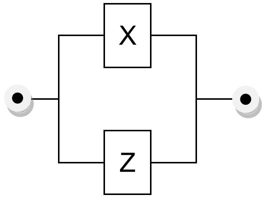
Последнее есть ответ на поставленный вопрос: Антон – третий, Борис – пятый, Виктор – второй, Григорий – первый, Евгений – четвертый.

Задачи для самостоятельного решения

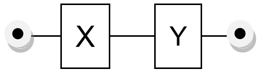
2.1. Релейно-контактные схемы.

2.1.1. Составить функции проводимости, соответствующие следующим релейно-контактным схемам и пояснить условия их работы:

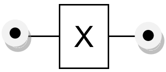
1.



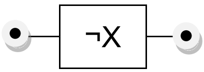
2.



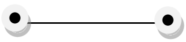
3.



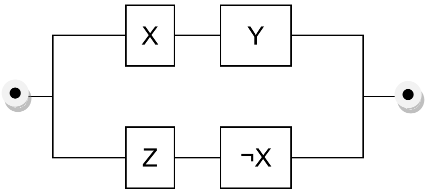
4.



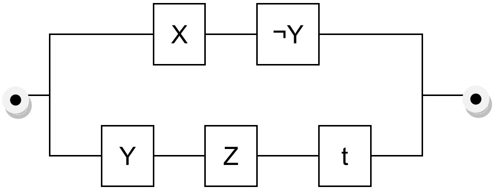
5.



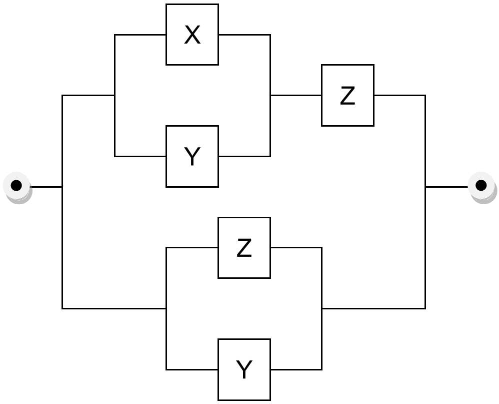
6.



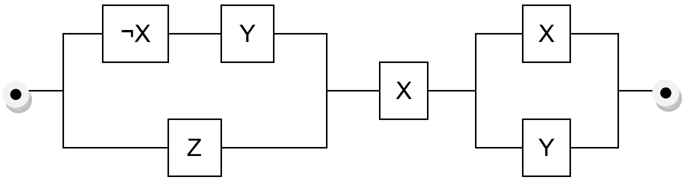
7.



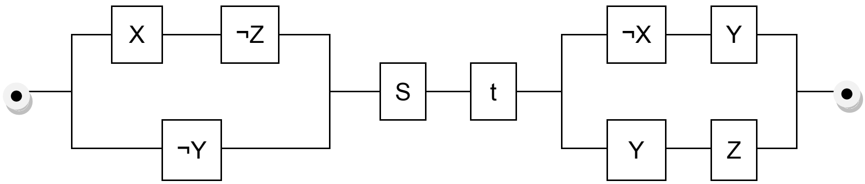
8.



9.



10.



2.1.2. Построить релейно-контактные схемы по заданным условиям работы:

1. $\pi(0,0,0)=\pi(1,0,1)=1$
2. $\pi(1,1,0)= \pi(0,0,0)=\pi(1,0,0)=1$
3. $\pi(0,0,0)=\pi(0,1,0)=\pi(1,0,0)=\pi(0,1,1)=1$
4. $\pi(1,0,0)= \pi(0,1,1)=\pi(0,1,0)=(0,0,0)=1$
5. $\pi(0,0,1,1)=\pi(1,1,1,0)=\pi(0,1,1,0)=1$
6. $\pi(0,0,1,1)=\pi(0,0,0,0)=\pi(0,1,1,0)=1$
7. $\pi(1,1,1,1)= \pi(0,1,0,1)=1$
8. $\pi(0,0,1,1)= \pi(0,1,1,0)= \pi(0,1,0,1)=\pi(1,1,0,1)=1$
9. $\pi(1,0,1,1)= \pi(1,1,1,0)= \pi(0,1,1,1)=1$

остальные значения функции fi(x,y,z) равны нулю.

2.1.3. Построить релейно-контактные схемы, соответствующие:

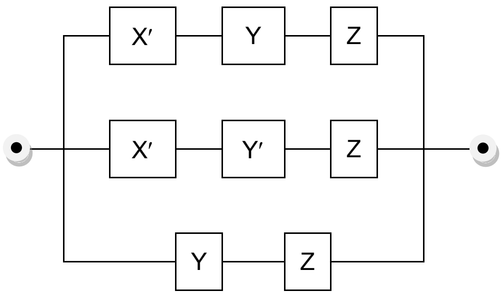
1. импликации $X\rightarrow Y$
2. эквивалентности $X\leftrightarrow Y$

2.1.4. Построить релейно-контактные схемы, соответствующие следующим формулам:

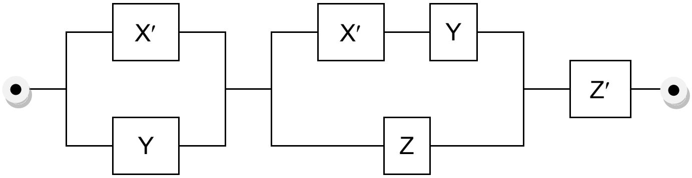
1. $X\rightarrow(\neg Y)\leftrightarrow X$;
2. $(X\rightarrow Y)\vee(Y\rightarrow Z)\wedge(Z\leftrightarrow X)$;
3. $(X\leftrightarrow Y)\wedge(Y\wedge Z)\rightarrow(Z\wedge X)$;
4. $((\neg X\vee Y)\wedge(Y\wedge Z\vee X))\vee U\wedge Z$;
5. $(X\rightarrow Y)\rightarrow(\neg X(Y\vee Z))$;
6. $(X\rightarrow(Y\rightarrow Z))\rightarrow(Y\rightarrow\neg X)$;
7. $\neg X(\neg Y\wedge Z\vee X\vee Y)$;
8. $((X\rightarrow Y)\wedge(Y\rightarrow Z))\rightarrow(X\rightarrow Z)$;
9. $(X\wedge(Y\wedge Z\vee\neg Y\wedge\neg Z))\vee(\neg X\wedge(\neg Y\wedge Z\vee Y\wedge\neg Z))$;
10. $(X\rightarrow(Y\rightarrow Z))\vee((X\wedge Y)\leftrightarrow Z)$.

2.1.5. Упростить следующие релейно-контактные схемы:

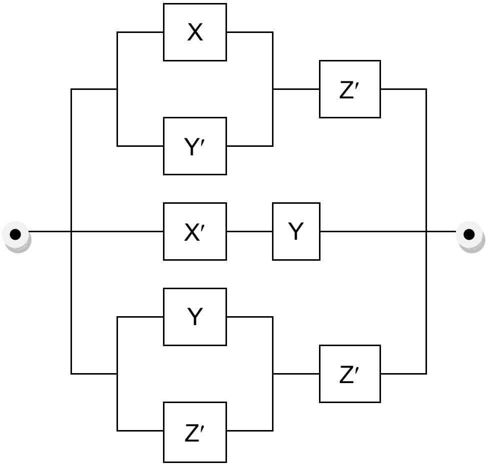
1.



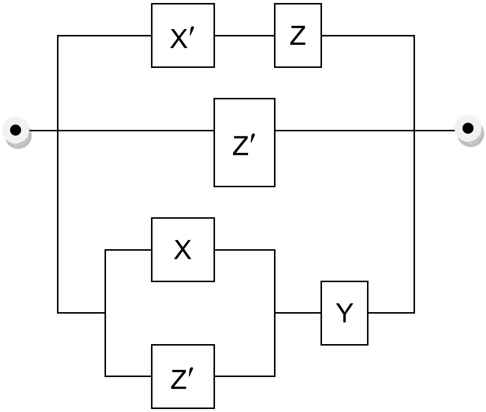
2.



3.

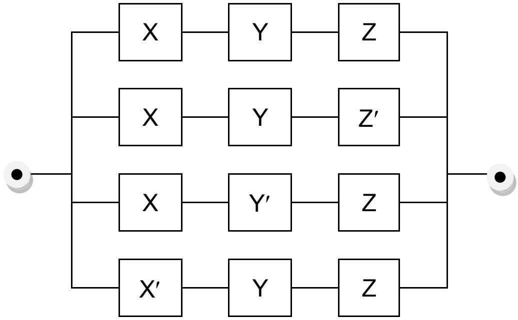


4.

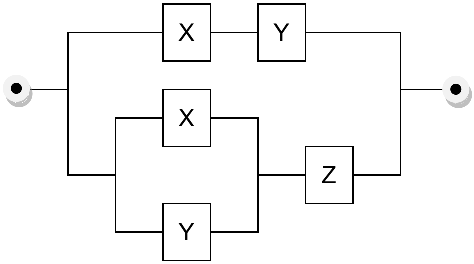


2.1.6. Проверить, равносильны ли следующие а) и б) релейно-контактные схемы:

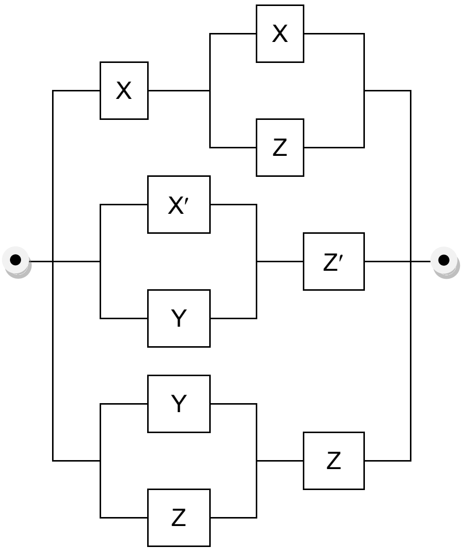
1. а)



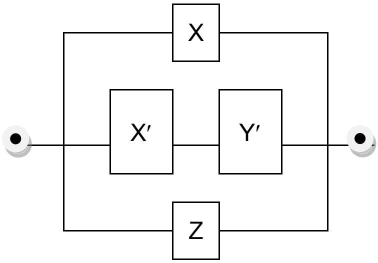
1. б)



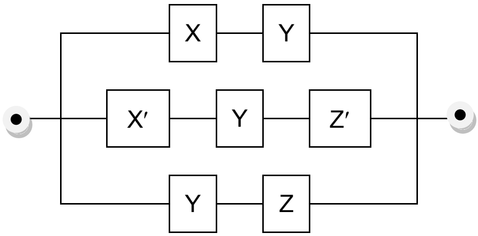
2. а)



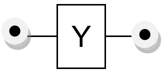
2. б)



3. а)



3. б)



2.1.7. Каждый из трех членов комитета голосует “за”, нажимая на кнопку. Постройте по возможности более простую схему, через которую ток проходил бы и зажигал бы электрическую лампочку тогда и только тогда, когда не менее двух членов комитета голосуют “за”.

2.1.8. Комитет состоит из пяти человек. Решение выносится большинством голосов. Если председатель голосует “против”, то решение не принимается. Постройте такую схему, чтобы, голосуя “за”, каждый из пяти человек нажимал бы на кнопку и в случае принятия решения зажигалась бы сигнальная лампочка.

2.1.10. Имеется одна лампочка в лестничном пролете двухэтажного здания. Постройте схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было бы гасить и зажигать лампу независимо от положения другого выключателя.

2.1.11. Спроектируйте релейно-контактную схему, позволяющую зажигать и тушить электрическую лампочку с помощью трех независимых переключателей.

2.1.12. Постройте релейно-контактную схему с четырьмя переключателями, которая проводит ток тогда и только тогда, когда замыкаются не все переключатели, а только некоторые из них.

2.1.13. Постройте релейно-контактную схему с пятью переключателями, которая проводит ток тогда и только тогда, когда замкнуты все ее переключатели или когда не замкнут ни один из них.

2.1.14. Постройте схему с тремя переключателями, которая замыкается тогда и только тогда, когда замкнут либо один, либо два переключателя. При построении использовать не более шести контактов.

2.1.15. Начертите схему с 5 переключателями, которая замыкается, если и только если замкнуты ровно 4 из этих переключателей.

2.1.16. Начертите схему с 5 переключателями, которая проводит ток в том и только в том случае, когда замыкаются 3 или 2 из этих переключателей.

2.1.17. Требуется составить схему с 4 переключателями x, y, 2, 1. Схема должна проводить ток тогда и только тогда, когда будут замкнуты переключатели x и y или 2 и 1.

2.1.18. Начертите схему с 3 переключателями x,y,2, которая замыкается тогда и только тогда, когда либо переключатель x, замкнут, либо переключатель y замкнут, либо переключатель 2 замкнут.

2.1.19. Из контактов x, y, 2 составить схему так, чтобы она замкнулась тогда и только тогда, когда замкнуты какие-нибудь три из трех контактов x, y, 2.

2.2. Решение логических задач методами алгебры логики.

2.2.1. Адамов, Белов, Ветров, Глебов, Дронов, Ершов заняли первые шесть мест в соревновании, причем ни одно место не было разделено между ними. О том, кто какое место занял были получены следующие ответы:

1) «Кажется, первым был Адамов, а вторым — Дронов,

2) «Нет, на первом месте был Ершов, а на втором — Глебов»;

3) «Вот так болельщики! Ведь Глебов был на третьем месте, а Белов на четвертом»;

4) «И вовсе не так: Белов был пятым, а Адамов - вторым»;

5› «Вы все перепутали: пятым был Дронов, перед ним — Ветров».

Известно, что в высказывании каждого болельщика одно утверждение истинное, а второе – ложное. Определите, какое место занял каждый из спортсменов.

2.2.2. При составлении расписания уроков на один день учителя математики, истории и литературы высказали следующие пожелания:

Математик просил поставить ему первый или второй урок; историк – или первый, или третий, учитель литературы – или второй, или третий. Как составить расписание, чтобы учесть все пожелания?

2.2.3. На вопрос, какая завтра будет погода, синоптик ответил:

1. Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя.

2. Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.

3. Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра.

Так какая же погода будет завтра?

2.2.4. Алеша, Боря и Гриша нашли в земле сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения.

Алеша: «Это сосуд греческий и изготовлен в V веке».

Боря: «Это сосуд финикийский и изготовлен в III веке».

Гриша: «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

2.2.5. Андрей, Аня и Маша решили пойти в кино. Каждый из них высказал свои пожелания по поводу выбора фильма.

Андрей сказал: «Я хочу посмотреть французский боевик».

Маша сказала: «Я не хочу смотреть французскую комедию».

Аня сказала: «Я хочу посмотреть американскую мелодраму».

Каждый из них слукавил в одном из двух пожеланий. На какой фильм пошли ребята?

2.2.6. В симфонический оркестр приняли на работу трех музыкантов: Бориса, Степана и Виктора, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе.

Известно, что:

1. Степан самый высокий;
2. играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
3. играющие на скрипке и флейте и Борис любят пиццу;
4. когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Степан их мирит;
5. ни на трубе, ни на скрипке не умеет играть Борис.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами.

2.2.7. Менеджер банка должен установить 4 банкомата. В течение каждого дня работы должны выполняться следующие условия:

1. Если работает первый банкомат, то третий банкомат не должен работать, а второй и четвёртый должны.

2. Если работает третий банкомат, то первый и четвёртый не должны работать, а вто-рой должен.

3. Должен работать по крайней мере один банкомат.

