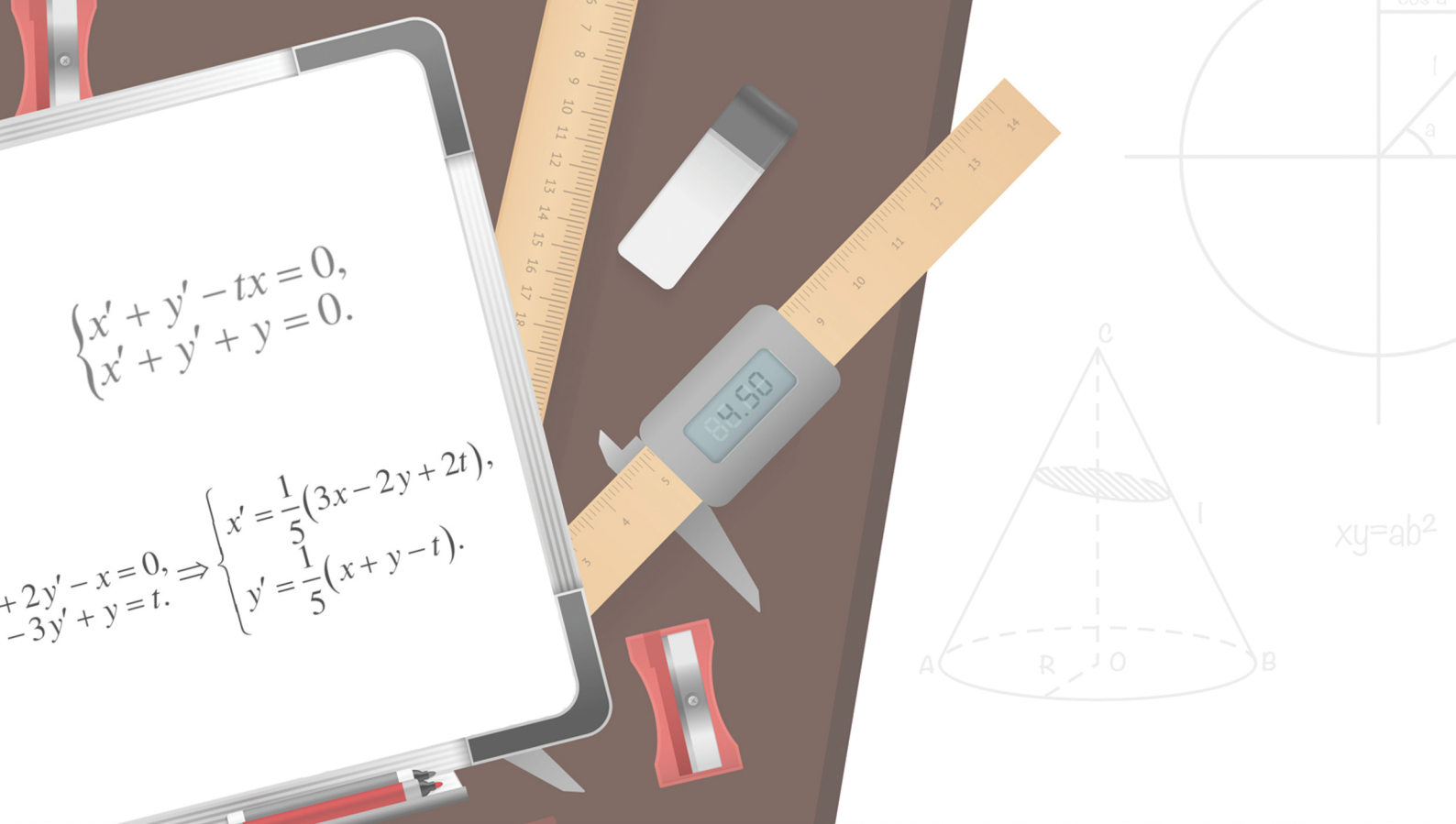




$$\begin{cases} x' + y' - tx = 0, \\ x' + y' + y = 0. \end{cases}$$

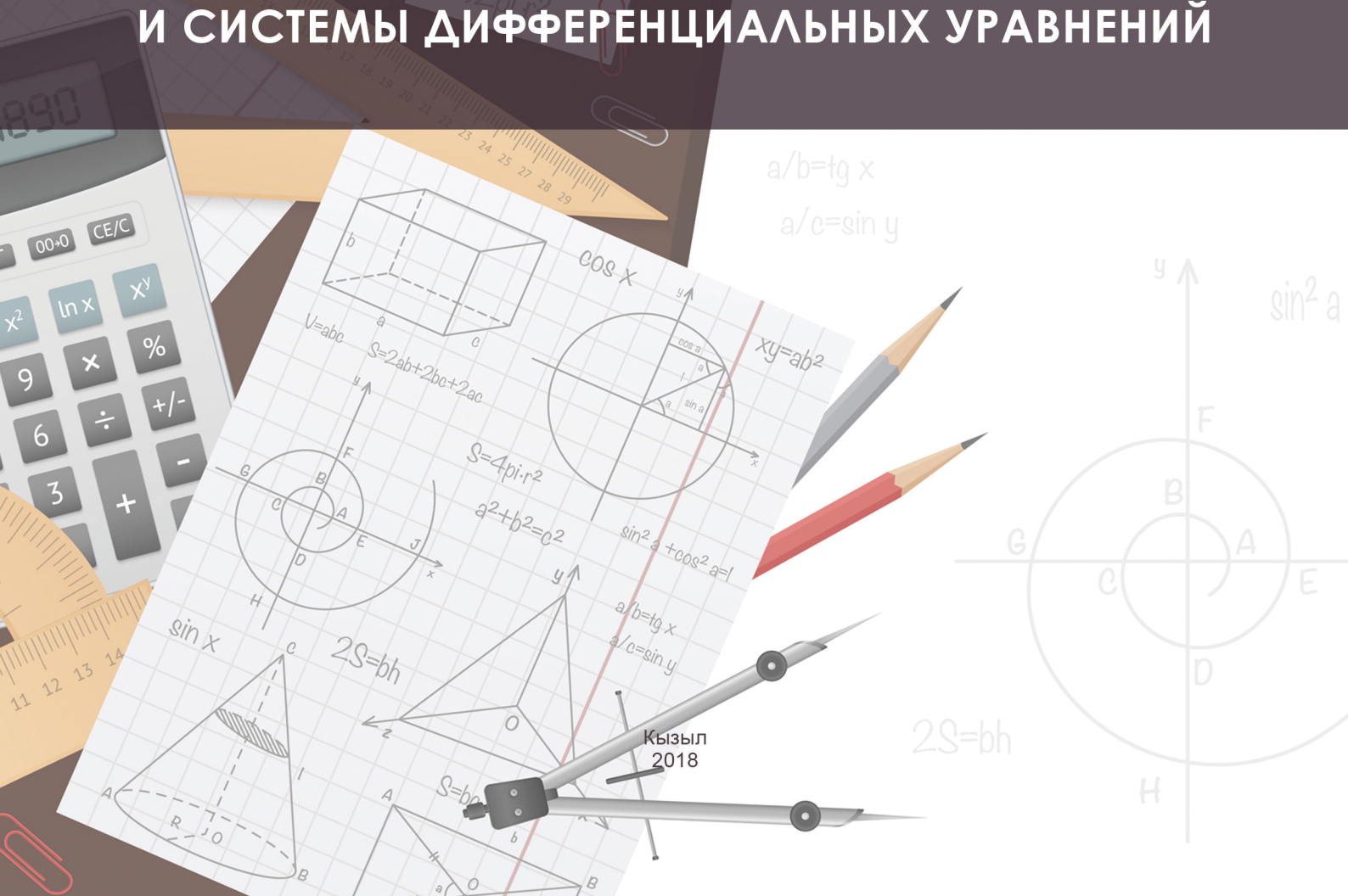
$$\begin{cases} +2y' - x = 0, \\ -3y' + y = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 2y + 2t), \\ y' = \frac{1}{5}(x + y - t). \end{cases}$$



$$xy = ab^2$$

Е.В. Крум, Е.К. Бичи-оол

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ



$$a/b = \tan x$$

$$a/c = \sin y$$

$$\cos x$$

$$xy = ab^2$$

$$S = 4\pi r^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$a/b = \tan x$$

$$a/c = \sin y$$

$$2S = bh$$

Кызыл
2018

$$2S = bh$$

ТУВИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.В. Крум, Е.К. Бичи-оол

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Учебно-методическое пособие

**Кызыл
2018**

УДК 51
ББК 22.161.6
К84

Печатается по решению учебно-методического Совета ТувГУ

Крум Е.В., Бичи-оол Е.К.

Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений: учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета / Е.В. Крум, Е.К. Бичи-оол. – Кызыл: Изд-во ТувГУ, 2018 – 78 с.

Пособие написано в соответствии с рабочей программой по дисциплине “Дифференциальные уравнения” для студентов физико-математического факультета. Рассчитано на 36 часов практических занятий. Каждой теме предшествует перечень вопросов. Типовые задачи даются с подробными решениями. Пособие может использоваться и для инженерно-технических направлений подготовки

Рецензенты:

Монгуш А.С., к.п.н., заведующая кафедрой физико-математического и дистанционного образования
ТИРО и ПК.