Необходимо определить наибольшее число дней, которое могут работать банкоматы при выполнении этих условий, так, чтобы их назначение ни в один из дней не повторялось, а также указать допустимое расписание на каждый день.

2.2.8. По обвинению в ограблении перед судом предстали Иванов, Петров, Сидоров. Следствием установлено следующее:

1. Если Иванов невиновен или Петров виновен, то Сидоров виновен.

2. Если Иванов невиновен, то Сидоров невиновен.

Виновен ли Иванов?

2.2.9. Имеется множество из 8 различных букв {A, B, C, D, E, F, G, H}. Один из играющих задумывает любую букву из этого множества. Другой играющий должен угадать эту букву. Он имеет возможность задать три вопроса, ответы на которые должны быть «да» или «нет». Вопросы должны быть заданы независимо один от другого, т. е. второй играющий узнает ответы только после того, как он задал все три вопроса. Какие вопросы необходимо задать?

2.2.10. Имеется два симптома S1 S2 двух болезней X1 и X2. Известно:

1. При X2 есть S1 .

2. При X1 и отсутствии X2 есть S2 .

3. При X2 и отсутствии X1 нет S2 .

4. При S1 или S2 есть, по крайней мере, X1 или X2 .

Составьте логическое уравнение, позволяющее по «значениям» признаков («есть», «нет») определить «значения» болезней.

III. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

3.1. Язык исчисления высказываний. Алфавит исчисления высказываний

Алфавит состоит из символов трех категорий:

1. символы переменных высказываний: x, y, … ,z, x_1, x_2, …;
2. логические символы: $\wedge$, v, $\rightarrow$, ┐ ;
3. технические символы: левая (и правая) скобки.

В отличие от логики высказываний исчисление высказываний не содержит символов 0 и 1. В данном случае формируются слова, называемые формулами. Определение формулы полностью повторяет определение в логике высказываний.

3.2. Аксиомы исчисления высказываний

В качестве системы аксиом выбраны следующие тавтологии алгебры высказываний.

G_1 $x \rightarrow (y \rightarrow x)$

G_2 $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$

G_3 $xy \rightarrow x$

G_4 $xy \rightarrow y$

G_5 $x \rightarrow (y \rightarrow xy)$

G_6 $x \rightarrow x \vee y$

G_7 $y \rightarrow x \vee y$

G_8 $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$

G_9 $(x \rightarrow y) \rightarrow (\neg y \rightarrow \neg x)$

G_{10} $x \rightarrow \neg\neg x$

G_{11} $\neg\neg x \rightarrow x$

Аксиомы дают неявное определение логических операций: аксиомы G_3 – G_5 задают конъюнкцию; аксиомы G_6 – G_8 задают дизъюнкцию; отрицание задано аксиомами G_9 – G_{11}; импликацию характеризуют все 11 аксиом.

3.3. Правила вывода

1. Правило подстановки.

$$\frac{A}{(A)_B^x}$$

Данную запись понимаем в следующем смысле: формула $(A)_B^x$ есть следствие формулы А и получается из последней подстановкой формулы В вместо всех вхождений переменной ***x*** в формуле А.

2. Правило заключения (**Modus Ponens**, сокращенно **m.p.**)

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

Формула В есть непосредственное следствие формул А и А→В

3.4. Доказательство формул ИВ

Определение. **Доказательством формулы А** называется всякая конечная последовательность формул

$A_1, A_2, \dots , A_n$ (1), обладающая свойствами:

1) A_k есть А;

2) $\forall_i$ A_i есть либо аксиома, либо непосредственное следствие из предшествующих формул по одному из правил вывода: правило подстановки или правило заключения

Число формул в последовательности (1) называют **длиной доказательства**.

Определение. Формула А называется **доказуемой** в исчислении высказываний, если существует ее доказательство.

Обозначение: $\vdash A$, читаем: А доказуемая формула.

Пример: Всякая аксиома доказуема. Их доказательство состоит лишь из одной формулы

Пример:

1. $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$, G_2
2. $(x \to (y \to x)) \to ((x \to y) \to (x \to x))$, $(1)_{x}^{z}$
3. $(x \to (y \to x))$, G_1
4. $(x \to y) \to (x \to x)$, m.p.(2.3)
5. $(x \to x \vee y) \to (x \to x)$, $(4)_{XVY}^{Y}$
6. $x \to x \vee y$, G_6
7. $x \to x$, m.p.(5.6)

Последовательность 1 – 7 есть доказательство формулы $x \to x$, т.е. $\vdash x \to x$. Такое расположение формул удобно для обоснования шагов доказательства. Запись m.p.(5.6), например, означает то, что правило заключения применено к формулам 5 и 6.

В процессе доказательства, как правило, ищем более короткие. Часто полное доказательство очень громоздко, поэтому доказательство строится с ссылкой на раннее доказанные правила, теоремы и т.д.

3.5. Производные правила

1^{o} $$\frac{A}{(A)_{B}^{x}}$$

Доказательство: $\vdash A$, значит, по определению, существует конечная последовательность $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k = A$ (1), удовлетворяющая определению доказательства. Тогда последовательность

$A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k = A, (A)^{x}_{B}$ (2)

есть доказательство формулы $(A)_{B}^{x}$ и $\vdash (A)_{B}^{x}$.

2^{o}. $$\frac{A, \vdash A \to B}{\vdash B}$$

Доказательство: $\vdash A$, значит, существует ее доказательство:

$A_1, A_2, \dots, A_l = A$ (1)

Аналогично, $\vdash A \to B$, следовательно, существует доказательство

$B_1, B_2, \dots, B_S = B$ (2)

Тогда последовательность $A_1, A_2, \dots, A, B_1, B_2, \dots, A \to B, B$ (3) есть доказательство формулы B. Следовательно, $\vdash B$.

3°.
$$\frac{\vdash A}{\vdash (A)^{x_1,x_2,\dots,x_n}_{B_1,B_2,\dots,Bn}}$$

Для обоснования этого правила необходимо многократно применить правило 1°.

Пример: $\vdash (\neg x \vee \neg y) \to \neg (xy)$

1. $\vdash (x \to y) \to (\neg y \to \neg x)$ $\quad G_9$
2. $\vdash (xy \to x) \to (\neg x \to \neg xy)$ $\quad (1)^{X\ \ Y}_{XY\ X}$
3. $\vdash xy \to x$ $\quad G_3$
4. $\vdash \neg x \to \neg (xy)$ $\quad$ m.p.(2.3)
5. $\vdash (xy \to y) \to (\neg y \to \neg xy)$ $\quad (1)^{X}_{XY}$
6. $\vdash xy \to y$ $\quad G_4$
7. $\vdash \neg y \to \neg (xy)$ $\quad$ m.p.(5,6)
8. $\vdash (x \to z)) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$ $\quad G_8$
9. $\vdash (\neg x \to \neg (xy)) \to [(\neg y \to \neg (xy)) \to (\neg x \vee \neg y \to \neg (xy))]$ $\quad (8)^{x,y,z}_{\neg x,\neg y,\neg (xy)}$
10. $\vdash (\neg y \to \neg (xy)) \to (\neg x \vee \neg y \to \neg (xy))$ $\quad$ m.p.(4.9)
11. $\vdash \neg x \vee \neg y \to \neg (xy)$ $\quad$ m.p.(7.10)

Последовательность 1 – 11 не является доказательством в смысле определения, оно выполнено с применением производных правил.

3.6. Выводимость из гипотез

Пусть задана конечная совокупность формул (гипотез) $H=\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$

***Определение*.** **Выводом формулы A** из совокупности гипотез $H = \{A_1, A_2,\dots, A_n\}$, называется всякая конечная последовательность $B_1, B_2, \dots, B_k$, обладающая свойствами:

1) B_k есть A;

2) $\forall_i$ B_i является либо гипотезой, либо доказуемой формулой, либо получена из предыдущих по правилу заключения.

Пример: $H = \{A, A \to B\}$

Последовательность A, $A \to B$, B есть вывод формулы B из H.

Определение. Формула A исчисления высказываний называется **выводимой из H** (обозначение: $H \vdash A$), если существует вывод A из H.

Свойства выводимости.

α) $$\frac{H \vdash A,\ W \supseteq H}{W \vdash A}$$

β) $$\frac{A \in H}{H \vdash A}$$

γ) Доказуемая формула выводима из любой совокупности гипотез.

δ) Формула, выводимая из пустой совокупности гипотез доказуема.

3.7. Правила выводимости

I. Обобщенный m.p.

$$\frac{H \vdash A,\quad H \vdash A \to B}{H \vdash B}$$

II. Правило введения посылки

$$\frac{H \vdash A}{H \vdash B \to A}$$

III. Правило силлогизма.

$$\frac{H \vdash A \to B,\ \ H \vdash B \to C}{H \vdash A \to C}$$

IV. Правило введения конъюнкции (Λ - введение).

$$\frac{H \vdash A,\ H \vdash B}{H \vdash A \wedge B,\ H \vdash B \wedge A}$$

V. Правило введения дизъюнкции (v – введение).

$$\frac{H \vdash A \to C,\ \ H \vdash B \to C}{H \vdash A \vee B \to C,\ \ H \vdash B \vee A \to C}$$

VI. Правило контрапозиции.

$$\frac{H \vdash A \to B}{H \vdash \neg B \to \neg A}$$

VII. а)Правило снятия двойного отрицания.

$$\frac{H \vdash \neg\neg A}{H \vdash A}$$

б) Снятие двойного отрицания с конъюнктивного члена:

$$\frac{H \vdash (\neg\neg A) \land B \quad \text{или} \quad H \vdash A \land (\neg\neg B)}{H \vdash A \land B}$$

в) Снятие двойного отрицания с дизъюнктивного члена:

$$\frac{H \vdash (\neg\neg A) \lor B \quad \text{или} \quad H \vdash A \lor (\neg\neg B)}{H \vdash A \lor B}$$

г) Снятие двойного отрицания с члена импликации

$$\frac{H \vdash (\neg\neg A) \to B \quad \text{или} \quad H \vdash A \to (\neg\neg B)}{H \vdash A \to B}$$

VIII. Правило удаления импликации.

$$\frac{H \vdash A \to B}{H, A \vdash B}$$

IX. Теорема дедукции.

$$\frac{H, A \vdash B}{H \vdash A \to B}$$

X. Правило перестановки посылок.

$$\frac{H - A \to (B \to C)}{H - B \to (A \to C)}$$

XI. Правило соединения посылок.

$$\frac{H - A \to (B \to C)}{H - AB \to C}$$

XII. Правило разъединения посылок.

$$\frac{H - AB \to C}{H - A \to (B \to C)}$$

Пример: ├ (x → (y → z)) → (xy → z) (б)

1. H├ x → (y → z), гипотеза
2. H├ xy, гипотеза
3. H├ xy →x , G_3
4. H├ x, m.p.(2.3)
5. H├ xy →y, G_4
6. H├ y, m.p.(2.5)
7. H├ y →z, m.p.(1.4)
8. H├ z, m.p.(7.8)

Используя обобщенную теорему дедукции для

x → (y → z),xy├ z получим ├ (x → (y → z)) → (xy → z)

Пример. ├ ┐(xy) → ┐x v ┐y

Доказательство:

1а. ├ ┐x → ┐x v ┐y

1б. ├ ┐y → ┐x v ┐y, $(G_6, G_7)^{x,y}_{\neg x,\neg y}$

2а. ├ ┐(┐x v ┐y) → ┐┐x

2б. ├ ┐(┐x v ┐y) → ┐┐y, правило контрапозиции (1)

3а. ├ ┐(┐x v ┐y) → x

3б. ├ ┐(┐x v ┐y) → y, снятие двойного отрицания (2)

4а. ┐(┐x v ┐y)├ x

4б. ┐(┐x v ┐y)├ y, удаление импликации (3)

5. ┐(┐x v ┐y)├ xy, правило ∧-введения (4а,б)
6. ├ ┐(┐x v ┐y) →xy, теорема дедукции (5)
7. ├ ┐(xy) →┐┐(┐x v ┐y), правило контрапозиции (6)
8. ├ ┐(xy) → ┐x v ┐y , снятие двойного отрицания (7).

3.8. Проблемы аксиоматического исчисления высказываний

Определение. Логическое исчисление называется **непротиворечивым**, если в нем не доказуемы никакие две формулы, из которых одна является отрицанием другой.

Иначе, аксиоматическое исчисление называется **непротиворечивым**, если в нем не существует такая формула А, что доказуема А ($\vdash$ А) и доказуема $\neg$ А ($\vdash$ ($\neg$ А)).

Определение. Исчисление, в котором существуют доказуемые формулы вида А и $\neg$ А, называется **противоречивым**.

ТЕОРЕМА 1: Исчисление высказываний (ИВ) противоречиво тогда и только тогда, когда всякая формула ИВ доказуема.

ТЕОРЕМА 2: Всякая доказуемая формула ИВ является тавтологией в алгебре высказываний.

ТЕОРЕМА 3: Исчисление высказываний непротиворечиво.

Определение. Аксиоматическое исчисление называется **полным в широком смысле**, если всякая тавтология доказуема в нем.

Определение. **(***Внутреннее свойство исчисления***):** Аксиоматическое исчисление **полно в узком смысле**, если добавление к ее аксиомам любой недоказуемой формулы в качестве новой аксиомы приводит к противоречивому исчислению.

ТЕОРЕМА 4: Исчисление высказываний полно в широком смысле слова, т.е. всякая тавтология доказуема в нем.

ТЕОРЕМА 5: Исчисление высказываний полно в узком смысле.

Формулы ИВ – конструктивные объекты. По поводу такой формулы ставится вопрос о существовании алгоритма, который бы позволил для любой заданной формулы ИВ определить, является ли она доказуемой или не является. Если такой алгоритм существует, проблема разрешимости разрешима. Если доказано, что такого алгоритма нет, проблема неразрешима.

Для ИВ проблема разрешимости разрешима. Алгоритм основан на теореме о полноте: формула А ИВ доказуема тогда и только тогда, когда А тождественно истинная формула в алгебре высказываний.

Определение. Аксиома называется **независимой от остальных** аксиом исчисления, если она не может быть выведена из остальных аксиом.

Система аксиом исчисления называется независимой, если каждая аксиома системы независима.

Пример. Аксиома $xy \to x$ независима.

Доказательство: Строим интерпретацию языка I. В качестве $M = \{0, 1\}$, логические операции v, $\to$, $\neg$ проинтерпретируем как главные, но конъюнкцию проинтерпретируем иначе: $xy = y$, 1– выделенный элемент. Формулы тождественно равные 1 будем называть тавтологиями. Тавтологичность – свойство S.

Проверим три выделенных требования.

1. Все аксиомы кроме G3 обладают свойством S. Действительно все аксиомы, не содержащие конъюнкцию тавтологии в главной интерпретации. Аксиомы второй группы G4 и G5 надо проверить.

G4: $xy \to y \overset{I}{=} y \to y$, $|y \to y| = 1$

G5: $x \to (y \to xy) \overset{I}{=} x \to (y \to y)$, $|x \to (y \to y)| = 1$

2. Покажем, что аксиома G3 не обладает свойством S.

$|xy \to x| = |y \to x|_{0,1} = 0$,

т.е. G3 не тавтология в данной интерпретации.

3. Правила вывода, очевидно, сохраняют свойство S, т.к. определены по-прежнему.

Заключение: аксиома G3 независима от остальных.

По аналогичной схеме доказывается независимость остальных аксиом ИВ из группы 2, 3, 4. Их доказательство предлагается для самостоятельного решения. Сложнее доказывается независимость первых двух аксиом,

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Доказать формулы используя аксиомы и правила вывода.

3.1.1. $\vdash \neg(x\wedge y)\to\neg x\vee\neg y$

3.1.2. $\vdash \neg x\wedge\neg y\to\neg(x\vee y)$

3.1.3. $\vdash \neg(x\vee y)\to\neg x\wedge\neg y$

3.1.4. $\vdash \neg x\to(x\to y)$

3.1.5. $\vdash x\vee\neg x$

3.1.6. $\vdash (x\to y)\to\neg x\vee y$

3.1.7. $\vdash \neg(x\vee y)\to(x\to y)$

3.1.8. $\vdash (z\to x)\to((z\to y)\to(z\to x\wedge y))$

3.1.9. $\vdash (\neg x\to y)\to((\neg x\to\neg y)\to x)$

3.1.10. $$\frac{H\vdash A\wedge B}{H\vdash B \text{ и } H\vdash A}$$

3.1.11. $$\frac{H\vdash R}{H\vdash R\vee B}$$

3.1.12. $$\frac{H\vdash \neg A\wedge B}{H\vdash A\to B}$$

3.1.13. $$\frac{H\vdash \neg A\to\neg B}{H\vdash A\to B}$$

3.1.14. $$\frac{H\vdash A\to(B\to C) \text{ и } H\vdash A\to B}{H\vdash A\to C}$$

3.1.15. $$\frac{H, B\vdash A\to(B\to C)}{H\vdash A\to C}$$

3.1.15. $$\frac{H,B\vdash A\to(B\to C)}{H\vdash A\to C}$$

3.1.16. $$\frac{H, A\vdash C \text{ и } H, B\vdash C}{H, A\vee B\vdash C}$$

3.1.17. $$\frac{H\vdash A\to B \text{ и } H\vdash\neg B}{H\vdash\neg A}$$

3.1.18. H, A├ B и H, ¬A├ B

$H \vdash B$

3.1.19. $$\frac{H, A \vdash B \ \text{ и } H, A \vdash \neg B}{H \vdash \neg A}$$

3.2. Доказать следующие выводимости построением соответствующих выводов

3.2.1. $x \to z,\ y \to z,\ \vdash x \vee y \to z$

3.2.2. $t \to x,\ t \to y,\ t \vdash x \wedge y$

3.2.3. $x \to y,\ \neg y \vdash \neg x$

3.2.4. $\neg x,\ \neg y \vdash \neg(x \vee y)$

3.2.5. $\neg x,\ \neg y \vdash \neg(x \wedge y)$

3.2.6. $\neg x,\ \neg y \vdash x \to y$

3.2.7. $x,\ \neg y \vdash \neg(x \to y)$

3.2.8. $x,\ \neg y \vdash \neg(\neg x \vee y)$

3.2.9. $x \vee y \wedge \neg y \vdash x$

3.2.10. $x \vee (y \vee \neg y) \vdash y \vee \neg y$

3.2.11. $x,\ \neg y \vdash (x \to y) \to \neg x$

3.2.12. $(x \to y) \to z,\ (y \to z \to z) \vdash z$

3.2.12. $(x \to y) \to (z \to w),\ x \to (t \to w),\ z,\ t \vdash w$

3.2.13. $x \to (y \to z),\ \neg\neg y \vdash \neg\neg z$

3.2.14. $(x \to z) \to z,\ x \to y,\ y \to z \vdash z$

3.2.15. $(x \to y) \wedge (y \to z) \vdash (x \vee z \to y \vee z) \wedge (y \vee z \to x \vee z)$

3.2.16. $x \vee \neg x \to \neg(x \vee y),\ (x \to y) \to (\neg x \wedge \neg y), \neg x \vdash z$

3.2.17. $A \to (B \to C),\ B \vdash A \to C$

3.2.18. $A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$

3.2.19. $A \to (B \to C),\ A \to B \vdash A \to C$

3.2.20. $A \to B,\ B \to C,\ (A \to C) \to C \vdash C$

3.2.21. $A,\ \neg\neg B \vdash A \wedge B$

3.2.22. $\neg\neg A \vee B \vdash \neg\neg A \wedge \neg\neg B$

3.2.23. $B \to C,\ A \vdash (A \to B) \wedge C$

3.2.24. $A \to B,\ C \vee A \vdash B \vee C$

3.2.25. $A \to B,\ A \vee B \to B \vdash B$

3.2.26. $A \to B,\ A \wedge C \vdash B \wedge C$

3.2.27. $A \vee B, \neg B \vdash A$

3.2.28. $\neg A \to B, C \wedge \neg B \vdash A$

3.2.29. $\neg A, \neg B \vdash \neg (A \wedge B)$

3.2.30. $A, \neg B \vdash A \to \neg B$

3.2.31. $A, \neg B \vdash (A \to B) \to \neg B$

3.3. Доказать следующие формулы, пользуясь аксиомами, правилами вывода, ранее доказанными формулами и правилами.

3.3.1. $x \vee x \to x$

3.3.2. $x \to x \wedge x$

3.3.3. $x \wedge y \to y \wedge x$

3.3.4. $x \vee y \to y \vee x$

3.3.5. $(x \wedge y) \wedge z \to x \wedge (y \wedge z)$

3.3.6. $(x \vee y) \vee z \to x \vee (y \vee z)$

3.3.7. $x \vee (y \vee z) \to y \vee (x \vee z)$

3.3.8. $x \wedge y \vee x \wedge z \to x \wedge (y \vee z)$

3.3.9. $x \vee y \wedge z \to (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

3.3.10 $x \wedge (y \vee z) \to x \wedge y \vee x \wedge z$

3.3.11. $x \vee x \wedge y \to x$

3.3.12. $x \wedge y \vee x \wedge z \to x$

3.3.13. $x \vee (\neg x \wedge z) \to x \vee y$

3.3.14. $x \wedge y \to x \vee y$

3.3.15. $x \wedge y \vee z \to x \vee z$

3.3.16. $(x \to y) \to (x \to (x \to y))$

3.3.17. $(y \to x) \to (x \vee y \to x)$

3.3.18. $(\neg (x \to x)) \to y$

3.3.19. $x \wedge y \to x \wedge (x \to y)$

3.3.20. $(x \to y) \to ((z \to x) \to (z \to x))$

3.3.21. $x \to (\neg y \to (x \to \neg y)$

3.3.22. $\neg (x \to x \vee y) \to z$

3.3.23. $\neg (\neg x \wedge \neg y) \to x \vee y$

3.3.24. $\neg x \vee \neg y \to \neg (x \wedge y)$

3.3.25. $\neg (\neg x \vee \neg y) \to x \wedge y$

3.3.26. $x \wedge y \to \neg(\neg x \vee \neg y)$

3.3.27. $y \to (x \to (z \to y))$

3.3.28. $(x \to (x \to y)) \to (x \to y)$

3.3.29. $x \to ((x \to y) \to y)$

3.3.30. $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z))$

3.3.31. $((x \to y) \to z) \to (x \to (y \to z))$

3.3.32. $x \to ((y \to z) \to ((x \to y) \wedge z))$

3.3.33. $x \to ((y \to z) \to ((x \to y) \wedge z))$

3.3.34. $x \wedge (y \to z) \to (x \wedge y \to z)$

3.3.35. $(x \to y) \to (x \wedge z \to y \wedge z)$

3.3.36. $x \wedge (x \to y) \to x \wedge y$

3.3.37. $x \wedge (y \to z) \to (y \to x \wedge z)$

3.3.38. $(x \to y) \to (x \vee z \to y \vee z)$

3.3.39. $(x \to y) \to (x \vee x \to y \vee z)$

3.3.40. $(x \to y) \to (z \vee x \to y \vee z)$

3.3.41. $(x \to y) \to (x \vee y \to y)$

3.3.42. $y \vee x \to ((x \to y) \to y)$

3.3.43. $(x \to y \vee z) \to (x \to y) \vee (x \to z)$

3.3.44. $(x \to z) \vee (y \to z) \to (x \wedge y \to z)$

3.3.45. $(x \wedge y \to z) \to (x \to z) \vee (y \to z)$

3.3.46. $(x \vee y \to z) \to (x \to z) \vee (y \to z)$

3.3.47. $\neg(x \wedge \neg x)$

3.3.48. $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x)$

3.3.49. $x \vee y \to (\neg x \to y)$

3.3.50. $\neg(x \wedge \neg y \to (x \to y)$

3.3.51. $\neg(x \vee \neg x) \to y$

3.3.52. $(x \to y) \to ((x \to y) \to y)$

3.3.53. $(y \to x \wedge \neg x) \to \neg y$

3.3.54. $x \vee y \to \neg(\neg x \vee \neg y)$

3.3.55. $(x \to y) \to \neg(x \wedge \neg y)$

3.3.56. $(\neg x \to y) \to x \vee y$

3.3.57. $\neg(x \to y) \to x \wedge \neg y$

3.3.58. $(x\to y)\wedge\neg y\to\neg x$

3.3.59. $(x\vee y)\wedge\neg y\to x$

3.3.60. $(x\to y)\to(\neg(y\wedge x)\to\neg(x\wedge z))$

3.3.61. $(\neg x\to y)\to(z\wedge\neg y\to x)$

3.3.62. $(x\wedge y\to z)\to(x\wedge\neg z\to\neg y)$

3.3.63. $((x\to y)\to y)\to(\neg x\to y)$

3.3.64. $(x\to\neg x)\to\neg x$

3.3.65. $(\neg x\to x)\to x$

3.3.66. $(x\to y)\to((x\to\neg y)\to\neg x)$

3.3.67. $((x\to\neg y)\to\neg x)\to(x\to y)$

3.3.68. $(x\to y)\to(((z\to x)\to y)\to y)$

3.3.69. $((x\to y)\to z)\to(x\to z)\to z)$

3.3.70. $((x\to y)\to y)\to(((z\to x)\to y)\to y)$

3.3.71. $((x\to y)\to x)\to x$

3.3.72. $((x\to z)\to z)\to((y\to z)\to((x\to y)\to z))$

3.3.73. $(x\vee\neg x\to y)\to((z\to\neg y)\to\neg(z\wedge x))$

3.3.74. $(x\to y)\wedge((z\to t)\wedge\neg(y\vee t)\to\neg(x\vee z)$

3.3.75. $(x\to y)\vee(y\to x)$

3.3.76. $((x\to y)\to x)\to(\neg x\to x)$

3.4. Доказать независимость аксиом.

3.4.1. $x\wedge y\to y$

3.4.2. $x\to\neg\neg x$

3.4.3. $\neg\neg x\to x$

3.4.4. $x\to x\vee y$

3.4.5. $(x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z))$

3.4.6. $(x\to z)\to((y\to z)\to(x\vee y\to z))$

3.4.7. $x\to(y\to x\wedge y)$

3.5. Доказать формальным путем, т.е. пользуясь аксиомами и правилами вывода (в том числе производными правилами), что присоединение к исчислению высказываний одной из указанных ниже формул в качестве новой аксиомы, ведет к противоречивому исчислению (т.е. доказуемости некоторой формулы и ее отрицания).

3.5.1. $x \vee y$

3.5.2. $\neg(x \to y)$

3.5.3. $\neg(x \wedge y)$

3.5.4. $\neg x \to x$

3.5.5. $x \vee y \to x$

3.5.6. $(x \to y) \to x$

3.5.7. $(x \to y) \to y$

3.5.8. $(x \to y) \to (y \to x)$

3.5.9. $(x \to y) \to (\neg x \to \neg y)$

3.6. Исследовать на непротиворечивость исчисление, получающее из ИВ заменой из указанных ниже аксиом на ее отрицание.

3.6.1. $G_1: x \to (y \to x)$

3.6.2. $G_3: x \wedge y \to x$

3.6.3. $G_6: x \to x \wedge y$

3.6.4 $G_{10}: x \to \neg\neg x$

3.6.5. $G_{11}: \neg\neg x \to x$

3.6.6. G_9: $(x \to y) \to (\neg y \to \neg x)$

3.6.7. $G_5: x \to (y \to x \wedge y)$

3.7. В качестве дополнительных аксиом введем тавтологии и исчисления высказываний.

1. $\neg x \to (x \to y)$
2. $x \vee \neg x$
3. $(x \to y) \to (\neg x \vee y)$
4. $(\neg x \vee y) \to (x \to y)$
5. $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y)$
6. $(\neg x \to y) \to ((\neg x \to \neg y) \to x)$
7. $(x \to y) \to ((x \to \neg y) \to \neg x)$
8. $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x)$
9. $((x \to y) \to x) \to x$

Для исчислений:

– L_1 (G_1 –G_8 ,G_{11}, 7); L_2 (G_1 –G_8 , 1, 2, 7), L_3 (G_1 –G_{10} ,2), L_4 (G_1 –G_4 , G_6 – G_{11}, 5), L_5 (G_1 –G_8 , 8), L_6 (G_1 –G_8 , G_{11}, 1, 7); - с языком $\{\wedge,\vee,\to,\neg\}$;

– P_1 (G_1 ,G_2 , 8); P_2 (G_1, G_2 , 9, G_6 –G_8); P_3 (G_1 ,G_2); P_4 (G_1 ,G_2 , 9); P_5 (G_9– $G_{11,}$ G_1 ,G_2) с другими языками, поставим следующие задачи.

3.7.1. Рассмотреть исчисление L_4 . Выяснить, будет ли новое исчисление равносильно ИВ.(Исчисления с одними и теми же связками называются равносильными, если всякая формула, доказуемая в одном из них, доказуема и в другом).

3.7.2. Рассмотреть исчисление L_3 с вопросом: будет ли исчисление L_3; и ИВ равносильны?

3.7.3. Рассмотреть исчисление P_3 с двумя правилами вывода: подстановки и правило заключения. Выяснить, полно ли оно в широком смысле (т.е. всякая тавтология доказуема).

3.7.4. В исчислении L_6 доказать формулы: $x\to\neg\neg x$, $\neg\neg(x\vee\neg x)$, $(x\to y)\to(\neg y\to\neg x)$.

3.7.5. Можно ли в исчислении высказывании доказать закон исключенного: $x\vee\neg x$, не используя аксиому G_{11}?

3.7.6. Можно ли в исчислении P_5 доказать формулу:

$(x\to(y\to z))\to(y\to(x\to z))$

3.7.7. В исчислении P_1 , доказать формулы:

$(x \to y)\to(\neg y\to\neg x)$; $x\to\neg\neg x$, $\neg\neg x\to x$.

3.7.8. Исследовать на полноту P_4 и P_2 .

3.7.9. Будут ли равносильными исчисления P_1 и P_5 ?

3.8. Провести анализ следующих рассуждений (3.8.1.-3.8.14). Верны ли они?

3.8.1 Если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6. Число не делится на 6 или не делится на 2. Число делится на 2. Следовательно, оно не делится на 3.

3.8.2. Андрей переутомился или болен. Если он переутомился, то он раздражается. Он не раздражается. Следовательно, он болен.

3.8.3. Если завтра будет холодно, то я надену теплое пальто, если рукав будет починен. Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следовательно, я не надену теплое пальто.

3.8.4. Если 2 - простое число, то 2 - наименьшее простое число. Если 2 - наименьшее простое число, то 1 не является простым числом. Число 1 не является простым числом, Следовательно, 2 - простое число.

3.8.5. Если Антон ляжет сегодня поздно, то утром он будет в нерабочем состоянии. Если он ляжет не поздно, то ему будет казаться, что он много времени теряет бесполезно. Следовательно, или Антон завтра будет в нерабочем состоянии, или ему будет казаться, что он много времени теряет напрасно.

3.8.6. Заработная плата возрастет, если будет инфляция. Если будет инфляция, то увеличится стоимость жизни. Заработная плата возрастает. Следовательно. Увеличится стоимость жизни.