Сотников А.И., к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и МПМ

© Бичи-оол Е.К., Крум Е.В., 2018
© Тувинский государственный
университет, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Тема 1: Дифференциальные уравнения I порядка.....	5
Тема 2: Дифференциальные уравнения высших порядков	23
Тема 3. Системы дифференциальных уравнений.....	40
Индивидуальная работа «Дифференциальные уравнения»	47
Образец выполнения индивидуальной работы по теме «Дифференциальные уравнения	68
Рекомендуемая дополнительная литература	77

ВВЕДЕНИЕ

Система математического образования должна быть направлена на использование математических знаний при изучении циклов специальных дисциплин. Поставленная задача вызывает необходимость повышения уровня математической подготовки студентов на основе более углубленного курса математики с учетом их профессиональной ориентации.

Настоящее пособие предназначено для оказания студентам помощи в овладении навыками решения дифференциальных уравнений первого и высших порядков, систем дифференциальных уравнений. Необходимые теоретические знания для решения задач в данном пособии студент может найти в учебно-методическом пособии [1, 2, 5] или в другой указанной литературе. Пособие переработано и дополнено темой «Системы дифференциальных уравнений» из уже изданного пособия [4].

Пособие состоит из: введения, трех тем и упражнений к ним, вариантов индивидуальной работы и образца выполнения индивидуальной работы. В первом разделе помещены примеры дифференциальных уравнений первого порядка, во втором разделе рассматриваются дифференциальные уравнения второго порядка, в третьем разделе рассматриваются системы дифференциальных уравнений. Индивидуальная работа состоит из нескольких вариантов и является обязательным условием для успешной сдачи семестрового экзамена.

Пособие предназначено для студентов физико-математического факультета. Оно также может быть полезным для студентов инженерно-технического факультета.

Авторы признательны рецензентам за плодотворное обсуждение и ценные замечания.

ТЕМА 1: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ I ПОРЯДКА

Теоретические вопросы:

Понятие дифференциального уравнения. Общее решение дифференциального уравнения, частное решение. Уравнение с разделяющимися переменными, однородные уравнения, уравнения приводимые к однородным. Линейные уравнения I порядка. Уравнения Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.

Задача 1:

Докажите, что функция $y = cx - 3$ является общим решением дифференциального уравнения $y'x = y + 3$ на полуплоскости $x > 0$ плоскости XOY . Найдите частное решение, проходящее через точку $M(2; -5)$.

Решение: Действительно, для всякой константы c , функция одной переменной $y = cx - 3$ является решением уравнения, т.к. обращает это уравнение в тождество: $(cx - 3)' \cdot x = (cx - 3) + 3 \Leftrightarrow cx = cx$. Подберем частное решение вида $y = cx - 3$ так, чтобы оно прошло через точку $M(2; -5)$ из тех соображений, что координаты точки удовлетворяют уравнению: Если точка принадлежит частному решению, то её координаты должны удовлетворять уравнению: $-5 = c \cdot 2 - 3 \Leftrightarrow c = -1$.

Итак, $y = -x - 3$ искомое частное решение.

Задача 2:

Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$3yy' + xe^y = 0.$$

Решение: Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$3yy' = -xe^y \Leftrightarrow 3y \frac{dy}{dx} = -xe^y \quad \frac{3ydy}{e^y} = -xdx \Rightarrow \int \frac{3ydy}{e^y} = \int -xdx \Leftrightarrow$$

$$3 \int ye^{-y} dy = - \int x dx = - \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$3 \int ye^{-y} dy = \begin{vmatrix} u = y \\ dv = e^{-y} dy \\ v = -e^{-y} \\ du = dy \end{vmatrix} = 3(-ye^{-y} - \int -e^{-y} dy) = 3(-ye^{-y} + \int e^{-y} dy)$$

$$= -3ye^{-y} - 3e^{-y} + c_2 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + c_1 = -3ye^{-y} - 3e^{-y} + c_2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} = e^{-y}(3y + 3) + c_1 - c_2 \Leftrightarrow x^2 = 6(y + 1)e^{-y} + c \Leftrightarrow 6(y + 1)e^{-y} - x^2 + c = 0.$$

Задача 3:

Найдите частное решение дифференциального уравнения

$$4x\sqrt{5+y^2}dx + 7y\sqrt{4+x^2}dy = 0, \text{ проходящее через точку } M(-3; 2).$$

Решение: Это уравнение с разделяющимися переменными

$$4x\sqrt{5+y^2}dx = -7y\sqrt{4+x^2}dy \Leftrightarrow \frac{4xdx}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{-7ydy}{\sqrt{5+y^2}} \Rightarrow 4 \int \frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}} = -7 \int \frac{ydy}{\sqrt{5+y^2}},$$

$$4 \int \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}} = \left| \begin{array}{l} 4+x^2 = t, \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = 4 \cdot \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = 2 \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_1 = 4\sqrt{4+x^2} + c_1$$

$$-7 \int \frac{y dy}{\sqrt{5+y^2}} = \left| \begin{array}{l} 5+y^2 = t, \\ y dy = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -7 \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = -\frac{7}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_2 = -7\sqrt{5+y^2} + c_2$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{4+x^2} + c_1 = -7\sqrt{5+y^2} + c_2 \Leftrightarrow 4\sqrt{4+x^2} + 7\sqrt{5+y^2} = c \quad - \text{ это общий интеграл.}$$

Для частного интеграла нужно найти константу c :

$$4 \cdot \sqrt{4+(-3)^2} + 7 \cdot \sqrt{5+2^2} = c \Leftrightarrow c = 21 + 4\sqrt{13}.$$

Таким образом, частный интеграл дифференциального уравнения:

$$4\sqrt{4+x^2} + 7\sqrt{5+y^2} = 21 + 4\sqrt{13}.$$

Задача 4:

Решите дифференциальное уравнение:

$$\text{а) } y' = \frac{4y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 3.$$

Решение:

Функция $f(x,y) = \frac{4y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 3$ является однородной, так как:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{4(\lambda y)^2}{(\lambda x)^2} + \frac{2\lambda y}{\lambda x} - 3 = \frac{4y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} - 3 = f(x,y).$$

Т.о. дифференциальное уравнение однородное, используем подстановку $y = t \cdot x$

$$y' = t'x + t \Rightarrow t'x + t = \frac{4t^2x^2}{x^2} + \frac{2tx}{x} - 3 \Rightarrow t'x + t = 4t^2 + 2t - 3$$

$$\Leftrightarrow t'x = 4t^2 + t - 3 \Rightarrow \frac{dt}{dx} x = 4t^2 + t - 3 \Rightarrow \frac{dt}{4t^2 + t - 3} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dt}{4t^2 + t - 3} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{4t^2 + t - 3} = \int \frac{dt}{(4t-3)(t+1)} = \int \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4t-3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} \ln|4t-3| - \frac{1}{7} \ln|t+1| + c_1 = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{4t-3}{t+1} \right| + c_1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c_2 \Rightarrow \frac{1}{7} \ln \left| \frac{4t-3}{t+1} \right| + c_1 = \ln|x| + c_2 \Rightarrow \ln \left| \frac{4t-3}{t+1} \right| = \ln|x^7| + \ln c$$

$$\left| \frac{4t-3}{t+1} \right| = cx^7 \Rightarrow \frac{4\frac{y}{x}-3}{\frac{y}{x}+1} = cx^7 \Rightarrow \frac{4y-3x}{y+x} = cx^7.$$

$$\text{б) } y'x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x = y \cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

Решение: Выразим y' :

$$y' = \frac{y \cos\left(\frac{y}{x}\right) - x}{x \cos\left(\frac{y}{x}\right)}, \text{ где } f(x, y) = \frac{y \cos\left(\frac{y}{x}\right) - x}{x \cos\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Проверим, является ли эта функция однородной:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) - \lambda x}{\lambda x \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)} = \frac{\lambda \left(y \cos\frac{y}{x} - x\right)}{\lambda x \cos\frac{y}{x}} = f(x, y),$$

т.к. выполняется условие $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, то это однородная функция, используем подстановку $y = tx$ $y' = t'x + t \Rightarrow$

$$t'x + t = \frac{tx \cos\left(\frac{tx}{x}\right) - x}{x \cos\left(\frac{tx}{x}\right)} = \frac{x(t \cos t - 1)}{x \cos t} \Rightarrow t'x + t = t - \frac{1}{\cos t} \Rightarrow t'x = -\frac{1}{\cos t} \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} x = -\frac{1}{\cos t} \Rightarrow$$

$$-\cos t \cdot dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\int \cos t \cdot dt = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\sin t + C_1 = \ln|x| + C_2 \Rightarrow \ln|x| + \sin \frac{y}{x} = C.$$

в) $y' = \frac{3x + 2y - 5}{2x + y + 4}.$

Решение:

$$f(x, y) = \frac{3x + 2y - 5}{2x + y + 4}.$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{3\lambda x + 2\lambda y - 5}{2\lambda x + \lambda y + 4} = \frac{3x + 2y - \frac{5}{\lambda}}{2x + y + \frac{4}{\lambda}} \neq f(x, y)$$

-это не однородная функция. Сделаем подстановку

$x = u + k_1$, $y = v + k_2$. Найдем k_1 , k_2 такие, чтобы выполнялись равенства:

$$\begin{cases} 3k_1 + 2k_2 - 5 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k_1 + 2k_2 = 5 \\ 2k_1 + k_2 = -4 \end{cases},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 13, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -22, \Rightarrow k_1 = -13, k_2 = 22.$$