3.8.7. Если он принадлежит к нашей компании, то он храбр и на него можно положиться. Он не принадлежит к нашей компании. Следовательно, он не храбр или на нее нельзя положиться.

3.8.8. В бюджете возникает дефицит, если не повысят налоги. Если в бюджете имеется дефицит, то государственные расходы на общественные нужды сократятся. Следовательно, если повысят налоги, то государственные расходы на общественные нужды не сократятся.

3.8.9. Если он автор этого слуха, то он глуп или беспринципен. Он не глуп и не лишен принципов. Следовательно, не он автор этого слуха.

3.8.10. Если Петр поедет во Владивосток, то Иван поедет в Киев. Петр поедет во Владивосток или в Челябинск. Петр поедет в Челябинск, то Анна останется в Москве. Но Анна не останется в Москве. Следовательно, Иван поедет в Киев.

3.8.11. Если сегодня вечером будет мороз, то я пойду на каток. Если завтра будет оттепель, то я пойду в музей, Сегодня вечером будет мороз или завтра будет оттепель. Следовательно, я пойду на каток или в музей.

3.8.12. Для того, чтобы студент был допущен к экзаменам, ему необходимо получить зачет по дискретной математике. Он получит этот зачет, если научится решать задачи по теории графов. Студент не научился решать все задачи. Следовательно, он не будет допущен к экзаменам.

3.8.13. Я пойду в кино на новую кинокомедию, или на занятие по математической логике. Если я пойду в кино на новую кинокомедию, то я от души посмеюсь. Если я пойду на занятие по математической логике, то я испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений. Следовательно, или я от всей души посмеюсь, или я испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений.

3.8.14. Если я пойду завтра на первое занятие, то должен буду рано вставать, а если пойду вечером на дискотеку, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно и встану рано, то буду вынужден довольствоваться пятью часами сна. Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Следовательно, я должен пропустить первое занятие или не ходить вечером на дискотеку.

IV. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

4.1. Понятие предиката и операции над ним

Алгебра логики, являясь важной частью логики, недостаточна для анализа многих рассуждений. Возникает необходимость в ее расширении и построении логической системы, средствами которой можно было бы исследовать и структуру тех высказываний, которые в рамках логики высказываний рассматриваются как элементарные.

Эта логическая система – логика предикатов, в которую логика высказываний входит как ее часть.

В высказывании «7 – простое число», «7» – субъект, «простое число» – предикат, т.е. «7» обладает свойством «быть простым числом». Заменив в примере число 7 переменной $x \in N$, получим высказывательную форму: «x – простое число». При одних значениях x (например $x = 17$, $x = 23$,…) эта форма дает истинное высказывание, при других значениях x (например $x = 4$, $x = 26$,…) эта форма дает ложное высказывание. Данная высказывательная форма определяет функцию одной переменной x, определенная на множестве N и принимающая значения из множества {0, 1}

Определение. Одноместным предикатом P(x) называется произвольная функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значения из множества {0, 1}.

Множество M – **область определения** предиката P(x).

Определение. Областью истинности предиката P(x) называется множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат принимает значение «истина». Обозначение I_P

$I_P = \{x \mid x \in M, P(x) = 1\}$

Пример: Q(x): «$\cos x = 0$», $I_Q = \{\pi/2 + k\pi, k \in Z\}$

Определение. Предикат P(x) с областью определения M называется **тождественно истинным** (тождественно ложным), если $I_P=M$ ($I_P=\varnothing$).

Обобщение одноместного предиката являет понятие многоместного предиката, которые выражают отношение между предметами.

Определение. n-местным предикатом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определенная на множестве

$M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ и принимающая значения из множества $\{0,1\}$.

Примеры двухместных предикатов:

$Q(x,y)$: «$x = y$», - предикат равенства на множестве $R^2 = R \times R$.

$R(x,y)$: «x ll y», - отношение параллельности прямых, определенное на множестве прямых, лежащих на данной плоскости.

4.2. Операции над предикатами

Предикаты, как и высказывания принимают два значения И и Л $\{1,0\}$, поэтому к ним применимы все операции логики высказываний

Рассмотрим применение операций логики высказываний к предикатам на примере одноместных предикатов, у которых области определения М совпадают.

Определение. Конъюнкцией двух предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат $P(x) \wedge Q(x)$ который принимает значение 1 при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение 1, и принимает значение 0 во всех остальных случаях.

Пример: P(x): «x делится на 3» , $M = Z$, $I_P = \{ 3k| k\in Z \}$.

Q(x): «x делится на 5», $M = Z$, $I_Q = \{ 5k| k\in Z \}$.

$P(x) \wedge Q(x)$: «x делится на 15»

Очевидно $I_{P\wedge Q} = I_P \cap I_Q$, $I_{P\wedge Q} = \{ 15k| k\in Z \}$.

Аналогично определяются предикаты $P(x) \vee Q(x)$, $\neg P(x)$, $P(x)\to Q(x)$ При этом $I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q$, $I_{(\neg P)} = M \setminus I_P$, $I_{P\to Q} = I_{(\neg P)} \cup I_Q$

Операции логики высказываний преобразуют предикаты в предикаты. Рассмотрим операции, преобразующие предикаты в высказывания.

Квантор всеобщности. Пусть $P(x)$ – предикат от одной свободной переменной $x \in M$. Под выражением $\forall x\ P(x)$ будем подразумевать высказывание, истинное, если $P(x)$ истинно для каждого элемента $x \in M$ и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x, и переменную x называют связанной квантором $\forall$.

$\forall$ – квантор всеобщности – перевернутая относительно горизонтальной оси первая буква английского слова All.

Выражение $\forall x\ P(x)$ читают: «для всякого x P(x) истинно».

Квантор существования. Пусть $Q(x)$ – предикат от одной свободной переменной $x \in M$. Под выражением $\exists x\ Q(x)$ будем подразумевать высказывание, которое истинно, если существует элемент $x \in M$, для которогоQ(x) истинно и ложно в противном случае. В высказывании $\exists x\ Q(x)$ переменная x связана квантором $\exists$.

$\exists$ – квантор существования – перевернутая относительно вертикальной оси первая буква английского слова Exists.

Выражение $\exists x\ Q(x)$ читают: «существует x такое, что Q(x) истинно».

Пусть на множестве M задан двухместный предикат $P(x,y)$. Если применить операцию навешивания квантора по переменной x к $P(x,y)$, получим одноместный предикат $\forall x\ P(x,y)$ зависящий от переменной y (или $\exists x\ P(x,y)$). Применив кванторную операцию по переменной y, получим высказывание одного из видов: $\forall y\ \forall x\ P(x,y)$, $\exists y\ \forall x\ P(x,y)$, $\forall y\ \exists x\ P(x,y)$, $\exists y\ \exists x\ P(x,y)$.

Пример: Дан предикат $R(x,t)$: «Я вижу предмет x в момент времени t ». Запишите следующие утверждения на языке логики предикатов:

а) Я всегда что-то вижу.

б) Иногда я ничего не вижу.

в) Существует предмет который я никогда не вижу.

Пусть дан предикат $P(x)$, определенный на конечном множестве $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Если предикат $P(x)$ тождественно истинный, то истинными будут высказывания $P(a_1)$, $P(a_2)$, … , $P(a_n)$. При этом истинными будут высказывание $\forall x\ P(x)$ и конъюнкция $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$.

Если хотя бы для одного элемента $a_i \in M$ будет ложным $P(a_i)$, то ложными будут высказывание $\forall x\ P(x)$ и конъюнкция $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$, т.е. $\forall x\ P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$.

Аналогично рассуждая получим $\exists x\ P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$.

4.3. Формулы логики предикатов

Определим исходные символы логики предикатов.

p,q,r,… – **переменные высказывания**, принимающие значения из {0,1}.

x, y, z,… – **предметные переменные**, которые пробегают значения из некоторого множества M.

x^o, y^o, z^o,… – **предметные константы**, значение предметных переменных.

P, Q, R – **предикатные символы**, с каждым из которых связано натуральное число – местность предиката.

Λ , v, →, ┐ – символы **логических операций.**

$\forall x$, $\exists x$ – символы **кванторных операций.**

(,) скобки и запятые – **вспомогательные символы.**

Определение. Каждое высказывание, как переменное, так и постоянное, является формулой (элементарной).

1. Если $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-местный предикатный символ (переменный или постоянный) и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ предметные переменные или предметные постоянные, то $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть формула (элементарная). В ней предметные переменные являются свободными, не связанными кванторами.

2. Если A и B – формулы, причем одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ формулы. В этих формулах свободные переменные остаются свободными, те, которые были связанными, являются связанными.

3. Если A – формула, то $\neg A$ – формула, и характер предметных переменных при переходе от A к $\neg A$ не меняется.

4. Если $A(x)$ – формула, в которую предметная переменная входит свободно, то слова $\forall x\ A(x)$, $\exists x\ A(x)$ являются формулами, причем предметная переменная входит в них связанно.

5. Никакие другие выражения, отличные от 1-5 формулами не являются.

Определение. Подформула – часть формулы, которая сама является формулой.

Пример: Пусть $P(x)$, $Q(x,y)$ – предикаты;

q, r – переменные высказывания.

Тогда следующие выражения суть формулы: q, $P(x)$, $P(x) \wedge Q(x,y)$; $\forall x\ P(x) \rightarrow \wedge\ x\ Q(x,y)$, $(\neg\ Q(x,y) \vee q) \rightarrow r$.

Выражение $\forall x\ Q(x,y) \rightarrow P(x)$ не является формулой, нарушен пункт 3: в $\forall x\ Q(x,y)$ переменная x входит связано, а в $P(x)$ переменная x входит свободно.

Очевидно, **всякая формула логики высказываний является формулой логики предикатов**.

Особо отметим роль предметных переменных в формуле. Данное вхождение переменной в формулу называется **связанным вхождением**, если оно находится непосредственно за знаком квантора или в области действия квантора с этой переменной и **свободным** в противном случае.

Определение. Переменная x называется **свободной в формуле А**, если в А имеется свободное вхождение x, и **связанной переменной формулы А**, если в А имеется связанное вхождение переменной x.

Определение. Формула А логики предикатов называется **замкнутой**, если все ее переменные связаны.

Можно говорить о логическом значении формулы логики предикатов, если задано множество М, на котором определены входящие в формулу предикаты.

Пусть дана некоторая формула, А. Выпишем все свободные переменные и все предикатные символы в этой формуле:

$< x_1, \dots, x_i, P_1, \dots, P_i >$ (1) – параметры формулы А. Зададим множество М и рассмотрим отображение φ множества параметров (1) на множество объектов: каждому переменному x_i поставим в соответствие элемент $x_i^o \in M(x_i \xrightarrow{\varphi} x_i^o)$; каждому предикатному символу P_j поставим в соответствие предикат P_j^o, определенный на M.

Определение. Пара $Y = \{M,\varphi\}$ называется **интерпретацией** формулы A.

Если формула в интерпретации $\{M,\varphi\}$ есть истинное высказывание, то говорят, что A истина в этой интерпретации.

Пример: $A = \exists y\, P(y) \rightarrow P(x)$. Параметры формулы $< x, P >$, построим интерпретацию $Y = \{N, 5, P^o(x)$ – быть простым числом$\}$

$A^o = \exists y\ P^o(y) \rightarrow P^o(5)$. Получили истинное высказывание в интерпретации Y.

Если $Y_1 = \{N, 6, P^o(x)$ – быть простым числом$\}$

$A^o = \exists y\, P^o(y) \rightarrow P^o(6)$ – ложное высказывание в интерпретации Y_1.

Пример: $B = \forall y\ \forall x\ (Q(x,y) \rightarrow \exists z\ (Q(x,z) \wedge Q(z,y)))$. Это замкнутая формула, ее параметры $< Q >$. Рассмотрим интерпретацию $Y = \{R, Q^o(x,y)$ = “ $<$ ”$\}$. Имеем $\forall y\ \forall x\ (x < y \rightarrow \exists z\ (x < z \wedge z < y))$ истинное высказывание в данной интерпретации, выражающее свойство плотности рациональных чисел.

4.4. Равносильные формулы логики предикатов

Определение.: Формулы A и B логики предикатов называются **равносильными**, если они принимают одинаковые истинностные значения при всякой интерпретации.

Как и в алгебре высказываний примем для равносильных формул обозначение A = B.

Пример: $\neg(\forall x\, P(x)) = \exists x\ \neg P(x)$ (1)

Если высказывание $\neg(\forall x\ P(x))$ истинно, то высказывание $\forall x\ P(x)$ – ложно. Последнее равносильно высказыванию: существует x_o , для которого $\neg P(x_o)$ истинно. Следовательно, имеет место

$\neg(\forall x\, P(x)) = \exists x\ \neg P(x)$.

Аналогично можно доказать $\neg(\exists x\, P(x)) = \forall x\ \neg P(x)$ (2)

На основании равносильностей (1) и (2) мы получаем следующее правило построения отрицания формулы логики предикатов с квантором: квантор общности меняется на квантор существования и наоборот, а знак отрицания распространяется на предикат.

Все равносильности алгебры высказываний будут верны, если в них вместо переменных высказываний подставить формулы логики предикатов.

Выпишем основные равносильности логики предикатов в дополнение к (1) и (2). Пусть P(x) и Q(x) – переменные предикаты, C – переменное высказывание. Тогда

$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) = \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$ (3)

$\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) = \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$ (4)

$\forall x\, P(x) \wedge C = \forall x\, (P(x) \wedge C)$ (5)

$\forall x\, P(x) \vee C = \forall x\, (P(x) \vee C)$ (6)

$\exists x\, P(x) \wedge C = \exists x\, (P(x) \wedge C)$ (7)

$\exists x\, P(x) \vee C = \exists x\, (P(x) \vee C)$ (8)

Итак, в дополнение к равносильностям в логике высказываний, в логике предикатов имеют место следующие равносильности:

1. перенос знака отрицания за квантор в силу (1) и (2);
2. вынос квантора за скобки в допустимых случаях (5) – (8);
3. перестановка рядом стоящих одноименных кванторов;
4. замена любой подформулы равносильной ей формулой;
5. связанную предметную переменную можно заменить другой переменной, отличной от всех переменных, входящих в формулу.

Пример: $\forall y\, P(x,y) \rightarrow \forall x\, Q(x) = \forall y\, P(x,y) \rightarrow \forall z\, Q(z)$

Доказательство. Докажем равносильность $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) = \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$ (3)

Если предикаты P(x) и Q(x) одновременно тождественно истинны, то будет тождественно истинным и предикат $P(x) \wedge Q(x)$, а поэтому будут истинными высказывания $\forall x\, P(x)$, $\forall x\, Q(x)$, $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$, т.е. обе части равносильности (3) принимают значение «истина».

Пусть хотя бы один из предикатов, например $P(x)$, будет не тождественно истинным. Тогда не тождественно истинным будет предикат $P(x) \wedge Q(x)$ и ложными будут высказывания: $\forall x\, P(x)$, $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$, $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$, т.е. обе части равносильности (3) принимают одинаковые ложные значения. Равносильность (3) доказана.

Особо отметим, что формула $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$ не равносильна формуле $\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$; формула $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ не равносильна формуле $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$.

При этом справедливы равносильности:

$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) = \forall x\, P(x) \vee \forall y\, Q(y) = \forall x\, (P(x) \vee \forall y\, Q(y)) =$

$= \forall x\, \forall y\, (P(x) \vee P(y))$.

$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) = \exists x\, P(x) \wedge \exists z\, Q(z) = \exists x\, (P(x) \wedge \exists z\, Q(z)) =$

$= \exists x\, \exists z\, (P(x) \wedge Q(z))$.

4.5. Предваренная нормальная форма (ПНФ)

Определение. Говорят, что формула логики предикатов имеет **нормальную форму**, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операции отрицания отнесены к элементарным формулам.

Используя равносильные преобразования каждую формулу логики предикатов можно привести к нормальной форме.

Пример: Приведем к нормальной форме формулы:

1. $\exists x\, \forall y\, P(x,y) \to \forall x\, Q(x)$

$\exists x\, \forall y\, P(x,y) \to \forall x\, Q(x) = \neg\, (\exists x\, \forall y\, P(x,y)) \vee \forall x\, Q(x) =$

$= \forall x\, \exists y\, \neg\, (P(x,y)) \vee \forall z\, Q(z) = \forall x\, \exists y\, \forall z\, (\neg\, (P(x,y)) \vee Q(z))$.

2. $\neg\, (\forall x\, P(x) \vee \exists x\, (Q(x) \to R(x)))$

$\neg\, (\forall x\, P(x) \vee \exists x\, (Q(x) \to R(x))) = \neg\, (\forall x\, P(x)) \wedge \neg\, (\exists x\, (Q(x) \to R(x))) = = \exists x\, \neg\, P(x) \wedge \forall x\, \neg\, (\exists x\, (\neg\, Q(x) \vee R(x))) = \exists x\, \neg\, P(x) \wedge \forall x\, (Q(x) \wedge \neg\, R(x))$.

Определение. Говорят, что формула A логики предикатов находится в **предваренной (или пренексной) нормальной форме**, если она имеет нормальную форму и, либо вообще не имеет кванторов, либо имеет вид:

$(\sigma x_1)(\sigma x_2)$ … (σx_n) $A(x_1, x_2, \dots, x_m)$ $(n \le m)$, где под символом (σx_i) понимается один из кванторов $\forall x_i$ или $\exists x_i$ и A – бескванторная формула.

ТЕОРЕМА: Для всякой формулы логики предикатов существует равносильная ей предваренная нормальная форма (П.Н.Ф).

Пример: Найдите П.Н.Ф. для формулы

$A = \exists x\ \forall y\ P(x,y) \vee \neg(\forall x\ \exists y\ Q(x,y))$

$A = \exists x\ \forall y\ P(x,y) \vee \exists x\ \forall y\ \neg Q(x,y) = \exists x(\forall y\ P(x,y) \vee \forall z\ Q(x,z)) = = \exists x\ \forall y\ \forall z\ (P(x,y) \vee \neg Q(x,z))$

4.6. Выполнимость и общезначимость

Определение. Формула A логики предикатов называется **выполнимой в области M**, если существует интерпретация с областью M, $Y = \{M, \varphi\}$, на которой формула A истинна.

Пример: $A = \exists x\ \exists y\ (P(x) \wedge \neg P(y))$. Эта формула выполнима, так как существует интерпретация Y = {N, P(x) – «быть нечетным»}. Стоит заметить, что данная формула не выполнима ни на каком множестве из одного элемента. Убедитесь в этом.

Вообще выполнимость на множестве зависит исключительно от мощности (числа элементов) множества, а не от содержания.

ТЕОРЕМА 1: Если формула логики предикатов выполнима на непустом множестве M, то она выполнима на всяком другом множестве M′ той же или большей мощности ($|M'| \ge |M|$).

Определение. Формула A логики предикатов **тождественна** на множестве M ($M \ne \varnothing$), если она истинна при всякой интерпретации на M.

ТЕОРЕМА 2: Если формула A тождественна на некотором множестве, то она тождественна на всяком множестве той же или меньшей мощности.

Определение. Формула A называется **выполнимой**, если она выполнима на каком-нибудь множестве.

Определение. Формула A называется **общезначимой**, если она тождественна на всяком множестве.

Пример: $B = \forall x\ P(x) \to P(y)$. Параметры формулы <y, P>. Докажем, что формула B общезначима. Пусть M – произвольное множество, и интерпретация $Y=\{M, y^o, P^o\}$. Покажем, что формула B истинна в любой интерпретации.

$B_Y = \forall x\ P^o(x) \to P^o(y^o)$, значение формулы истинно, т.к.:

a) если $\forall x\ P^o(x)$ истинно, то и формула $\forall x\ P^o(x) \to P^o(y^o)$ истинна.

b) если $\forall x\ P^o(x)$ ложно, то вся формула B_Y истинна из определения импликации.

Пример: $C = P(y) \to \forall x\ P(x)$. Докажем, что формула C не общезначима. Для этого достаточно построить опровергающую интерпретацию, на которой она ложна. Пусть $Y=\{N, y_o = 2, P^o$ – быть простым числом$\}$. Тогда формула $C_Y = P^o(2) \to \forall x\ P^o(x)$ очевидно ложна.

Пример: $P = \forall x\ (P(x) \vee \neg P(x))$ тождественно истинна в любой интерпретации, т.е. общезначима (закон исключенного третьего).

Пример: $D = \forall x\ \ \exists y\ \ P(x,y)$ – выполнимая формула. Эта формула тождественно истинная в интерпретации $Y=\{N_o \times N_o, P^o(x, y)$ – предикат «$x < y$»$\}$, т.е. выполнима.

Но на любом конечном множестве, например $M_1 = E_1 \times E_1$, где $E_1 = \{0, 1, 2, \dots ,k\}$, с интерпретацией $Y_1 = \{ E_1 \times E_1, P^o(x, y)$ – предикат «$x < y$»$\}$. Формула $\forall x\ \ \exists y\ \ P(x,y)$ тождественно ложна в области M_1 и, следовательно не выполнима в области M_1. При этом формула $\forall x\ \ \exists y\ P(x,y)$ не общезначима.

Вывод:

1. Если формула A общезначима, то она выполнима на всякой области.

2. Если формула A тождественно истинна в области M, то она и выполнима в этой области.

3. Если формула A тождественно ложна в области M, то она не выполнима в области M.

4. Если формула A не выполнима, то она тождественно ложна на всякой области.

Итак, выделяются два класса формул логики предикатов: **выполнимые** и **не выполнимые** формулы.

Общезначимую формулу называют **логическим законом**.

Установим связь между общезначимостью и выполнимостью формул логики предикатов.

ТЕОРЕМА: Для того, чтобы формула А логики предикатов была общезначима, необходимо и достаточно, чтобы ее отрицание было не выполнимо.

А – общезначима $\Leftrightarrow$ $\neg$ А – не выполнима.

ТЕОРЕМА: Для того, чтобы формула А была выполнимой, необходимо и достаточно, чтобы формула $\neg$ А была не общезначима.

Определение. Пусть А формула логики предикатов и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ее полный список свободных предметных переменных. Тогда формула $\forall x_1, \forall x_2, \ldots, \forall x_n$ А называется **замыканием существования** формулы А. Замыкание формулы всегда есть замкнутая формула. Замыкание замкнутой формулы совпадает с самой формулой.

Определение. Формула А логики предикатов называется **подстановкой в тавтологию**, если она получается из тавтологии исчисления высказываний путем подстановки на место всех ее переменных формул логики предикатов.

Помимо теорем, устанавливающих связь между общезначимостью и выполнимостью формул логики предикатов, отметим следующие свойства:

1. Формула А общезначима тогда и только тогда, когда замыкание общности формулы А общезначимо.
2. Формула А выполнима тогда и только тогда, когда замыкание существования формулы А выполнимо.
3. Всякая подстановка в тавтологию общезначима.

Пример: Формула, выполнимая в бесконечной области и невыполнимая ни в какой конечной области.

$A = \forall x\ \forall y\ \forall z\ (P(x,x) \wedge (\neg P(x,y) \rightarrow (\neg P(y,z) \rightarrow \neg P(x,z))) \wedge \neg P(x,u))$

Пусть формула выполнима в некоторой области М. Тогда существует интерпретация $Y = < M, P^o, u^o >$ в которой $\left| A \right|_{\mathbf{Y}} = 1$. Но в этом случае $\left| \neg P^o(x,y) \to (\neg P^o(y,z) \to \neg P^o(x,z)) \right|_{\mathbf{Y}} = 1$, $\left| P^o(x,x) \right|_{\mathbf{Y}} = 1$ Кроме того $\left| \neg P^o(x,u^o) \right| = 1$

Нетрудно убедиться, что в этом случае предикат $\neg P^o(x,y)$ есть отношение порядка между элементами области М, т.е. выполняются свойства антисимметричности и транзитивности.

Возьмем $M = \{1, 2, \dots , n, \dots\}$ и P(x,y): «$x \geq y$». Тогда $\neg P(x,y)$ означает «$x < y$». При такой интерпретации формула принимает вид: $A^o = \forall x \forall y\ \forall z\ \exists u\ (\neg\ (x < x) \wedge\ ((x < y) \to (y < z \to x < z)) \wedge\ (x < u))$ и $\left| A^o \right|_{\mathbf{Y}} = 1$

Но уже в области $K = \{0, 1\}$ эта формула тождественно ложна.

4.7. Проблема разрешимости в логике предикатов

Проблема разрешимости в логике предикатов звучит так: существует ли алгоритм, позволяющий для любой формулы А логики предикатов установить, к какому классу она относится, т.е. является ли она общезначимой или выполнимой, или тождественно ложной.

Если бы такой алгоритм существовал, то, как и в алгебре высказываний , он сводился бы к критерию тождественной истинности любой формулы логики предикатов.

В частности в логике предикатов не применим метод перебора всех вариантов значений переменных, входящих в формулу, т.к. таких вариантов может быть бесконечно много.

В 1936 году американский математик А. Черч доказал, что **проблема разрешимости логики предикатов в общем, виде алгоритмически не разрешима.**

Итак, нет алгоритма, устанавливающего, к какому классу формул относится всякая формула логики предикатов.

Для частных подклассов алгоритм разрешения существует. Рассмотрим некоторые из них.

Проблема разрешимости в случае конечных областей. В случае конечных областей кванторные операции можно заменить операциями конъюнкции и дизъюнкции и тем самым свести формулу логики предикатов к формуле алгебры логики, в которой проблема разрешимости разрешима.

Пример: $B = \forall x\ \exists y\ (P(x,y) \vee \neg P(x,x))$ с областью $M = \{a, b\}$ Тогда $\forall x\ \exists y\ (P(x,y) \vee \neg P(x,x)) = \forall x\ (P(x,a) \vee \neg P(x,x) \vee P(x,b)) = (P(a,a) \vee \neg P(a,a) \vee P(a,b))\ \boldsymbol{\Lambda}\ (P(b,a) \vee \neg P(b,b) \vee P(b,b))$.

Последняя формула истинна как формула, содержащая в каждой конъюнктивной составляющей дизъюнкцию высказывания и его отрицание.

Проблема разрешимости для формул, содержащих в предваренной нормальной форме кванторы одного типа. Итак, речь идет о замыкании общности формулы, или замыкании существования.

ТЕОРЕМА: Если замкнутая формула логики предикатов в П.Н.Ф. содержит только кванторы существования, число которых равно n, и тождественно истинна на любой области, состоящей из одного элемента, то она общезначима.

ТЕОРЕМА: Если замкнутая формула логики предикатов в П.Н.Ф. содержит только кванторы общности, число которых равно n, и тождественно истинна на всяком множестве, содержащем не более, чем n элементов, то она общезначима.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Какие из следующих выражений являются предикатами, а какие высказываниями:

1. «x делится на 5» ($x \in N$);
2. 2 + 3 = 4;
3. $|x|>0$;
4. $x+2<y-3$;
5. $x^2>0$;
6. «прямая x параллельна прямой y»;
7. «x есть отец y»;
8. x^2+2x+4 ($x \in B$);
9. $(x+y)^2= x^2 +2xy+ y^2$ ($x, y \in R$);
10. «x и y» (x, y пробегают множество всех студентов данной группы);
11. « x перпендикулярна y» (x, y пробегают множество всех прямых одной плоскости).

4.2. В следующих предикатах замените предметные переменные постоянными так, чтобы получить а) истинное высказывание; б) ложное высказывание (на множестве R):

1. $x+2>5$;
2. $|x| > 0$;
3. $x^0=1$;
4. $\lg x < 0$;
5. $|\sin x| < 1$;
6. $x^2 < x$;
7. $x^2+y^2>0$.

4.3. Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая что все переменные пробегают множество действительных чисел :

1. $(\forall x)(\exists y)(x+y=7)$;
2. $(\forall x)(\forall y)(x+y=7)$;
3. $(\exists x)(\exists y)(x+y=7)$;

4. $(\exists x)(\forall y)(x+y=7)$;
5. $[(\forall x)(\forall y)(x+y=3)]\rightarrow(3=4)$;
6. $(\forall x)[(x^2>x)\leftrightarrow((x>1)\vee(x<0))]$;
7. $(\forall x)(|x| = -x)$;
8. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x + y = z)$;
9. $(\forall x)(\exists a)(\forall b)(x^2 + ax + b > 0)$;
10. $(\exists b)(\forall a)(\exists x)(x^2 + ax + b=0)$;
11. $(\exists a)(\forall b)(\exists x)(x^2 + ax + b=0)$;

4.4. Перед следующими предикатами поставьте соответствующие кванторы так, чтобы получить истинное высказывание:

1. $(x+y)z=xz+yz$, x,y,z—произвольные числа;
2. $3x=6$;
3. $x+1>5$;
4. $|x|\geq 0$;
5. $x^2<0$;
6. $|\cos x|\geq 1$;
7. $\lg x>0$;
8. $(x=y)\vee(x<y)\vee(x>y)$.

4.5. Найдите область истинности следующих предикатов ($x\in R$):

1. а) $x^2+3x+6=0$;
2. $\frac{7}{x+4}+x=4$;
3. $\frac{x^2-16}{x+3}=0$;
4. $\frac{x}{2x+3}=\frac{1}{x}$;

4 6. Найдите область истинности следующих предикатов (x∈R):

1. $\frac{2x-3}{4}-\frac{x+1}{3}>\frac{1}{2}-\frac{3-x}{5}$;
2. $\frac{3x-5}{9}+\frac{2x+5}{2}>\frac{8x+7}{6}$;
3. $\frac{-(x+7)}{(x+5)^2}<0$;
4. $\frac{-37}{x-2}>0$.

4.7. Найдите область истинности следующих предикатов:

1. |3x-2|>8;
2. |3x-1|=1-3x;
3. |5x-3|<7;
4. |2x+4|≥2x+4;
5. 2-|x|=1,7;
6. |2x+6|≤2x+6;
7. |2x+2|<6;
8. $\sqrt{x^2}=x$;
9. $\sqrt{x^2}=-x$;
10. |3x–1|=3x–1.

4.8. Найдите область истинности следующих предикатов :

1. $(\frac{x-1}{4}<x+1{,}5)\wedge(2x-8>3-0{,}5x)$;
2. $(\frac{6-x}{2}-4<\frac{2+3x}{5}-1)\wedge(\frac{2}{3}x+2(2x-1)<3(x+1)$;
3. $(\frac{3-3x}{2}-\frac{5x+1}{3}+2x<3x-3)\wedge(\frac{5x+3}{3}-3(1-x)+2x<\frac{11+31x}{5})$;
4. $(\frac{1-3x}{2}-\frac{1+5x}{3}+x<2x-4)\wedge(\frac{5x}{3}+3(x-1)<\frac{21x+6}{5})$.

4.9. Найдите область истинности следующих предикатов:

1. $((x+3)^2 (x-1)<0) \wedge (x^2 -4x+6>x(x-5))$;
2. $((x^2 -6x+9)(2x-10)<0) \wedge ((6+x(7-x)< x^2 +2x(5-x))$.