Сделаем замену: $\begin{cases} x = u - 13 \\ y = v + 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases}$

Таким образом: $\frac{dy}{dx} = \frac{3x + 2y - 5}{2x + y + 4} \Leftrightarrow \frac{dv}{du} = \frac{3u - 39 + 2v + 44 - 5}{2u - 26 + v + 22 + 4} \Leftrightarrow \frac{dv}{du} = \frac{3u + 2v}{2u + v}.$

$g(u, v) = \frac{3u + 2v}{2u + v}$ - однородная функция от u и v , т.к. $g(\lambda u, \lambda v) = g(u, v)$. Сделаем замену $v = tu \Rightarrow$

$$\frac{dt}{du} u + t = \frac{3u + 2ut}{2u + ut} = \frac{3 + 2t}{2 + t} \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{du}u = \frac{3+2t}{2+t} - t = \frac{3+2t-2t-t^2}{2+t} = \frac{3-t^2}{2+t} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2+t}{3-t^2} dt \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{2+t}{3-t^2} dt;$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c_1;$$

$$\int \frac{2+t}{3-t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{(\sqrt{3})^2 - t^2} + \int \frac{t}{3-t^2} dt = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| - \frac{1}{2} \ln|3-t^2| + c_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \ln|u| + \ln c = \ln \left| \frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}} \right| - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln|3-t^2| \Rightarrow \ln|u^{\sqrt{3}}| + \ln c = \ln \left| \frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}} \right| - \ln|3-t^2|^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow cu^{\sqrt{3}} = \frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{(3-t^2)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \Rightarrow cu^{\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{v}{u} + \sqrt{3}\right)}{\left(\frac{v}{u} - \sqrt{3}\right)} \cdot \frac{1}{\left(3 - \frac{v^2}{u^2}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{v + \sqrt{3}u}{v - \sqrt{3}u} \cdot \frac{u^{\sqrt{3}}}{(3u^2 - v^2)^{\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow c = \frac{y-22+\sqrt{3}x+13\sqrt{3}}{y-22-\sqrt{3}x-13\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{(3(x+13)^2 - (y-22)^2)^{\sqrt{3}}} - \text{общее решение.}$$

$$r) y' = \frac{2x+2y-7}{x+y+1}$$

Решение:

$$f(x, y) = \frac{2x+2y-7}{x+y+1} \text{ не является однородной.}$$

$$\begin{cases} 2x+2y-7=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=7 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{решений эта система уравнений не имеет. Сделаем}$$

подстановку, которая приведет к уравнению с разделяющимися переменными:

$$x+y+1=z \Rightarrow y=z-x-1 \Rightarrow y' = z' - 1$$

$$\Rightarrow z' - 1 = \frac{2x+2z-2x-2-7}{z} = \frac{2z-9}{z} \Leftrightarrow z' = \frac{2z-9}{z} + 1 = \frac{3z-9}{z} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3(z-3)}{z} \Rightarrow \frac{dz \cdot z}{z-3} = 3dx \Rightarrow \int \frac{zdz}{z-3} = \int 3dx$$

$$\int \frac{zdz}{z-3} = \int \left(1 + \frac{3}{z-3}\right) dz = z + 3\ln|z-3| + c_1$$

$$\int 3dx = 3x + c_2 \Rightarrow 3x + c_2 = z + 3\ln|z-3| + c_1$$

$$\Leftrightarrow 3x + c_2 = x + y + 1 + 3\ln|x+y+1-3| + c_1 \Leftrightarrow 3\ln|x+y-2| = 2x - y + c$$

- общий интеграл.

Задача 5:

Решите уравнение:

$$a) y' + \frac{xy}{1-x^2} = 2 \arccos x - 3x.$$

Решение: Это линейное уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)$.

Применим метод Бернулли, используем подстановку:

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

$$\Rightarrow u'v + uv' + \frac{xuv}{1-x^2} = 2 \arccos x - 3x \Leftrightarrow u'v + u \left(v' + \frac{xv}{1-x^2} \right) = 2 \arccos x - 3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v' + \frac{xv}{1-x^2} = 0 & \text{(I)} \\ u'v = 2 \arccos x - 3x & \text{(II)} \end{cases}$$

Найдем одно из решений уравнения (I):

$$v' + \frac{xv}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow v' = -\frac{xv}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{xv}{1-x^2} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{xdx}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{xdx}{1-x^2}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + c_1$$

$$-\int \frac{xdx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + c_2 \Rightarrow \ln|v| + c_1 = \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + c_2$$

$$\ln|v| = \ln \sqrt{1-x^2} + c;$$

Так как нас интересует одно из решений, то возьмем $c=0 \Rightarrow$

$$\ln|v| = \ln \sqrt{1-x^2} \Rightarrow v = \sqrt{1-x^2}$$

Найденную функцию v подставим в уравнение (II):

$$u' \sqrt{1-x^2} = 2 \arccos x - 3x \quad \frac{du}{dx} \cdot \sqrt{1-x^2} = 2 \arccos x - 3x$$

$$\Rightarrow du = \frac{2 \arccos x - 3x}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow \int du = \int \left(\frac{2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$$

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx &= 2 \int \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}} - 3 \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= -2 \int \arccos x d(\arccos x) + \frac{3}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 3\sqrt{1-x^2} - \arccos^2 x + c_1. \end{aligned}$$

$$\int du = u + c_2 \Rightarrow u + c_2 = 3\sqrt{1-x^2} - \arccos^2 x + c_1 \Rightarrow u = 3\sqrt{1-x^2} - \arccos^2 x + c$$

$$\Rightarrow y = (3\sqrt{1-x^2} - \arccos^2 x + c) \cdot \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow y = 3(1-x^2) - \sqrt{1-x^2} \arccos^2 x + c\sqrt{1-x^2}.$$

$$6) y' - \frac{4xy}{1+x^2} = \sqrt[3]{\frac{y^2}{1+x^2}} \arctg x.$$

Решение: $y' - \frac{4x}{1+x^2} \cdot y = \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} y^{\frac{2}{3}}$

Это уравнение Бернулли вида: $y' + a(x)y = b(x)y^n$.

Применим метод Бернулли: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - \frac{4xuv}{1+x^2} = \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} \cdot u^{\frac{2}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow u'v + u \left(v' - \frac{4xv}{1+x^2} \right) = \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} \cdot u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v' - \frac{4vx}{1+x^2} = 0 & \text{(I)} \\ u'v = \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} & \text{(II)} \end{cases}$$

Найдем одно из решений (I) $\frac{dv}{dx} = \frac{4xv}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{4xdx}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = 4 \int \frac{xdx}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \ln|v| = 2 \ln|1+x^2| + c.$$

Одно из решений (при $c=0$) $\ln|v| = \ln(1+x^2)^2 \Rightarrow v = (1+x^2)^2$.

Найденную функцию подставим в уравнение (II):

$$\frac{du}{dx} v = \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{du}{u^{\frac{2}{3}}} = \frac{\arctg x \cdot v^{\frac{2}{3}} dx}{v(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\arctg x \cdot dx}{v^{\frac{1}{3}}(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}$$

$$u^{-\frac{2}{3}} du = \frac{\arctg x dx}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\arctg x dx}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\int u^{-\frac{2}{3}} du = \int \frac{\arctg x dx}{1+x^2} \Rightarrow \frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = \frac{\arctg^2 x}{2} + c_1$$

$$\Rightarrow u^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \arctg^2 x + c \Rightarrow u = \left(\frac{1}{6} \arctg^2 x + c \right)^3$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{6} \arctg^2 x + c \right)^3 \cdot (1+x^2)^2 - \text{общее решение.}$$

в) $(3xy+4)dy = y^2 dx$.

Решение: Запишем уравнение в виде $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{3xy+4} - \text{это уравнение не является линейным.}$$

Выразим $\frac{dx}{dy} = \frac{3xy+4}{y^2} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = \frac{4}{y^2}$ - это уравнение линейное относительно x .

$$x = uv \Rightarrow x'_y = u'_y v + uv'_y.$$

$$u'v + uv' - \frac{3}{y}uv = 4y^{-2} \quad u'v + u\left(v' - \frac{3}{y}v\right) = 4y^{-2}.$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dy} - \frac{3}{y}v = 0 \\ \frac{du}{dy} v = 4y^{-2} \end{cases}.$$

Найдем решение первого уравнения системы $\frac{dv}{dy} - \frac{3}{y}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = 3 \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = 3 \int \frac{dy}{y}$

$$\Rightarrow \ln|v| = 3 \ln|y| + c.$$

Одно из решений $\ln|v| = 3\ln|y| \Rightarrow v=y^3$

Найденную функцию v подставим во второе уравнение: $\frac{du}{dy} y^3 = 4y^{-2} \Rightarrow du = 4y^{-5} dy \Rightarrow$

$$\int du = 4 \int y^{-5} dy \Rightarrow u = 4 \frac{y^{-4}}{-4} + c_1 \Rightarrow u = c_1 - \frac{1}{y^4} \Rightarrow x = \left(c - \frac{1}{y^4} \right) y^3 = cy^3 - \frac{1}{y}.$$

Задача 6:

а). Решите задачу Коши:

$$(4x^2 \sqrt{y^3} + y) dx + (2x^3 \sqrt{y} + x) dy = 0 \text{ при } y(-1) = 4.$$

Решение: Уравнение имеет вид: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Проверим, будет ли оно уравнением в полных дифференциалах:

$$P'_y = (4x^2 \sqrt{y^3} + y)'_y = 4x^2 \cdot \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} + 1, Q'_x = (2x^3 \sqrt{y} + x)'_x = 2 \cdot 3x^2 \sqrt{y} + 1.$$

$$P'_y \equiv Q'_x.$$

Таким образом, это уравнение в полных дифференциалах.