4.10. Найдите область истинности следующих предикатов:

1. $(1+\frac{4-x}{4} \le \frac{2x-1}{6}) \vee (-1 < 5x-5)$;
2. $(\frac{2x+3}{2} - \frac{3-x}{7} > 2) \vee (-3x-1 > 2)$;
3. $(\frac{13-2x}{5} + 6x > \frac{x}{2} + 4) \vee (\frac{2x-3}{4} - \frac{x+1}{3} > \frac{1}{2} - \frac{3-x}{5})$;,
4. $(0{,}2(2x–3)<x–2) \vee (5x–7>x–6)$;
5. $3 \cos 2^x =1+4 \sin 2^{x-1}$;
6. $\log_{\cos x} \frac{9-14\cos x}{8} = 2$;
7. $\arcsin(4x^3 –3x^2 –1)= \arcsin(x–1)$.

4.11. Найдите множества истинности предикатов, заданных над указанными множествами :

1. «x кратно 3», M ={1 2 3 4,5,6, 7, 8, 9};
2. «x кратно 3», M ={3,6,9,1 2};
3. «x кратно 3», M = {2 4 8};
4. «$x^2+4>0$», M=R;
5. «$\sin x >1$», M=R;
6. «$x^2+x–6=0$», M=R;
7. «$x_1^2+x_2^2=0$», $M_1=M_2=R$;
8. «$x_1<x_2$», M_1= {1, 2, 3, 4, 5}, M_2 = {3, 5, 7};
9. «x_1 делит x_2 », M_1= M_2={2, 3, 4, 6};
10. «$x_1+x_2<0$», M_1={-3,-2,-1,0,1,2,3}, M_2= {-3, 1,2 }

4.12. Изобразите на координатной прямой множества истинности следующих заданных на R одноместных предикатов :

1. $x<3$;
2. $|x|=4$;
3. $|x|<2$;
4. $|x|>2$;
5. $|x—4|\geq 1$;
6. $|x+3|<2$;
7. $x^2+6x–16\leq 0$;
8. $x^2\geq 0$;
9. $|x+2|<5$;
10. $|x—1|\leq|2x+4|$.

4.13. Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих заданных на R двуместных предикатов :

1. $x = y$;
2. $|x|=|y|$;
3. $x^2+y^2=9$;
4. $x^2 +y^2 –4x+6y+14=0$;
5. $x^2 \leq y$;
6. $y=1/y$;
7. $2x+6y<3$;
8. $xy=0$;
9. $x^2 =y^2$;
10. $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$;

4.14. Выясните, равносильны ли следующие предикаты над множеством действительных чисел R, затем над множеством рациональных числе Q, над множеством целых чисел Z, над множеством натуральных N:

1. $x^2 =1$ и $(x—1)(x+\sqrt{2})(x–1,5)(x+1)=0$;
2. $\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}=x+\sqrt{3}$ и $\cos x\leq 1$;

3. $x^2 = 0$ и $|x| \le 0$;
4. $\sqrt{x}\sqrt{y} = 15$ и $\sqrt{xy} = 15$;
5. $|x|=|y|$, $x=y$;

4.15. Множество задайте так, чтобы следующие предикаты были равносильны:

1. «x кратно 5», «x кратно 7»;
2. «город x находится на берегу реки Енисей», «город x находится на берегу реки Ангара»;
3. « x – простое число», « x – нечетное число»;
4. «x – параллелограмм», «диагонали в четырехугольнике равны»;
5. «треугольник x равнобедренный», «три высоты треугольника x равны между собой» .

4.16. Над множеством действительных чисел R заданы два предиката «$x > 3$» и «$x < 3$».

1. Выясните, для каких действительных чисел истинна конъюнкция этих предикатов.
2. Найдите множество истинности предиката, являющегося дизъюнкция этих предикатов.
3. Найдите множество всех действительных чисел, которые превращают в истинное высказывание предикат «$(x > 3)\rightarrow(x < 3)$»
4. Найдите множество всех действительных чисел, которые превращают в истинное высказывание предикат «$(x > 3)\leftrightarrow(x < 3)$»

4.17. Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих заданных на R двуместных предикатов:

1. $(x\ge0)\wedge(y\le0)$;
2. $(x\ge0)\wedge(y\le0)$;
3. $(x\ge0)\rightarrow(y\le0)$;
4. $(x\ge0) \leftrightarrow(y\le0)$;
5. $(|x|<5)\wedge(x\ge1)$;
6. $(\sin x > 0)\wedge(|x-3|<6)$;

7. $(x^2+y^2=4)\vee(y>0)$;
   8. $(x^2+y^2>4)\leftrightarrow(xy<0)$;
   9. $(x+y=2)\vee(y>0)$.

4.18. Какие вхождения переменных являются свободными, а какие связанными в следующих формулах:

1. $(\forall x)(P(x)$;
2. $(\forall x)\ (P(x)\to P(y)$;
3. $P(x)\to(\exists x)Q(x)$;
4. $(\exists x)(\forall y)(A(x)\wedge B(y))$
5. $(\exists x)(\exists y)H(x, y)\wedge Q(z)$;
6. $(\exists x)(\forall y)(A(x)\wedge B(y))\to(\forall y)(C(x, y)$;
7. $(\forall x)P(x, y)\to(\forall y)Q(y)$;
8. $(\forall x)P(x, y)\to(\forall y)Q(x, y)$;
9. $\neg(\exists z)Q(z, z)\wedge R(x, y, z)$;
10. $(\exists u)(\forall v)B(u, v)\to(\exists t)B(t, v)$;

4.19. Для следующих формул алгебры предикатов найдите равносильную ей формулу, в которой имеются только операции $\neg$, $\wedge$, $\vee$, и знаки отрицания относятся только к предикатным переменным и к высказываниям:

1. $(\exists x)(P(x)\to(\forall y)Q(y)$;
2. $\neg((\forall x)(P(x)\to(\exists\ y)Q(y)$;
3. $(\forall x)(P(x)\to\neg(Q(y)\to(\forall z)R(z)$;
4. $\neg[(\forall x)(P(x)\to Q(x))(\exists y)(\neg R(y)S(z))]$;
5. $\neg[(\forall x)(\exists y)((P(y))(P(y)\to P(x)))]$
6. $\neg[(\forall x)P(x)\vee(\exists x)(Q(x)\to R(x))]$;
7. $(\exists x)((\exists y)P(y)\to Q(x))\wedge\neg(\forall y)(\exists x)(Q(x)\to P(y))$;
8. $((\exists x)P(x)\to(\forall y)Q(y))\to R(z)$.

4.20. Выполнимы ли следующие формулы :

1. $(\exists x)P(x)$;
2. $(\forall x)P(x)$;
3. $(\exists x)(\forall y)P(x, x)\wedge\neg P(x, y)$;

4. $(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge\neg P(y))$;
5. $(\exists x)(\forall y)(P(x, y)\to(\forall z)R(x, y, z))$?

4.21. Приведите к пренексной нормальной форме следующие формулы:

1. $\neg(\exists x)(\forall y)(\exists z)U(x, y, z)$
2. $(\exists x)(\forall y)U(x, y) \wedge(\exists x)(\forall y)R(x, y)$;
3. $(\exists x)(\forall y)U(x, y) \to(\exists x)(\forall y)R(x, y)$;
4. $(\exists y)(P(x)\to Q(y))\to(\forall y)(P(y)\vee(\forall z)Q(z))$;
5. $(\forall x)Q(x, y)\vee[(\exists x)Q(x, x)\to(\forall z)(R(t, z)\to(\exists x)Q(x, x))]$;
6. $(\forall y)Q(x, y)\to(\exists x)R(x, t, z)$;
7. $(\forall x)Q(x, y)\to R(x, x)$;
8. $P(y)\to\neg[(\forall x)Q(x, y)\to P(y)]$;
9. $(\exists x)R(x, y, z)\to\neg(\forall x)Q(x, y)$;
10. $[(\exists x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)]\wedge[S(y)\to(\forall x)R(x)]$;
11. $(\forall x)P(x, y)\vee[(\exists x)p(x, x)\to(\forall z)(\neg(Q(y, z)\to(\exists x)P(x, z)))]$;
12. $P(y)Q(x)\to\neg(\forall y)R(y, z)$;
13. $(\forall x)(\exists y)P(x, y)\to (\exists z)(\forall x)Q(x, z)$;
14. $(\forall x)(P(x)\to Q(x))\to[(\exists x)P(x)\to(\exists y)Q(y)]$.

4.22. Доказать, что формула $\exists x\exists y\exists z(R(x, y)\wedge R(x, x)\wedge R(y, z)\wedge(\forall t)\neg R(t, t)$ не является выполнимой на любом множестве из двух элементов, но является выполнимой на множестве из трех элементов.

4.23 Показать, что следующие формулы не являются общезначимыми:

1. $(\forall xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x))$;
2. $\forall x(P(x)\vee Q(x))\to(\forall xP(x)\vee Q(x))$;
3. $\exists x\forall y[R(x, y)\wedge R(y, x)\to (R(x, x) \leftrightarrow R(y, y))]$;
4. $\forall y\exists xQ(x,y)\to\exists x\forall yQ(x, y)$.

4.24. Являются ли следующие формулы логики предикатов общезначимыми:

1. $\exists xP(x)\to\forall xP(x)$;
2. $\neg[\exists xP(x)\to\forall xP(x)]$;

3. $\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \exists x Q(x, y)$;

4. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$;
5. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$;
6. $\exists x P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$;
7. $\exists x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$;
8. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \to \forall x Q(x))$;

4.25 Доказать, что следующие формулы общезначимы:

1. $P(x) \to \exists x P(x)$;
2. $\forall x P(x) \to P(y)$;
3. $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$;
4. $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg[\exists x \neg(P(x))]$;
5. $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$;
6. $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$;
7. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$.

4.26. Приведите пример формулы, тождественно истинной на любом множестве из одного элемента, но общезначимой.

V. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

5.1. Аксиоматические теории

Данный раздел представляет собой материал для самостоятельного изучения и организации работы в научно-исследовательском формате. Каждый из пунктов IV.4. может быть отправной точкой в строгом аксиоматическом построении теории групп, теории частичного упорядочения, теории равенства отрезков, аксиоматическая теория натуральных чисел и теории доказательства. Для будущего учителя математики наиболее важными являются последние две темы, так как именно они являются связующим логическим звеном между «чистой» математикой и логическими, теоретическими основами школьного курса математики.

Алгебре высказываний и исчислении высказываний имеют эффективный способ решения вопроса о том, является ли данная формула тавтологией.

Иная ситуация возникает при переходе к логике предикатов. Здесь нет эффективного способа, позволяющего для каждой формулы решить вопрос о том, является ли она общезначимой. В связи с этим в математических теориях, которые используют понятие предиката и связанные с ним понятия кванторных операций, необходимым становится аксиоматический метод.

Есть и другие аргументы в пользу аксиоматического метода, и они состоят в следующем: аксиоматический метод базируется на простых отношениях между символами и выражениями точных формальных языков и использует достаточно простые арифметические методы (алгоритмизация). Этот факт обосновывает надежность аксиоматического метода.

Рассмотрим сущность аксиоматического метода и те проблемы, которые возникают при его использовании.

Под аксиоматической теорией понимают систему из двух множеств высказываний T и W ($T \subset W$). Выбирается некоторое множество T высказываний данной теории, которое объявляется аксиомами. Всякое высказывание множества W относится к множеству T и называется теоремой, если для него существует доказательство в смысле определения пункта 3.4. Аксиоматические теории делятся на формальные и неформальные.

Неформальные аксиоматические теории наполнены теоретико-множественным содержанием, понятие выводимости в них довольно расплывчато и в значительной степени опирается на здравый смысл.

Формальная аксиоматическая теория считается определенной, если выполнены следующие условия:

1) задан язык теории;

2) определено понятие формулы в этой теории;

3) выделено некоторое множество формул, называемых аксиомами;

4) определены правила вывода в этой теории.

Среди математических теорий выделяют теории первого порядка. Они отличаются от теорий высших порядков тем, что не допускают в своем изложении предикаты, которые имеют в качестве возможных значений своих аргументов другие предикаты и функции. Кроме того, они не допускают кванторные операции по предикатам или функциям.

Мы ограничимся только математическими теориями первого порядка, которые называют иногда элементарными теориями.

5.2. Язык первого порядка

Определение. Алфавитом А называется всякое непустое конечное множество символов. Символы алфавита называются буквами.

Определение. Словом в алфавите А называется всякая конечная последовательность букв алфавита А. Пустая последовательность букв называется пустым словом и обозначается через Λ .

Будем говорить, что два конкретных слова $a_1, a_2, ..., a_n,$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ алфавита А равны и писать $a_1, a_2, ..., a_n, \ = b_1, b_2, ..., b_n,$ если п = k и $a_i = b_i$, i =1, 2,…,n. При этом число п называют длиной этого слова.

Если Т- некоторая теория, то обозначим через А(Т) алфавит этой теории, через Е(Т) слова алфавита А(Т) .

Пара <A(T), E(T)> теории Т называется языком теории Т.

Языки первого порядка обслуживают теории первого порядка. В алфавит всякой теории Т первого порядка входят по существу те же символы, которые были введены ранее. Это символы логических операций: $\wedge, \vee, \rightarrow$, $\neg$; символы кванторных операций $\forall$, $\exists$; вспомогательные символы - скобки, запятые; счетное множество n-местных предикатных букв $(A)_i^n$ (n, i≥l), где верхний индекс указывает на число мест, а нижний - номер предикатной буквы; конечное (возможно, и пустое) или счетное; множество функциональных букв $(f)_i^n$ (n, i≥l), где верхний индекс указывает на число переменных, входящих в функцию, а нижний - номер функциональной буквы; конечное (возможно пустое) или счетное множество предметных констант a_t (t > l).

В частности, под функциональной буквой может пониматься цепочка логических операций.

Множество предикатных букв вместе с множеством функциональных букв и констант называется сигнатурой языка данной теории и является его специфической частью.

Таким образом, в теории Т первого порядка могут отсутствовать некоторые или даже все функциональные буквы и предметные константы, а также некоторые, но не все предикатные буквы.

Различные теории первого порядка могут отличаться друг от друга по составу букв в алфавите.

5.3. Термы и формулы

Дальнейшее описание теории Т требует прежде всего индуктивных определений терма и формулы. Термы и формулы - это два класса слов множества E(T).

Определение (терма)1. Предметная переменная и предметная константа суть термы.

2. Если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ - термы и A - символ n-местной операции, то $(A)_i^n$ $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ - терм.

3. Никаких других термов, кроме 1 и 2 , в теории T нет.

Согласно естественной интерпретации, терм - это имя некоторого предмета. Кроме переменных и предметных констант термами являются цепочки, образованные из переменных и предметных констант посредством символов операций, т. к. в подразумеваемой интерпретации он истолковывается как значение некоторой функции.

Определение (формулы) 1. Если A - символ n-местного отношения (предикат или функция), а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ - термы, то A $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ - формула. В частности, если A - предикатная буква $(A)_i^n$, то $(A)_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ называется элементарной формулой.

2. Если A и B формулы, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $\neg A$ -формулы.

3. Если A - формула, а y - предметная переменная, которая входит в A свободно или не содержится в A, то выражения $\forall A$, $\exists A$ – формулы. При этом A называется областью действия квантора.

4. Никаких других формул, кроме определенных в п. 1 - 3 , нет.

5.4. Логические и специальные аксиомы. Правила вывода

Аксиомы теории первого порядка T разбиваются на два класса: логические аксиомы и специальные (нелогические или собственные аксиомы).