Найдем функцию $U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$.

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{x_0}^x (4x^2 \sqrt{y^3} + y) dx + \int_{y_0}^y (2x_0^3 \sqrt{y} + x_0) dy = \\ &= 4\sqrt{y^3} \int_{x_0}^x x^2 dx + y \int_{x_0}^x dx + 2x_0^3 \int_{y_0}^y \sqrt{y} dy + x_0 \int_{y_0}^y dy = 4\sqrt{y^3} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x_0}^x + yx \Big|_{x_0}^x + 2x_0^3 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{y_0}^y + x_0 y \Big|_{y_0}^y = \\ &= \frac{4}{3} x^3 \sqrt{y^3} - \frac{4}{3} x_0^3 \sqrt{y^3} + xy - x_0 y + \frac{4}{3} x_0^3 \sqrt{y^3} - \frac{4}{3} x_0^3 y_0^{\frac{3}{2}} + x_0 y - x_0 y_0 = \\ &= \frac{4}{3} x^3 \sqrt{y^3} + xy + \left(-\frac{4}{3} x_0^3 y_0^{\frac{3}{2}} - x_0 y_0 \right) = \frac{4}{3} x^3 \sqrt{y^3} + xy + c_1 \end{aligned}$$

Таким образом, $U(x, y) = \frac{4}{3} x^3 \sqrt{y^3} + xy + c_1 = c_2$.

Решением является $\frac{4}{3} x^3 \sqrt{y^3} + xy = c$.

Вместо (x_0, y_0) , можно взять конкретную точку из области определения функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$

В данном случае можно взять точку $O(0, 0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(x, y) &= \int_0^x (4x^2 \sqrt{y^3} + y) dx + \int_0^y (2 \cdot 0^3 \sqrt{y} + 0) dy = \\ &= 4\sqrt{y^3} \int_0^x x^2 dx + y \int_0^x dx + \int_0^y 0 dy = 4\sqrt{y^3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^x + yx \Big|_0^x + 0 = \frac{4}{3} x^3 \sqrt{y^3} - 0 + xy - 0 \Rightarrow \\ U(x, y) &= \frac{4}{3} x^3 \sqrt{y^3} + xy \Rightarrow U(x, y) = c \text{ является решением} \Leftrightarrow \frac{4}{3} x^3 \sqrt{y^3} + xy = c \text{ -общий интеграл.} \end{aligned}$$

Найдем частное решение:

$$\frac{4}{3} \cdot (-1)^3 \sqrt{4^3} + (-1) \cdot 4 = c \Rightarrow c = -\frac{56}{3}$$

Решением задачи Коши является функция:

$$\frac{4}{3}x^3\sqrt{y^3} + xy = -\frac{56}{3} \Leftrightarrow 4x^3\sqrt{y^3} + 3xy + 56 = 0.$$

б). Решить уравнение :

$$(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

$$P'_y = -6xy^2 \neq Q'_x = 6xy^2.$$

Подберем множитель μ по формуле $(\ln \mu)'_x = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}$

$$(\ln \mu)'_x = \frac{-6xy^2 - 6xy^2}{3x^2y^2} = \frac{-12xy^2}{3x^2y^2} = \frac{-4}{x}$$

$$\ln \mu = \int -\frac{4}{x} dx = -4 \ln x = \ln x^{-4} \quad \mu = \frac{1}{x^4}$$

До множим исходное уравнение на μ

$$\frac{1}{x^4}(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + \frac{1}{x^4} \cdot 3x^2y^2dy = 0$$

$$(\ln x - \frac{2y^3}{x^3})dx + \frac{3y^2}{x^2}dy = 0$$

$$P'_y = (-\frac{2y^3}{x^3})' = -\frac{6y^2}{x^3} \equiv Q'_x = (\frac{3y^2}{x^2})' = \frac{-6y^2}{x^3}$$

полученное уравнение стало уравнением в полных дифференциалах.

$$F(x; y) = \int_1^x \left(\ln x - \frac{2y^3}{x^3} \right) dx + \int_0^y 3y^2 dy =$$

$$x \ln x - x + \frac{2y^3}{2x^2} \Big|_1^x + y^3 \Big|_0^y = x \ln x - x + \frac{y^3}{x^2} + 1 - y^3 + y^3 = x \ln x - x + \frac{y^3}{x^2} + 1$$

$$F'_x = \ln x - 1 + 1 - \frac{2y^3}{x^3} = \ln x - \frac{2y^3}{x^3}$$

$$F'_y = \frac{3y^2}{x^2}$$

В качестве точки $(x_0; y_0)$ возьмем например точку $(1; 0)$.

Таким образом общее решение $x \ln x - x + \frac{y^3}{x^2} + 1 = C$.

в) Решить уравнение $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$

$$P'_y = 4xy - 9y^2 \neq Q'_x = -3y^2$$

Подберем множитель μ по формуле

$$(\ln \mu)'_y = \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{-3y^2 - 4xy + 9y^2}{2xy^2 - 3y^3} = \frac{6y^2 - 4xy}{y^2(2x - 3y)} = \frac{2y(3y - 2x)}{-y^2(3y - 2x)} = -\frac{2}{y}.$$

$$(\ln \mu)'_y = -\frac{2}{y}$$

$$\ln \mu = -\int \frac{2}{y} dy = -2 \ln y$$

$$\mu = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{1}{y^2}(2xy^2 - 3y^3)dx + \frac{1}{y^2}(7 - 3xy^2)dy = 0 \quad (2xy - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy = 0$$

$$P'_y = -3 \equiv Q'_x = -3$$

$$\text{Возьмем } x_0, F(x, y) = \int_0^x (2x - 3y)dx + \int_1^y \left(\frac{7}{y^2} - 0\right)dy = x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = x^2 - 3xy - \frac{7}{y} + 7.$$

$$\text{Ответ: } x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = 0.$$

Задача 7:

Проинтегрируйте дифференциальное уравнение:

$$\text{а) } \arccos\left(\frac{x}{y'}\right) = y'.$$

$$\text{Решение: } \arccos\left(\frac{x}{y'}\right) = y' \Rightarrow \cos y' = \frac{x}{y'} \Rightarrow x = y' \cos y'.$$

Данное уравнение можно решить в параметрическом виде:

$$y' = t \Rightarrow x = t \cos t \Rightarrow dx = dt \cos t - t \sin t dt$$

$$y' = t \Leftrightarrow dy = t dx \Rightarrow dy = t(\cos t - t \sin t) dt$$

$$\int dy = \int (t \cos t - t^2 \sin t) dt$$

$$\int dy = y + c_1$$

$$\int (t \cos t - t^2 \sin t) dt = \int t \cos t dt - \int t^2 \sin t dt = \left. \begin{array}{l} t^2 = u \\ \sin t dt = dv \\ 2t dt = du \\ v = \int \sin t dt = -\cos t \end{array} \right| =$$

$$= \int t \cos t dt - \left(-t^2 \cos t - \int -\cos t \cdot 2t dt\right) =$$

$$= \int t \cos t dt + t^2 \cos t - 2 \int t \cos t dt = t^2 \cos t - \int t \cos t dt =$$

$$= \left. \begin{array}{l} u = t, dv = \cos t dt \\ v = \int \cos t dt = \sin t, du = dt \end{array} \right| = t^2 \cos t - \left(t \sin t - \int \sin t dt\right) =$$

$$= t^2 \cos t - t \sin t + \int \sin t dt = t^2 \cos t - t \sin t - \cos t + c_2$$

$$\text{Таким образом, } y + c_1 = t^2 \cos t - t \sin t - \cos t + c_2$$

$$\Rightarrow y = t^2 \cos t - t \sin t - \cos t + c.$$

$$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t^2 \cos t - t \sin t - \cos t + c \end{cases} \quad \text{параметрическое решение уравнения.}$$

$$\text{б) } y' = \ln y - \ln y'^2.$$

$$\text{Решение: Выразим } y: e^{y'} = e^{\ln y - \ln y'^2} \Rightarrow e^{y'} = \frac{e^{\ln y}}{e^{\ln y'^2}} \Rightarrow$$

$$e^{y'} = \frac{y}{y'^2} \Rightarrow y = y'^2 e^{y'}.$$

Это уравнение можно решить в параметрическом виде:

$$y' = t \Rightarrow y = t^2 e^t \Rightarrow dy = (2te^t + t^2 e^t) dt \quad y' = t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{t} = \frac{2te^t + t^2 e^t}{t} dt \Rightarrow dx = 2e^t + te^t dt \Rightarrow \int dx = \int (2e^t + te^t) dt$$

$$\int dx = x + c_1 = \int 2e^t dt + \int te^t dt = 2e^t + te^t - e^t + c_2 = e^t(t+1) + c_2.$$

$$\text{Таким образом, } x + c_1 = e^t(t+1) + c_2 \Rightarrow x = e^t(t+1) + c$$

$$\begin{cases} x = e^t(t+1) + c \\ y = t^2 e^t \end{cases} \quad \text{параметрическое решение уравнения.}$$

$$\text{в) } y = xy'^2 + y'^2.$$

Решение: Пусть $y' = p$

$$y = xp^2 + p^2 \quad y = p^2 + (x+1)p^2 \Rightarrow (x+1)p^2 = \frac{y}{p^2}.$$

$$dy = p^2 dx + 2pxdp + 2pdp$$

сделаем замену $dy = p dx$

$$p dx = p^2 dx + 2pxdp + 2pdp \quad /: p$$

$$dx = p dx + 2pxdp + 2dp$$

$$(1-p)dx = (2x+2)dp$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dp}{1-p}$$

$$\frac{1}{2} \ln(x+1) = \ln(1-p) + \ln C$$

$$\sqrt{x+1} = \frac{C}{1-p}$$

$$x+1 = \frac{C^2}{(1-p)^2}. \quad \text{Так как } x+1 = \frac{y}{p^2}, \text{ то } \frac{y}{p^2} = \frac{C^2}{(1-p)^2}$$

$$y = \frac{Cp^2}{(1-p)^2}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1 \\ y = \frac{Cp^2}{(1-p)^2} \end{cases} \quad \text{- параметрическое решение}$$

$$\text{г). } x = y'Siny' + Cosy'$$

Решение: Пусть $y' = p \quad x = pSinp + Cosp$

$$dx = (Sinp + pCosp - Sinp)dp = pCospdp$$

$$dy = p dx \Rightarrow dy = p \cdot pCospdp \Rightarrow$$

$$y = \int p^2 Cospdp = \left| \begin{matrix} u = 2p & du = 2dp \\ dv = Cospdp & v = -Cosp \end{matrix} \right| =$$

$$= p^2 \cdot Sinp - \int 2pSinpdp = \left| \begin{matrix} u = 2p & du = 2dp \\ dv = Sinpdp & v = -Cosp \end{matrix} \right| = p^2 Sinp - \left[-2pCosp - \int -2Cospdp \right] =$$

$$= p^2 Sinp + 2pCosp - 2Sinp = (p^2 - 2)Sinp + 2pCosp + C$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = p \sin p + \cos p \\ y = (p^2 - 2) \sin p + 2p \cos p + C \end{cases}.$$

д). $y = e^{y'}(y' - 1)$

Решение: $y' = p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dx = \frac{dy}{p}$

$$y = e^p(p - 1)$$

$$dy = (e^p(p - 1) + e^p)dp$$

$$x = \int e^p dp = e^p + C \quad dx = \frac{dy}{p} = \frac{e^p p dp}{p} = e^p dp.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = e^p + C \\ y = e^p(p - 1) \end{cases}.$$

Упражнения:

Решите дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

1. $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx.$

2. $\sqrt{4 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy.$

3. $x\sqrt{3 + y^2} dx + y\sqrt{2 + x^2} dy = 0.$

4. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} dx = 0.$

5. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$

6. $y \ln y + xy' = 0.$

7. $x + xy + yy'(1 + x) = 0.$

8. $y' = e^y \sin 4x.$

9. $xy dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0.$

10. $\frac{1}{\cos^2 x} \operatorname{tg} y dx + \frac{1}{\cos^2 y} \operatorname{tg} x dy = 0.$

11. $\sin x \sin y dx + \cos x \cos y dy = 0.$

12. $\ln \cos y dx + x \operatorname{tg} y dy = 0.$

13. $\frac{x dy}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{y dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0.$

14. $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y).$

15. $yy' = -2x \sec y$

16. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dx + (\sqrt{xy} + \sqrt{y})dy = 0.$

17. $\frac{y^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}} = \frac{3y + 2}{x + 1} y'.$

18. $y' = \sin(x - y).$

$$19. e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x}) \cos y \cdot y' = 0$$

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

$$20. y' = 2\sqrt{y} \ln x, \quad y(e) = 1.$$

$$21. (1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx, \quad y(0) = 0.$$

$$22. \frac{y}{y'} = \ln y, \quad y(2) = 1.$$

$$23. y' = 2^{x-y}, \quad y(-3) = -5.$$

$$24. \frac{yy'}{x} + e^y = 0, \quad y(1) = 0.$$

$$25. 3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 + e^x) \sec^2 y dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$26. y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y), \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$27. y \ln^3 y + y' \sqrt{x+1} = 0, \quad y\left(-\frac{15}{16}\right) = e.$$

$$28. \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin y}} + y' = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$29. y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$30. \sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$31. \sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$32. y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$33. xy' = \frac{y}{\ln x}, \quad y(e) = 1.$$

$$34. (1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1$$

Решите однородные дифференциальные уравнения и уравнения приводимые к ним:

$$1. xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$2. xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2x^2 + 2y^2}.$$

$$3. 3y'x^2 = 4x^2 + 8xy + y^2.$$

$$4. 2x^2 y' = y^2 + 6xy + 3x^2.$$

$$5. y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

$$6. y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$$

7. $4y' = \frac{y^2 + 5x^2}{x^2} + \frac{10y}{x}.$
8. $2x^2 dy = (x^2 + y^2) dx.$
9. $(x^2 + y^2) dx - xy dy = 0.$
10. $xy' = 2y - x.$
11. $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x.$
12. $x dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx.$
13. $xy' \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x = y \sin\left(\frac{y}{x}\right).$
14. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$
15. $xy' \ln\left(\frac{y}{x}\right) = x + y \ln\left(\frac{y}{x}\right).$
16. $xyy' = y^2 + 2x^2.$
17. $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}.$
18. $(x^2 + y^2) dx - xy dy = 0.$
19. $xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}.$
20. $xy' = 2(y - \sqrt{xy}).$
22. $3y \sin\left(\frac{3x}{y}\right) dx + \left(y - 3x \sin\left(\frac{3x}{y}\right)\right) dy = 0.$
23. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}.$
24. $(y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - x dy = 0.$
25. $(x^2 + 2xy - y^2) dx + (y^2 + 2xy - x^2) dy = 0.$
26. $y^2 + x^2 y' = xyy'.$
27. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$
28. $y' = \frac{3y - 2x + 1}{3x + 3}$
29. $y' = \frac{6y - 6}{5x + 4y - 9}$
30. $y' = \frac{x + 6y - 7}{8x - y - 7}$

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

32. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0.$

33. $xy' - y = x \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right), y(1) = \frac{\pi}{2}.$
34. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, y(1) = 2.$
35. $(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2)dy = 0, y(1) = 0.$
36. $xy' = xe^{y/x} + y, y(1) = 0.$
37. $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, y(-1) = -1.$

Решите уравнения в полных дифференциалах:

- $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$
- $\left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0.$
- $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$
- $\left(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy = 0.$
- $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$
- $(\sin 2x - 2 \cos(x + y))dx - 2 \cos(x + y)dy = 0.$
- $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$
- $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0.$
- $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2 + y^2} = 0.$
- $(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0.$
- $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0.$
- $(xy + \sin y)dx + \left(\frac{1}{2}x^2 + x \cos y\right)dy = 0.$
- $(\sin y + (1 - y) \cos x)dx + ((1 + x) \cos y - \sin x)dy = 0.$
- $(x \ln y + y)dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0.$
- $(x^2 + \sin y)dx + (1 + x \cos y)dy = 0.$
- $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0.$
- $(e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0.$
- $(\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + 1 + \operatorname{arctg} y)dy = 0.$
- $(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0.$
- $(\operatorname{tg} y + y \cos \operatorname{ec}^2 x)dx + (\operatorname{ctg} x + x \sec^2 y)dy = 0.$

21. $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - y\right)dx + \left(e^y - x - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0.$
22. $\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$
23. $(\cos(x + y^2) + \sin x)dx + 2y \cos(x + y^2)dy = 0.$
24. $xe^{y^2}dx + (x^2 ye^{y^2} + tg^2 y)dy = 0.$
25. $\frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2} = 0.$
26. $x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0.$

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

27. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0, \quad y(0) = 0.$
28. $(2xye^{x^2} + \ln y)dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y}\right)dy = 0, \quad y(0) = 1.$
29. $(\ln y - 5y^2 \sin 5x)dx + \left(\frac{x}{y} + 2y \cos 5x\right)dy = 0, \quad y(0) = e.$
30. $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0, \quad y(0) = 0.$
31. $(3x^3 + 6x^{2y} + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2 y)dy = 0, \quad y(0) = 0.$
32. $xy^2 dx + y(x^2 + y^2)dy = 0, \quad y(0) = 1.$
33. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2 y + y^2)dy = 0, \quad y(1) = 1.$
34. $\frac{1 + xy}{x^2 y} dx + \frac{1 - xy}{xy^2} dy = 0, \quad y(0) = 0.$

Решите линейные уравнения:

1. $y' + x^2 y = x^2.$
2. $xy' + y = 3.$
3. $y' - \frac{3y}{x} = x.$
4. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x.$
5. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x (x+1).$
6. $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$
7. $y' + \frac{1}{x^2} y = 1.$
8. $e^{x^2} y' + 2xye^{x^2} = x \sin x.$
9. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$
10. $y' \cos x + y = 1 - \sin x.$
11. $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x.$