Логические аксиомы. Каковы бы ни были формулы A, B и C теории T, следующие формулы являются логическими аксиомами теории T :

1. $A \to (B \to A)$;

2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

3. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$;

4. $\forall x_i A(x_i) \to A(t)$ есть формула теории T и t есть терм теории T, свободный в $A(x_i)$. В частности, если t совпадет с x_i, то мы приходим к аксиоме $\forall x_i A(x_i) \to A(x_i)$;

5) $\forall x_i (A \to B) \to (A \to \forall x_i B)$, если x_i. не входит свободно в формулу A.

Замечание. Ранее в главе II мы построили классическое исчисление высказываний, содержащее 11 аксиом. Однако может быть построено исчисление высказываний с меньшим числом аксиом, например, аксиомами 1) - 3).

Специальные аксиомы. Они не могут быть сформулированы в общем случае, так как меняются от теории к теории.

Теория первого порядка, не содержащая собственных аксиом, очевидно, представляет собой чисто логическую теорию. Она носит название исчисления предикатов первого порядка.

Во многих теориях, которые могут быть аксиоматизированы как теории первого порядка, используется понятие равенства. Оно вводится путем добавления двухместного предиката « $x = y$ » и в связи с этим добавляются две специальные аксиомы: 1) $\forall x\ (x = x)$; 2) Если x, y, z, - различные предметные переменные и $F(Z)$ - формула, то

$\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow F(x) = F(y))$.

Правила вывода. Как и в исчислении высказываний, будем пользоваться понятиями вывода из совокупности формул (высказываний) H. Высказывания, входящие в H, будем называть посылками. Если последним высказыванием в выводе из H стоит высказывание A, то будем говорить, что A выводимо из H и записывать: $H \vdash A$. В частном случае, если $H = \varnothing$ то пишут $\vdash A$.

В число правил вывода теории первого порядка включаются два правила:

1. Правило заключения (или modus ponens):

$$\frac{\vdash A,\ \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$$

2. Правило связывания квантором всеобщности (или правило обобщения):

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x_i A}$$

5.5. Примеры математических теорий

Примером математической теории может служить теория групп.

1. Теория групп.

Эта теория допускает различные формулировки. Данная теория содержит одну предикатную букву , соответствующую в алгебре бинарному отношению: $x1 = x2$; одну функциональную букву , соответствующую в алгебре бинарной алгебраической операции: $x1 + x2$; одну предметную константу $a1 = 0$.

Следующие формулы являются специальными аксиомами теории групп:

1) $\forall x_1, x_2, x_3\ (x_1 + (x_2 + x_3)) =((x_1 + x_2) + x_3)$, ассоциативность;

2) $\forall\ x_1\ (0 + x_1 = x_1)$, свойство нуля;

3) $\forall\ x_1 \exists x_2 (x_1 + x_2 = 0)$, существование противоположного элемента;

4) $\forall\ x_1\ (x_1 = x_1)$, рефлексивность равенства;

5) $\forall\ x_1, x_2\ ((x_1 = x_2) \rightarrow (x_2 = x_1))$, симметричность равенства;

6) $\forall\ x_1, x_2, x_3\ ((x_1 = x_2) \rightarrow ((x_2 = x_3) \rightarrow (x_1 = x_3)))$, транзитивность равенства;

7) $\forall\ x_1, x_2, x_3\ ((x_2 = x_3) \rightarrow (x_1 + x_2 = x_1 + x_3) \wedge (x_2 + x_1 = x_3 + x_1)$, подстановочность равенства.

2. Теория частичного упорядочения.

Пусть теория T содержит одну предикатную букву , соответствующую в этой теории бинарному отношению: $x1 < x2$ и не содержит функциональных букв и предметных констант.

Пусть T содержит две специальные аксиомы:

а) $\forall x_1\ \neg(x_1 < x_2)$ - иррефлективность;

б) $\forall x_1, x_2, x_3\ ((x_1 < x_2) \rightarrow ((x_2 < x_3) \rightarrow (x_1 < x_3)))$, транзитивность.

Всякая модель этой теории называется частично упорядоченной структурой.

3. Теория равенства отрезков

Первичные термины: множество S - множество всех отрезков, и «=» - отношение равенства, так что выражение «x = y » читается так: «отрезок x равен отрезку y».

Специальные аксиомы:

а) $\forall x \in S\ (x = x)$;

б) $\forall x, y, z \in S\ (x = z) \wedge (y = z) \to (x = y)$.

4. Аксиоматическая теория натуральных чисел

Эта теория построена итальянским математиком Дж.Пеано. Более подробно, с вытекающими из данной системы аксиом теоремами, вопрос будет рассмотрен в курсе «Числовые системы».

Первоначальные понятия: непустое множество N, отношение следования « ' » и выделенный элемент 1. Специальные аксиомы:

1) $\forall x \in N\ (\neg x \neq 1)$;

2) $\forall x, y \in N\ (x = y \to \neg x = \neg y)$;

3) $\forall x, y \in N\ (\neg x = y \to x = y)$;

4) Пусть $M \subset N$. Тогда $(1 \in M) \wedge (\forall x \in M \to \neg\, x \in M) \to M = N$.

5.6. Доказательство в теории

Доказательство в широком смысле этого слова есть способ обоснования истинности некоторого суждения. Степень убедительности доказательства решающим образом зависит от средств, используемых для обоснования истинности.

Так, в точных науках выработаны определенные требования к эксперименту, при которых факт, полученный в результате эксперимента, может считаться доказанным. В математике, для которой характерен аксиоматический метод, взгляд на доказательство определяется взглядом на аксиоматическую теорию. Слово «теория» понимается здесь в определенном специальном смысле. Термин «теория» применяют по отношению к двум множествам высказываний, одно из которых есть собственное подмножество другого. Большое (объемлющее) множество высказываний определяет предметную область теории, элементы же меньшего (охватывающего) множества высказываний - это высказывания теории, которые считаются в ней истинными или доказуемыми (или теоремами). Они определяются как высказывания, выводимые чисто логическим путем из некоторых заранее выбранных и фиксированных высказываний, называемых аксиомами.

В аксиоматической теории понятию истинности нет места - понятие истинного высказывания имеет смысл лишь в связи с возможными приложениями теории.

Определение 1 (доказательства). Доказательством называют конечную последовательность e_{lt} s_2, ..., s_k высказываний рассматриваемой теории, каждое из которых либо является аксиомой, либо выводится из одного или более предыдущих высказываний этой последовательности по логическим правилам вывода.

Определение 2 (теоремы). Теоремой или доказуемым высказыванием называется высказывание, являющееся последним высказыванием некоторого доказательства

Ясно, что любая аксиома является теоремой, причем ее доказательство состоит из одного шага.

Вывод высказывания С из пустого множества посылок есть, очевидно, доказательство высказывания С.

Особое внимание уделим теореме дедукции.

Теорема дедукции.

$$\frac{H, A \vdash B}{H \vdash A \to B}$$

В произвольной теории первого порядка эта теорема без соответствующей корректировки не справедлива. Например, в любой теории первого порядка всегда $A \vdash \forall x A$, но не всегда доказуема формула $A \to \forall x A$. Достаточно взять исчисление предикатов и формулу $A_1^1(x)$. Проинтерпретируем A_1^1 как свойство которым обладает только элемент *a*. В этом случае $A_1^1(x)$ выполнима на множестве М, содержащем элемент *a*, но формула $\forall x A(x)$ не выполнима на множестве М.

Тем не менее теорема дедукции в ослабленном варианте имеет место. Приведем ниже этот вариант теоремы без доказательства.

Напомним, что выводом формулы А из совокупности гипотез $H=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, называется всякая конечная последовательность $B_1, B_2, \ldots, B_k$, обладающая свойствами :

1) B_k есть А;

2) $\forall i$ B_i является либо гипотезой, либо доказуемой формулой, либо получена из предыдущих по правилу заключения.

Пусть дана совокупность формул Н, А и некоторый вывод из этой совокупности $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Говорят, что формула B_k зависит от формулы А в этом выводе, если:

1) формула B_k есть А, и она включена в вывод как формула, содержащаяся в совокупности Н, А;

2) формула B_k получена по правилам заключения и связывания квантором из формул, предшествующих ей в выводе, из которых по крайней мере одна зависит от А.

Например каждая формула вывода $A, \forall xA, \forall xA \to C, C, \forall xC$ из совокупности $\{\forall xA \to C, A\}$ зависит от А.

Лемма. Если в выводе $B_1, B_2, \ldots, B_k = B$ из совокупности Н, А формула В не зависит от А, то $H \vdash B$.

Доказательство леммы проведем методом математической индукции.

При $n = 1$ утверждение справедливо. Действительно, если В есть вывод из Н, А и не зависит от А, то либо В е. Н , либо В - доказуемая формула, и в обоих случаях $H \vdash B$.

Предположим, что утверждение справедливо для любого вывода длины $k < n$ и докажем его для вывода длины n. Если при этом $B \in H$ или В - доказуемая формула, то $H \vdash B$. Если же В получена из каких-то (одной или двух) формул, предшествующих ей в выводе, то она не зависит от формулы А, так как по индуктивному предположению не зависят от А все формулы, предшествующие ей в выводе. Следовательно, $H \vdash B$.

Теорема дедукции. Пусть $H, A \vdash B$, и при этом пусть существует такой вывод В из Н, А, в котором ни при каком применении правила связывания квантором к формулам, зависящим в этом выводе от А, не связывается квантором никакая свободная переменная, входящая в А.

Тогда Н $\vdash$А→ В.

Теорему примем без доказательства.

Итак, в рамках любой математической теории может быть использована теорема дедукции.

5.7. Интерпретация и модель математической теории

Под интерпретацией языка теории Т понимают всякую систему, включающую в себя:

1. Непустое множество М, называемое областью интерпретации.

Какое-либо соответствие, которое каждому элементу языка теории Т ставит в соответствие единственный элемент множества М, то есть функцию f с областью определения <A(T),E(T)> и множеством значений, содержащимся в М. При этом всякой предикатной букве ставится в соответствие некоторое n-местное отношение в М; каждой функциональной букве ставится в соответствие некоторое k-местная операция в М, т.е. функция $M^k \to M$; каждой предметной постоянной – некоторый элемент из М.

Например, аддитивная группа целых чисел является интерпретацией аксиоматической теории групп.

Итак, если наряду с данной аксиоматической теорией мы имеем другую теорию, аксиоматическую или даже интуитивную, основанную на той же системе логики, то такую систему объектов второй теории называют интерпретацией данной теории.

Если в интерпретации I данной теории аксиомам теории соответствуют теоремы, то интерпретацию называют моделью данной теории.

5.8. Проблемы математической теории

При изучении исчисления высказываний мы уже встречались с этими требованиями: полнота, непротиворечивость, разрешимость. Сформулируем, в силу их важности, эти понятия для произвольной математической теории.

Определение. Теория T называется противоречивой (или несовместной), если она содержит такое высказывание S, что и S и его отрицание ¬S являются теоремами. В противном случае теория T называется непротиворечивой. Таким образом, теория T называется непротиворечивой, если в ней нет такого высказывания S, что и S, и ¬S являются теоремами.

Если теория непротиворечива, имеет смысл говорить о полноте теории.

Определение. Теория T называется (абсолютно) полной, если для любого высказывания S этой теории или S или ¬S есть теорема.

Определение. Аксиоматическая теория называется полной в узком смысле, если добавление к ее аксиомам любого недоказуемого в ней утверждения с сохранением в ней всех правил вывода приводит к противоречивой теории. Всякая абсолютно полная теория будет полна и в узком смысле.

Проблема разрешимости является алгоритмической проблемой, в которой для заданного множества A требуется построить алгоритм, разрешающий A относительно другого множества B, включающего A($A \subset B$), т.е. такой алгоритм U, который применим ко всякому элементу из B, причем $U(x) = 1$, если $x \in A$ и $U(x) = 0$, если $x \in B \setminus A$.

Введем еще одно определение, полагая понятие изоморфизма алгебраических структур уже знакомым.

Определение. Математическая теория T называется категоричной, если все ее модели изоморфны.

Вопрос: категорична ли аксиоматическая теория групп.

5.9. Теорема Гёделя о неполноте

Под теоремой Гёделя о неполноте понимается обычно общее название двух теорем Гёделя.

Первая теорема Гёделя (о неполноте). В любой непротиворечивой формальной системе, содержащей минимум арифметики, а, следовательно, и в теории натуральных чисел, найдется формально неразрешимое суждение, т.е. такая замкнутая формула А, что ни А, ни □А не являются выводимыми в системе.

Вторая теорема Гёделя (о неполноте) утверждает, что при выполнении естественных дополнительных условий в качестве А можно взять утверждение о непротиворечивости рассматриваемой системы.

Первая теорема Гёделя означает, что какая бы система аксиом для арифметики ни была выбрана, всегда найдется такое высказывание о натуральных числах, выраженное на языке этой формальной теории, которое в данной теории не может быть ни доказано, ни опровергнуто.

Примерные варианты контрольно-измерительных по математической логике

Самостоятельная работа

Задание 1.

1. На вопрос «Кто из трех студентов изучал математическую логику» получен верный ответ – «Если изучал первый, то изучал и третий, но не верно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал математическую логику?

2. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

1) Если первый сдал, то и второй сдал.

2) Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.

3). Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.

4) Если четвертый сдал, то первый сдал.

3. Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то Коля либо ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду. Если Коля сказал правду, то он либо ходил в кино, либо Петя солгал. Выяснить, ходил ли Коля в кино.

4. На вопрос «Кто из студентов готовился к экзамену?» получен верный ответ – «Если готовился Монгуш, то готовился и Салчак, но не верно, что если готовился Хертек, то готовился и Салчак». Кто готовился к экзамену?

Задание 2.

Укажите номера функций, представленных в: а) СДНФ; б) СКНФ; в) в ДНФ; г) КНФ.

2.1.

1. $f(A,B,C) = \neg A \vee B \vee C$;

2. $f(A,B,C) = A \wedge B \wedge C$;

3. $f(A,B,C) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$;

4. $f(A,B,C) = AB \vee AC \vee BC$;

5. $f(A,B,C) = (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$;

6. $f(A,B,C,D) = (A \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg B \vee C \vee D)$;

7. f(A,B,C) = (¬ABC)∨(A¬BC)∨(AB¬C)∨(¬A¬C¬B);

2.2.

1. f(A,B,C) =(A∨B∨C)(¬A∨B∨¬C)(A∨¬B∨C);
2. f(A,B,C,D) =(¬A∨B∨¬C∨D)(¬B∨C∨D)(A∨¬C∨D);
3. f(A,B,C) =(¬ABC)∨(A¬BC)∨(AB¬C)∨(¬A¬B¬C);
4. f(A,B,C) =(ABC)∨(AB¬C)∨(¬A¬BC);
5. f(A,B,C) =(¬A∨B∨C)(A∨B∨¬C)(A∨¬B∨C);
6. f(A,B,C) =(A¬BC)∨(A¬BC);
7. f(A,B,C) =(AB)∨(CD)∨(AD).

2.3.

1. f(A,B,C) = $A\overline{B}+\overline{A}\overline{B}$
2. f(A,B,C) = $AB + AC + BC$
3. f(A,B,C) = $(A+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)$
4. f(A,B,C,D) = $(\overline{A}+B+\overline{C}+D)(\overline{B}+C+D)(A+\overline{C}+D)$
5. f(A,B,C) = $\overline{A}BC+\overline{\hat{A}}\acute{N}D+\overline{A}\acute{N}D+\overline{A}\hat{A}D$
6. f(A,B,C) = $\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\acute{N}$
7. f(A,B,C,D) = $(A+\overline{B}+C)(A+B+C)(A+\overline{B+C})$

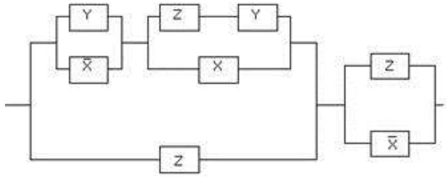
2.4.