12. $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$
13. $(1+x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x.$
14. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0.$
15. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2.$
16. $(x^3 + y)dx - xdy = 0.$
17. $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2.$
18. $y'x + y = 2y^2 \ln x.$
19. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, y(1) = 1.$
20. $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}, y(0) = 1.$
21. $2y' + y \cos x = \frac{\cos x(1 + \sin x)}{y}.$
22. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3.$
23. $xy' + y = y^2 \ln x.$
24. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x.$

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

25. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$
26. $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3}.$
27. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, y(1) = 4.$
28. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 1.$
29. $y'x - \frac{4}{x+1} = x, y(0) = 1.$
30. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, y(0) = 0.$
31. $y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\frac{1}{2}.$
32. $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2, y(0) = 1.$
33. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, y(0) = 1.$
34. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3}.$
35. $y' + 2xy = -2x^3, y(1) = \frac{1}{e}.$
36. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1.$
37. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1, y(1) = 1.$

$$38. \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e.$$

Решите уравнения Бернулли:

$$1. \quad y' + y = xy^3.$$

$$2. \quad x^2 y' = y^2 + xy.$$

$$3. \quad y'x + y = -xy^2$$

$$4. \quad y' = x^3 y^3 - xy.$$

$$5. \quad y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}.$$

$$6. \quad y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}.$$

$$7. \quad y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

$$8. \quad 4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$$

$$9. \quad ydx + (x + x^2 y^2)dy = 0.$$

$$10. \quad xy' + 2y = x^5 y^2.$$

$$11. \quad xy' + y = y^2 \ln x.$$

$$12. \quad y' = x^3 y^3 - xy.$$

$$13. \quad y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$$

$$14. \quad y' + xy = xy^3.$$

$$15. \quad x^2 y' = y^2 + xy.$$

$$16. \quad y' = xy + x^3 y^3.$$

$$17. \quad 2y' - 3y \cos x = \frac{-(2 + 3 \cos x)}{e^{2x} y}.$$

$$18. \quad (x^2 \ln y - x)y' = y.$$

$$19. \quad y'y - 4x - y^2 \sqrt{x} = 0.$$

$$20. \quad y' = \frac{1}{2x - y^2}.$$

$$21. \quad 3(xy' + y) = y^2 \ln x.$$

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

$$22. \quad y' + y = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{y}, \quad y(0) = \frac{9}{4}.$$

$$23. \quad y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1) \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$24. \quad y' - 3y = 81xy^4, \quad y(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

25. $8xy' - 12y = -y^3(5x^2 + 3), y(1) = \sqrt{2}.$
26. $2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2.$
27. $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3), y(0) = -1.$
24. $y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}y^4 \sin x, y(0) = 1.$
25. $2y' - 3y \cos x = -e^{-2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, y(0) = 1.$
26. $xy' + y = xy^2, y(1) = 1.$
27. $2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 1.$
28. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, y(1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$
29. $y' - y = xy^2, y(0) = 1.$
30. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1.$

Задайте решения уравнений параметрически:

1. $\arcsin \frac{x}{y'} = y'.$
2. $y = e^{y'}(y' - 1).$
3. $x = 2(\ln y' - y').$
4. $y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = y'.$
5. $x = 2y' + 3y'^2.$
6. $x = y'(1 + e^{y'}).$
7. $x = e^{2y'}(2y'^2 - 2y' + 1).$
8. $y = y' \ln y'.$
9. $x = y' + \ln y'.$
10. $y' = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{y'^2}\right).$

ТЕМА 2: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Теоретические вопросы:

Общее и частное решение дифференциального уравнения. Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Задача 1. Решите уравнение:

а) $y^{(4)} = \sin^4 2x$.

Решение: Интегрируя последовательно данное уравнение имеем: $y^{(4)} = \frac{d(y''')}{dx} \Rightarrow d(y''') = \sin^4 2x dx$

$$\Rightarrow \int d(y''') = \int \sin^4 2x dx \Rightarrow y''' = \int \sin^4 2x dx = \int (\sin^2 2x)^2 dx =$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x}{4} dx =$$

$$\frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 4x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 8x}{2} dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{8} \int dx +$$

$$+ \frac{1}{8} \int \cos 8x dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \sin 8x + c_1 =$$

$$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + c_1.$$

Таким образом $y''' = \frac{3}{8} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + c_1$.

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} \Rightarrow d(y'') = \left(\frac{3}{8} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + c_1 \right) dx$$

$$\Rightarrow y'' = \int \left(\frac{3}{8} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + c_1 \right) dx =$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} (-\cos 4x) + \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{8} (-\cos 8x) + c_1 x + c_2 \Rightarrow$$

$$y'' = \frac{3}{16} x^2 + \frac{1}{32} \cos 4x - \frac{1}{512} \cos 8x + c_1 x + c_2.$$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} \Rightarrow d(y') = \left(\frac{3}{16} x^2 + \frac{1}{32} \cos 4x - \frac{1}{512} \cos 8x + c_1 x + c_2 \right) dx$$

$$y' = \int \left(\frac{3}{16} x^2 + \frac{1}{32} \cos 4x - \frac{1}{512} \cos 8x + c_1 x + c_2 \right) dx = \frac{3}{16} \cdot \frac{x^3}{3} +$$

$$+ \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{512} \cdot \frac{1}{8} \sin 8x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{16} x^3 + \frac{1}{128} \sin 4x - \frac{1}{4096} \sin 8x + \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3.$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = \left(\frac{1}{16} x^3 + \frac{1}{128} \sin 4x - \frac{1}{4096} \sin 8x + \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3 \right) dx$$

$$\begin{aligned}
y &= \int \left(\frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{128}\sin 4x - \frac{1}{4096}\sin 8x + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3 \right) dx = \\
&= \frac{1}{16} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{4}(-\cos 4x) - \frac{1}{4096} \cdot \frac{1}{8}(-\cos 8x) + \frac{c_1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{c_2x^2}{2} + \\
&+ c_3x + c_4 \\
\Rightarrow y &= \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{152}\cos 4x + \frac{1}{32768}\cos 8x + \tilde{c}_1x^3 + \tilde{c}_2x^2 + c_3x + c_4.
\end{aligned}$$

б) $y''' - \frac{3y''}{x+2} = x$.

Решение: Это уравнение допускает понижение порядка с помощью подстановки: $y'' = p \Rightarrow y''' = p'$

$$\Rightarrow p' - \frac{3}{x+2}p = x \text{ - это линейное уравнение, используем метод Бернулли, сделаем подстановку:}$$

$$p = uv, \quad p' = u'v + uv'.$$

$$u'v + uv' - \frac{3uv}{x+2} = x \Rightarrow u'v + u \left(v' - \frac{3v}{x+2} \right) = x.$$

$$\begin{cases} v' - \frac{3v}{x+2} = 0 \\ u'v = x \end{cases}$$

$$\text{Решая первое уравнение, найдем } v: \frac{dv}{dx} = \frac{3v}{x+2} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x+2} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = 3 \int \frac{dx}{x+2} \Rightarrow$$

$$\ln v = 3 \ln|x+2| + c.$$

одно из решений: $\ln v = \ln(x+2)^3 \Rightarrow v = (x+2)^3$. Подставим найденную функцию v во второе уравнение:

$$u'(x+2)^3 = x \Rightarrow du = \frac{x}{(x+2)^3} dx$$

$$\Rightarrow u = \int \frac{x}{(x+2)^3} dx = \int \frac{x+2-2}{(x+2)^3} dx = \int \frac{dx}{(x+2)^2} - 2 \int \frac{dx}{(x+2)^3}$$

$$\Rightarrow u = -\frac{1}{(x+2)} + \frac{2}{2(x+2)^2} + c_1 \Rightarrow u = c_1 - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow p = \left(c_1 - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} \right) (x+2)^3.$$

$$p = c_1(x+2)^3 - (x+2)^2 + (x+2) \Rightarrow$$

$$y'' = c_1(x+2)^3 - (x+2)^2 + (x+2).$$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} \Rightarrow y' = \int (c_1(x+2)^3 - (x+2)^2 + (x+2)) dx =$$

$$= c_1 \frac{(x+2)^4}{4} - \frac{(x+2)^3}{3} + \frac{(x+2)^2}{2} + c_2.$$

$$y = \int \left(c_1 \frac{(x+2)^4}{4} - \frac{(x+2)^3}{3} + \frac{(x+2)^2}{2} + c_2 \right) dx =$$

$$= \frac{c_1}{4} \cdot \frac{(x+2)^5}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(x+2)^4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+2)^3}{3} + c_2x + c_3.$$

Таким образом:

$$y = \frac{c_1}{20}(x+2)^5 - \frac{1}{12}(x+2)^4 + \frac{1}{6}(x+2)^3 + c_2x + c_3 \quad \text{или}$$

$$y = \tilde{c}_1(x+2)^5 - \frac{1}{12}(x+2)^4 + \frac{1}{6}(x+2)^3 + c_2x + c_3.$$

в) $y'^2 = 16 - yy''$.

Решение: Данное уравнение допускает понижение порядка. Сделаем замену: $y' = p$.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p \Rightarrow p^2 = 16 - y \frac{dp}{dy} p \Rightarrow yp \frac{dp}{dy} = 16 - p^2 \Rightarrow$$

$$\frac{pdp}{16 - p^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{pdp}{16 - p^2} = \int \frac{dy}{y}.$$

$$\int \frac{pdp}{16 - p^2} = \left| \frac{16 - p^2 = t}{dt = -2pdp} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln|t| = \ln \frac{1}{\sqrt{16 - p^2}}.$$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y \Rightarrow \ln y + \ln c_1 = \ln \frac{1}{\sqrt{16 - p^2}} \Rightarrow \ln(y \cdot c_1) = \ln \frac{1}{\sqrt{16 - p^2}} \Rightarrow cy = \frac{1}{\sqrt{16 - p^2}}$$

$$\Rightarrow c_1^2 y^2 = \frac{1}{16 - p^2} \Rightarrow 16 - p^2 = \frac{1}{c_1^2 y^2} \Rightarrow p^2 = 16 - \frac{1}{c_1^2 y^2} = \frac{16c_1^2 y^2 - 1}{c_1^2 y^2} \Rightarrow p = \pm \frac{\sqrt{16c_1^2 y^2 - 1}}{c_1 \cdot y}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sqrt{16c_1^2 y^2 - 1}}{c_1 \cdot y} \quad \text{и} \quad y' = -\frac{\sqrt{16c_1^2 y^2 - 1}}{c_1 \cdot y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{16c_1^2 y^2 - 1}}{c_1 \cdot y} \Rightarrow \frac{c_1 \cdot y dy}{\sqrt{16c_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx \Rightarrow \int \frac{c_1 y dy}{\sqrt{16c_1^2 y^2 - 1}} = \pm \int dx$$

$$\int \frac{c_1 y dy}{\sqrt{16c_1^2 y^2 - 1}} = \left| \frac{16c_1^2 y^2 - 1 = t}{dt = 32c_1 y dy} \right| = \int \frac{\frac{1}{32} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{32} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{32} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_2 = \frac{1}{16} \sqrt{16c_1^2 y^2 - 1} + c_2.$$

Таким образом: $\pm x = \frac{1}{16} \sqrt{16c_1^2 y^2 - 1} + c_2$.

Задача 2.

Найдите частное решение дифференциального уравнения

а) $y''' = \sin^2 x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Решение: Последовательно проинтегрируем данное уравнение:

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} \Rightarrow d(y'') = \sin^2 x dx$$

$$\Rightarrow y'' = \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + c_1.$$

$$y'' = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c_1.$$

Найдем c_1 :

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} + c_1 \cdot 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{2} + c_1 \Rightarrow c_1 = 0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = -\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом: $y'' = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{\pi}{4}$.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} \Rightarrow d(y') = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\pi}{4} \right) dx \Rightarrow y' = \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\pi}{4} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{4} \int \sin 2x dx - \frac{\pi}{4} \int dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (-\cos 2x) - \frac{\pi}{4} x + c_2.$$

Найдем c_2 :

$$y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{2} + c_2 \Rightarrow c_2 = -1 - \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} \cos \pi + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{\pi}{4} x + \frac{\pi^2}{16} - \frac{7}{8}.$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = \left(\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{\pi}{4} x + \frac{\pi^2}{16} - \frac{7}{8} \right) dx.$$

$$\Rightarrow y = \int \left(\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{\pi}{4} x + \frac{\pi^2}{16} - \frac{7}{8} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{\pi^2}{16} \cdot x - \frac{7}{8} x + c_3$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{\pi}{8} x^2 + \frac{\pi^2}{16} x - \frac{7}{8} x + c_3.$$

Найдем c_3 :

$$y \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 + \frac{1}{16} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi}{2} + c_3$$

$$\Rightarrow c_3 = 2 - \frac{\pi^3}{96} - \frac{1}{16} \sin \pi + \frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi^3}{32} + \frac{7\pi}{16} = 2 - \frac{\pi^3}{96} + \frac{7}{16} \pi.$$

Таким образом получим частное решение:

$$y = \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{\pi}{8} x^2 + \frac{\pi}{16} x - \frac{7}{8} x + 2 - \frac{1}{96} \pi^3 + \frac{7}{16} \pi.$$

б) $yy'' + y'^2 = 5, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 2.$

Решение:

Сделаем замену $y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$

$$\Rightarrow yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 5 \Rightarrow yp \frac{dp}{dy} = 5 - p^2$$

$$\Rightarrow \frac{p dp}{5 - p^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{p dp}{5 - p^2} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \ln|y|$$

$$\int \frac{p dp}{5 - p^2} = -\frac{1}{2} \ln|5 - p^2| + c'_2 \Rightarrow \ln y + \ln c_1 = -\frac{1}{2} \ln|5 - p^2|$$

$$\ln|y \cdot c_1| = \ln \frac{1}{\sqrt{5 - p^2}} \Rightarrow c_1 y = \frac{1}{\sqrt{5 - p^2}} \Rightarrow c_1^2 y^2 = \frac{1}{5 - p^2} \Rightarrow$$

$$5 - p^2 = \frac{1}{c_1^2 y^2} \Rightarrow p^2 = 5 - \frac{1}{c_1^2 y^2} \Rightarrow y'^2 = 5 - \frac{1}{c_1^2 y^2}.$$

Найдём c_1 : $2^2 = 5 - \frac{1}{c_1^2 1^2} \Rightarrow c_1^2 = 1 \Rightarrow c_1 = \pm 1$

$$\Rightarrow y'^2 = 5 - \frac{1}{y^2} = \frac{5y^2 - 1}{y^2} \Rightarrow y' = \pm \sqrt{\frac{5y^2 - 1}{y^2}} \Rightarrow y' = \pm \sqrt{\frac{5y^2 - 1}{y^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{5y^2 - 1}}{y} \Rightarrow$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{5y^2 - 1}} = \pm dx \Rightarrow \int \frac{ydy}{\sqrt{5y^2 - 1}} = \pm \int dx.$$

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{5y^2 - 1}} = \left| \frac{5y^2 - 1 = t}{10ydy = dt} \right| = \int \frac{\frac{1}{10} dt}{\sqrt{t}} = 0,1 \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 0,1 \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_2 = 0,2\sqrt{t} + c_2 = 0,2\sqrt{5y^2 - 1} + c_2.$$

$$\text{Т.о. } \pm x = 0,2\sqrt{5y^2 - 1} + c_2.$$

$$\text{Найдём } c_2: x = 0,2\sqrt{5y^2 - 1} + c_2$$

$$-x = 0,2\sqrt{5y^2 - 1} + \tilde{c}_2.$$

$$\Rightarrow 3 = 0,2\sqrt{5 \cdot 1 - 1} + c_2 \Rightarrow c_2 = 2,6 \Rightarrow x = 0,2\sqrt{5y^2 - 1} + 2,6$$

$$-3 = 0,2\sqrt{5 \cdot 1 - 1} + \tilde{c}_2 \Rightarrow \tilde{c}_2 = -3,4 \Rightarrow -x = 0,2\sqrt{5y^2 - 1} - 3,4.$$

$$\text{в) } xy''' - y'' \ln y'' = 0 \quad y(1) = 3e^2, y'(1) = y''(1) = e^2.$$

$$\text{Решение: Сделаем замену } y'' = p \Rightarrow y''' = p' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot p' - p \ln p = 0 \Leftrightarrow x \frac{dp}{dx} = p \ln p \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{p \ln p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dp}{p \ln p} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\int \frac{dp}{p \ln p} = \left| \frac{\ln p = t}{\frac{dp}{p} = dt} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c'_1 = \ln|\ln p|.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \Rightarrow \ln|x| + \ln c_1 = \ln|\ln p| \Rightarrow \ln c_1 x = \ln|\ln p| \Rightarrow$$

$$c_1 x = \ln p \Rightarrow p = e^{c_1 x} \Rightarrow y'' = e^{c_1 x}$$

$$\text{Найдём } c_1: y''(1) = e^{c_1 \cdot 1} \Rightarrow e^2 = e^{c_1} \Rightarrow c_1 = 2$$

$$y'' = e^{2x} \Rightarrow y' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c_2.$$

$$\text{Найдём } c_2: y'(1) = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 1} + c_2 \Rightarrow e^2 = \frac{1}{2} e^2 + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} e^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^2 \Rightarrow$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^2 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{2} e^2 x + c_3.$$

$$\text{Найдём } c_3: y(1) = \frac{1}{4} e^{2 \cdot 1} + \frac{1}{2} e^2 \cdot 1 + c_3 \Rightarrow$$

$$3e^2 = \frac{3}{4} e^2 + c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{9}{4} e^2.$$

$$\text{Т.о. } y = \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{e^2}{2} x + \frac{9e^2}{4} - \text{частное решение.}$$

Задача 3.

Найдите общее решение уравнения:

а) $y'' - y' - 2y = 0$.

Решение:

Это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - k - 2 = 0$$

Решая это квадратное уравнение, находим его корни

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -1.$$

Корни характеристического уравнения - вещественные, различные числа, тогда линейно-независимые решения:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-x}.$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

б) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Решение:

Составим характеристическое уравнение:

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0$$

$$(k + 1)^3 = 0$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = -1.$$

Корни характеристического уравнения - вещественные, равные между собой числа. Следовательно, частные решения:

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = x \cdot e^{-x}, \quad y_3 = x^2 \cdot e^{-x}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x} + C_3 \cdot x^2 e^{-x}.$$

в) $y'' + 9y = 0$.