1. f(A,B,C,D) = $\overline{A}BC+\overline{\hat{A}}\acute{N}D+\overline{A}\acute{N}D+\overline{A}\hat{A}D$
2. f(A,B,D) = $ABD+AB\overline{D}+\overline{A}\overline{B}D$
3. f(A,B,C,D) = $(\overline{A}+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)$
4. f(A,B,C,D) = $\overline{D}+ABC$
5. f(A,B,C,D) = $AB + CD + AD$
6. f(A,B,C,D) = $ABCD$
7. f(A,B,C,D) = $A + B + C + D$

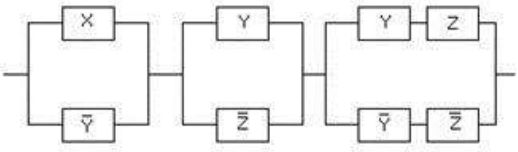
Задание 3.

Составить формулу для РКС. Упростить формулу. Построить таблицу истинности для полученной формулы.

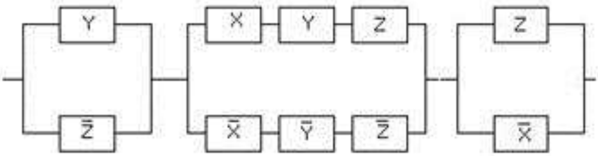
1.



2.

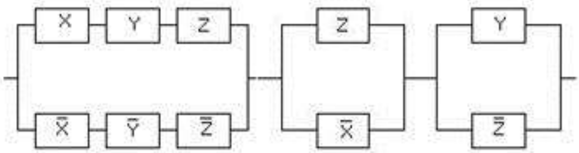


3.



4.

4.

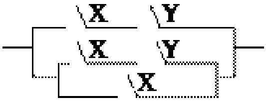


Вопросы для самоконтроля

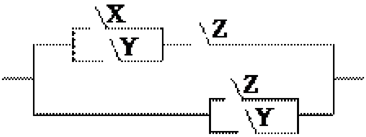
1. Что понимается под высказыванием? Привести примеры.
2. Являются ли высказываниями следующие предложения:
   а) два плюс два равно пяти;
   б) функция y = sinx – периодическая;
   в) существует рациональное число такое, что $x > 7$.
3. Определить операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции, импликации, эквиваленции и задать их с помощью таблиц истинности.
4. Найти истинностные значения следующих высказываний:
   а) $(3<5) \to (6 \geq 5)$
   б) $(2=3) \to (2 \cdot 2 = 4)$;
   в) $(5 < 3) \wedge (3 \leq 2) \to (3 < 5)$.
5. Что понимается под формулой алгебры высказываний?
6. Найти значения формул при заданных значениях высказывательных переменных:
   а) $\overline{F} \to \overline{G} \vee (H \to F$ для F = 0, G=1, H=1.
   б) $\overline{(\overline{P} \vee \overline{Q})} \to P$, P = 0, Q = 1.
7. Построить таблицу истинности формулы $F \vee G \to (\overline{F} \to G)$.
8. Что называется тождественно истинной (ложной) формулой? Проверить, является ли каждая из формул тождественно истинной:
$\neg(F \to G) \vee (G \to F)$.
9. Какие формулы называются равносильными? Как доказать равносильность формул? Проверить равносильность
$F \wedge (G \vee H) \equiv (G \wedge H) \vee (F \wedge H)$.
10. Записать первые десять основных равносильностей алгебры высказываний. Доказать законы поглощения и законы де Моргана.
11. Упростить формулу $\overline{(P \to Q \wedge P)} \to (P \to R))$.
12. Преобразовать формулу $\overline{\overline{F \vee G} \to (H \to F)}$ в равносильную ей формулу так, чтобы в ней не было операции импликации, а отрицание относилось только к высказывательным переменным.

13. Перевести предложение на логический язык и построить его отрицание: «Если вечером я буду не занята, то пойду в кино или на дискотеку».

14. Упростить релейно-контактную схему:



15. Ввести понятие функции проводимости для релейно-контактной схемы. Найти функцию проводимости и условия работы для схемы:



16. Один из братьев Витя, Толя, Коля разбил окно. В разговоре участвуют еще двое братьев – Андрей и Дима.

– Это мог сделать только Витя или Толя – сказал Андрей.

– Я окно не разбивал, – возразил Витя, – Коля тоже.

– Вы оба говорите неправду, – заявил Толя.

– Нет, Толя, один из них сказал правду, а другой неправду, – возразил Дима.

–Ты, Дима, неправ, – вмешался Коля.

Контрольная работа

Вариант 1

1. Определение формулы. Из данной последовательности символов составьте всевозможные формулы: $\neg$ x$\to$ y $\leftrightarrow$ $\neg$x $\wedge$ y. Сколько их?

2. Сформулируйте предложение, которое согласно законам де Моргана, выражает то же, что и предложение:

«Неревно, что треугольник *ABC* прямоугольный и равнобедренный»

3. Упростите формулу логики высказываний

1. $\neg ((x\to y) \leftrightarrow \neg(x \wedge \neg y))$;
2. $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \vee ((x \to y) \wedge x)$.

4. Составьте формулы, которые являются

1. тождественно истинными с переменными ***x, y, z***;
2. тождественно ложными с переменными ***x, y, z***.

5. Найдите СДНФ и СКНФ формулы ЛВ двумя способами: $x \wedge y \to x \vee y \vee \neg z$

6. Найдите СДНФ формулы f(x,y,z), если она есть 1 только в следующих случаях: f(1,1,1) = f(1,1,0) = f(1,0,1) = f(1,0,0). Постройте релейно контактную схему, соответствующую данной ситуации.

7. Четыре друга – Антонов (А), Вехов (В), Сомов (С), Деев (Д) – решили провести свой отпуск в четырех разных городах : Москва, Липецк, Киев, Ташкент. В какой город должен ехать каждый из них, если имеются ограничения:

P) если А не едет в Москву, то С не едет в Липецк;

Q) если В не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то А едет в Москву;

R) если С не едет в Ташкент, то В едет в Киев;

S) если Д не едет в Москву, то В едет в Москву;

T) если Д не едет в Липецк, то В не едет в Москву?

Вариант 2

1. Определение формулы. Из данной последовательности символов составьте всевозможные формулы: $x \to \neg\ y \to \neg x \wedge y$. Сколько их?

2. Сформулируйте предложение, которое согласно законам де Моргана, выражает то же, что и предложение:«Неревно, что число 9 нечетное или простое»

3. Упростите формулу логики высказываний

   1. $(x \to y)(z \to t)(x \vee z) \to (y \vee t)$;
   2. $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$.

4. Составьте формулы, которые являются

   1. тождественно истинными с переменными x, y, z;
   2. тождественно ложными с переменными x, y, z.

5. Найдите СДНФ и СКНФ формулы ЛВ двумя способами : $(x \to z) \to x \wedge \neg\ y$

6. Найдите СДНФ формулы f(x,y,z), если она есть 1 только в следующих случаях: f(0,1,1) = f(1,1,0) = f(1,0,1) = f(1,0,0). Постройте релейно контактную схему, соответствующую данной ситуации.

7. Четыре друга – Антонов (А), Вехов (В), Сомов (С), Деев (Д) – решили провести свой отпуск в четырех разных городах : Москва, Липецк, Киев, Ташкент. В какой город должен ехать каждый из них, если имеются ограничения:

P) если А не едет в Москву, то С не едет в Липецк;

Q) если В не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то А едет в Москву;

R) если С не едет в Ташкент, то В едет в Киев;

S) если Д не едет в Москву, то В едет в Москву;

T) если Д не едет в Липецк, то В не едет в Москву.

Самостоятельная работа

ЛЕММА (о выводимости): Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – полный список переменных, входящих в формулу А; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – произвольный фиксированный набор значений этих переменных.Обозначим Н = { $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$ }, где $x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, если..\alpha_i = 1 \\ \overline{x_i}, если..\alpha_i = 0 \end{cases}$

Если β есть значение формулы А на наборе α1 , α2 , … , αn (обозначение: $|A|_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} = \beta$), то Н ├ А β

1. Доказать лемму в части:

1.$A = B_1 \vee B_2$; 2. $A = B_1 \to B_2$; 3. $A = \neg B_1$; 4.$A = B_1 \wedge B_2$;

2. Доказать независимость аксиом 3, 4, 6, 7 в исчислении высказываний

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. Упростите формулу логики высказываний

$\neg ((x \to y) \leftrightarrow \neg(x \wedge \neg y))$.

2. Найдите СДНФ и СКНФ формулы ЛВ

$x \wedge y \to x \vee y \vee z$.

3. Дайте определение доказательства формуды А , постройте следующие выводы:

$z \to x, z \to y, z \to xy$; $\vdash$

$x(y \to z) \to (y \to xz)$;

$\neg(x \to y) \to x\neg y$;

4. Найдите ПНФ формулы

$P(y) \to \neg(\forall x Q(x,y) \to P(y))$.

5. Запишите на языке логики предикатов определение убывающей на множестве М функции. Постройте его отрицание.

6. Выполнима ли формула логики предикатов: $\exists x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y))$? Дайте определение общезначимой формулы.

Вариант 2

1. Упростите формулу логики высказываний

$(x \to y)(z \to t)(x \vee z) \to (y \vee t)$

2. Найдите СДНФ и СКНФ формулы ЛВ

$(x \leftrightarrow z) \to x \wedge \neg y$

3. Дайте определение вывода формуды А из гипотез Н, постройте следующие выводы:

$y \to (x \vee y) \vee z$;

$(x \vee yz) \to (x \vee y)(x \vee z)$;

$(x \to y) \to ((x \vee z) \to (y \vee z))$.

4. Найдите пнф формулы

$\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x \forall y Q(x,y)$

5. Запишите на языке логики предикатов определение возрастающей на множестве М функции. Постройте его отрицание.

6. Выполнима ли формула логики предикатов: $(P(x) \to \forall y P(y))$?

Дайте определение общезначимой формулы.

Тесты по математической логике

Вариант 1

1. Найдите логические значения x и y, при которых имеет место: $(1 \to x) \to y = 0$.

2. Упростить формулу ЛВ: $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \vee ((x \to y) \wedge x)$

3. Найдите СДНФ формулы f(x,y,z), если она есть 1 только в следующих случаях: f(1,1,1) = f(1,1,0) = f(1,0,1) = f(1,0,0).

4. Постройте РКС, реализующую булеву операцию $x \to y$.

5. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математическую логику?"» получен верный ответ –"«Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал математическую логику?"

6. Сколько формул можно составить из последовательности символов:

$$\neg x \to \neg y \wedge z.$$

7. Что надо записать под чертой, чтобы получить верное правило вывода:

$$\frac{H\neg A \to B;..H\neg \overline{A} \to B}{H\neg.....}$$

8. Отрицание формулы $\forall x(A(x) \to \forall y B(y))$ есть формула…

9. П.н.ф. формулы $\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \overline{Q(x, y)}$ есть формула…

10. Запишите на языке логики предикатов определение периодической функции.

Вариант 2

1. Найдите логические значения **x** и **y**, при которых имеет место: $x \vee y = \overline{x}$.

2. Упростить формулу ЛВ: $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$

3. Найдите СКНФ формулы f(x,y,z), если она есть 1 только в следующих случаях: f(1,1,1) = f(1,1,0) = f(1,0,1) = f(1,0,0).

4. Постройте РКС, реализующую булеву операцию $x \leftrightarrow y$.

5. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математическую логику?"» получен верный ответ –"«Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал математическую логику?"

6. Сколько формул можно составить из последовательности символов:

$$\neg x \to y \wedge \neg z\,.$$

7. Что надо записать под чертой, чтобы получить верное правило вывода:

$$\frac{H\neg A \to B; H\neg B \to \neg A}{H\neg...}$$

8. Отрицание формулы $\forall x(A(x) \to \forall y B(y))$ есть формула …

9. П.н.ф. формулы $\forall x \exists y (P(x, y) \to L(x, y))$ есть формула…

10. Запишите на языке логики предикатов определение возрастающей функции на множестве М.

Примерные вопросы к экзамену
по дисциплине: «Математическая логика»

1. пределение формулы. Подформула. Равносильные формулы.
2. Алгебра Буля.
3. Преобразование произвольной функции алгебры логики в виде формулы алгебры логики.
4. Закон двойственности. Теорема
5. ДНФ, СДНФ.
6. КНФ, СКНФ.
7. Проблема разрешимости в логике высказываний.
8. Анализ и синтез релейно контактных схем.
9. Аксиоматическое построение исчисление высказываний.
10. Доказательство формул в ИВ.
11. Вывод формул из гипотез в ИВ.
12. Правило выводимости: введение посылки, силлогизма.
13. Правило введения конъюкции и дизъюнкции.
14 Правило контрапозиции, снятия двойного отрицания.
15. Теорема дедукции.
16. Правило перестановки посылок, соединение посылок.
17. Непротиворечивость ИВ.
18. Лемма выводимости.
19. Полнота ИВ в широком смысле слова.
20. Полнота ИВ в узком смысле слова.
21. Проблема разрешимости в ИВ.
22. Проблема независимости аксиом в ИВ.
23. Понятия предиката и операции над ними.
24. Формула логики предикатов.
25. Равносильные формулы логики предикатов.
26. Пренексная нормальная форма логики предикатов.
27. Общезначимость и выполнимость.
28. Проблема разрешимости логики предикатов.

В формат экзамена входит:

I. **Предварительно**:

1. Наличие домашних заданий

2. Выполнение проверочных работ не менее, чем на 60%

3. Защита лабораторных работ

II. **На экзамене**

4. Тест-допуск

5. Ответ на вопросы билета

Оценка на экзамене формируется по всем пунктам 1-5

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов, Ю.Л. Математическая логика. 6-е изд., испр / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. – М.: Физматлит, 2011. – 356 с.

2. Колмогоров, А.Н. Математическая логика: Введение в математическую логику: Учебное пособие. Изд. Стер / А.Н. Колмогоров, А.Г. Драгалин. – М.: Ленанд, 2016. – 240 с.

3. Игошин, В.И. Математическая логика: Учебное пособие / В.И. Игошин. – М.: ИНФРА-М, 2013. – 399 с.

4. Идиатулин, В.С. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения: Учебное пособие. 4-е изд. / В.С. Идиатулин. – СПб.: Лань П, 2016. – 288 с.

5. Лихтарников, Л.М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения: Учебное пособие. 4-е изд. / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. – СПб.: Лань, 2009. – 288 с.

Дополнительная литература

1. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Физматлит, 2004. – 224 с.

2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 2012.–320 с.

3. Клини С. К. Математическая логика. – М.: Мир, 1973. – 480 с.

4. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. – М.: ИЛ, 1947.–306 с.

5. Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1987. – 128 с.

6. Новиков П. С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. – 399 с.

7. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 224 с.

Учебное издание

Троякова Галина Александровна
Монгуш Айлана Севеновна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Задачник-практикум для студентов
физико-математического факультета

Дизайн обложки *К.К. Сарыглар*

Сдано в набор: 27.06.2018
Подписано в печать: 01.08.2018
Формат бумаги 60×84 $^{1}/_{16}$ Бумага офсетная.
Физ. печ.л. 6,3. Усл. печ.л. 5,9.
Заказ № 1423. Тираж 50 экз.

667000, г. Кызыл, Ленина, 36
Тувинский государственный университет
Издательство ТувГУ