Решение:

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 9 = 0$$

$$k^2 = -9$$

$$k_1 = 0 + 3i, \quad k_2 = 0 - 3i.$$

Корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа. Следовательно, частные решения:

$$y_1 = e^{0x} \cos 3x, \quad y_2 = e^{0x} \sin 3x.$$

Общее решение имеет вид:

$$y = e^{0x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Задача 4.

Найдите частное решение уравнения:

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$$

Решение:

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

Решая это квадратное уравнение, находим его корни

$$k_1 = k_2 = 2. \text{ Следовательно, общее решение имеет вид:}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Теперь остается по заданным начальным условиям определить произвольные постоянные C_1 и C_2 . Для этого продифференцируем общее решение уравнения:

$$y' = 2C_1e^{2x} + C_2e^{2x} + 2C_2xe^{2x}$$

Подставив начальные условия, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + 0 \cdot C_2 = 3 \\ 2C_1 + C_2 + 2C_2 \cdot 0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -7 \end{cases}.$$

Частное решение уравнения: $y = 3e^{2x} - 7xe^{2x}$.

Задача 5.

Решите дифференциальное уравнение:

а) $y'' + 4y' - 12y = 12x^2$.

Решение: Это неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами, у которого правая часть - **многочлен**.

Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y' - 12y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение: $k^2 + 4k - 12 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим его корни $k_1 = 2$, $k_2 = -6$, тогда $y_{одн} = C_1e^{2x} + C_2e^{-6x}$.

Определим вид частного решения. Вспомогательное число правой части $K=0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будем искать в виде: $y_{\text{ч}} = Ax^2 + Bx + C$, т.к. в правой части уравнения находится многочлен второй степени. Найдем неопределенные коэффициенты A , B , C .

$$y'_{\text{ч}} = 2Ax + B$$

$$y''_{\text{ч}} = 2A$$

Подставляем найденные производные в неоднородное уравнение, получаем:

$$2A + 4(2Ax + B) - 12(Ax^2 + Bx + C) = 12x^2$$

$$2A + 8Ax + 4B - 12Ax^2 - 12Bx - 12C = 12x^2$$

$$-12Ax^2 + (8A - 12B)x + 2A + 4B - 12C = 12x^2$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства, получим:

$$\begin{cases} -12A = 12 \\ 8A - 12B = 0 \\ 2A + 4B - 12C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -\frac{2}{3} \\ C = -\frac{7}{18} \end{cases}$$

Следовательно, $y_{\text{ч}} = -x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{7}{18}$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = y_{одн} + y_{\text{ч}} = C_1e^{2x} + C_2e^{-6x} - x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{7}{18}.$$

б) $y'' + 4y' - 12y = 3e^{2x}$.

Решение: Это неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами, у которого правая часть - **показательная функция**. Общее решение однородного уравнения:

$$y_{одн} = C_1e^{2x} + C_2e^{-6x}.$$

Определим вид частного решения. Вспомогательное число правой части $K=2$ является корнем характеристического уравнения кратности $\gamma=1$, поэтому частное решение данного неоднородного уравнения ищем в виде: $y_{\text{ч}} = Axe^{2x}$. Найдем A :

$$y'_{\text{ч}} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$$

$$y''_{\text{ч}} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} = e^{2x}(4Ax + 4A).$$

Подставляем найденные производные в неоднородное уравнение:

$$e^{2x}(4Ax + 4A) + 4e^{2x}(2Ax + A) - 12Axe^{2x} = 3e^{2x}$$

Поделим обе части на e^{2x}

$$x(4A + 8A - 12A) + 4A + 4A = 3$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства,

получим: $A = \frac{3}{8}$.

Следовательно, $y_{\text{ч}} = \frac{3}{8}xe^{2x}$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}} = C_1e^{2x} + C_2e^{-6x} + \frac{3}{8}xe^{2x}.$$

в) $y'' + 4y' - 12y = (3x + 4)e^x$.

Решение: Это неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами, у которого правая часть-

произведение многочлена на показательную функцию.

Общее решение однородного уравнения: $y_{\text{одн}} = C_1e^{2x} + C_2e^{-6x}$.

Определим вид частного решения. Вспомогательное число правой части $K=1$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в

виде: $y_{\text{ч}} = (Ax + B)e^x$.

$$y'_{\text{ч}} = Ae^x + (Ax + B)e^x$$

$$y''_{\text{ч}} = Ae^x + Ae^x + (Ax + B)e^x = e^x(Ax + 2A + B).$$

Находим A и B , подставляем найденные производные в неоднородное уравнение:

$$e^x(Ax + 2A + B) + 4e^x(Ax + A + B) - 12e^x(Ax + B) = (3x + 4)e^x$$

Сократим обе части на e^x , получим:

$$-7Ax + 6A - 7B = 3x + 4$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства, получим:

$$\begin{cases} -7A = 3 \\ 6A - 7B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{7} \\ B = -\frac{46}{49} \end{cases}$$

Следовательно, $y_{\text{ч}} = \left(-\frac{3}{7}x - \frac{46}{49}\right)e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}} = C_1e^{2x} + C_2e^{-6x} + \left(-\frac{3}{7}x - \frac{46}{49}\right)e^x.$$

г) $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$.

Решение: Это неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами, у которого правая часть-

$$f(x) = P_m(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x.$$

Общее решение однородного уравнения: $y_{\text{одн}} = C_1e^{2x} + C_2e^{-6x}$.

Определим вид частного решения. Вспомогательное число правой части $K=0 \pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде: $y_{\text{ч}} = A\cos 2x + B\sin 2x$.

$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Подставляем найденные производные в неоднородное уравнение и находим A и B:

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 8A \sin 2x + 8B \cos 2x - 12A \cos 2x - 12B \sin 2x = 0 \cos 2x + 8 \sin 2x.$$

Так как функции $\cos 2x$ и $\sin 2x$ линейно-независимы, то коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ должны равняться 0

$$\cos 2x(-4A + 8B - 12A) + \sin 2x(-4B - 8A - 12B - 8) = 0$$

$$\begin{cases} -16A + 8B = 0 \\ -16B - 8A - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -0,2 \\ B = -0,4 \end{cases}$$

Следовательно, $y_{\text{ч}} = -0,2 \cos 2x - 0,4 \sin 2x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-6x} - 0,2 \cos 2x - 0,4 \sin 2x.$$

Задача 6.

Найдите частное решение уравнения:

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = \frac{1}{27}.$$

Решение:

Корни характеристического уравнения $k^2 - 6k + 9 = 0$

будут: $k_1 = k_2 = 3$.

Общим решением однородного уравнения будет: $y_{\text{одн}} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

В правой части находится многочлен второй степени, вспомогательное число правой части $K=0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде:

$$y_{\text{ч}} = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y'_{\text{ч}} = 2Ax + B$$

$$y''_{\text{ч}} = 2A$$

Подставляем найденные производные в неоднородное уравнение:

$$2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = x^2 - x + 3.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , находим A, B, C .

$$\begin{cases} 9A = 1 \\ -12A + 9B = -1 \\ 2A - 6B + 9C = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{9} \\ B = \frac{1}{27} \\ C = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Следовательно, $y_{\text{ч}} = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{27}x + \frac{1}{3}$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{27}x + \frac{1}{3}.$$

Чтобы найти C_1 и C_2 надо взять производную от общего решения неоднородного уравнения:

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3xC_2 e^{3x} + \frac{2}{9}x + \frac{1}{27}.$$

Подставляя начальные условия, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ 3C_1 + C_2 + \frac{1}{27} = \frac{1}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -3 \end{cases}$$

Частное решение уравнения будет иметь вид:

$$y = e^{3x} - 3xe^{3x} + \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{27}x + \frac{1}{3}.$$

Задача 7.

Решите уравнение: $y'' + y = 4\operatorname{ctg}x$.

Решение: Так как правая часть $f(x)$ имеет не специальный вид, то применим метод вариации произвольных постоянных. Ищем частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в виде $y_{\text{ч}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, где y_1 и y_2 частные решения однородного уравнения, $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - функции, которые могут быть найдены из решения системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения, для этого составим характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$, его корни будут $k_1 = 0 + i$, $k_2 = 0 - i$, следовательно, $y_{\text{одн}} = C_1y_1 + C_2y_2$, где $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ - решения однородного уравнения.

$y_1' = -\sin x$, $y_2' = \cos x$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = 4\operatorname{ctg}x \end{cases} \quad \text{Это система линейных уравнений}$$

относительно C_1' и C_2' .

Найдем C_1' и C_2' :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 4\operatorname{ctg}x & \cos x \end{vmatrix} = -4\cos x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 4\operatorname{ctg}x \end{vmatrix} = \frac{4\cos^2 x}{\sin x}$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -4\cos x, \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4\cos^2 x}{\sin x}$$

$$C_1 = \int C_1' dx = \int -4\cos x dx = -4\sin x + \tilde{C}_1$$

$$C_2 = \int C_2' dx = \int \frac{4\cos^2 x}{\sin x} dx = 4 \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} dx = 4 \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x + \tilde{C}_2 \right) \quad \text{Подставив найденные}$$

$$\begin{aligned} \text{функции } C_1 \text{ и } C_2, \text{ получим общее решение: } y &= (-4\sin x + \tilde{C}_1) \cdot \cos x + \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x + \tilde{C}_2 \right) 4\sin x = \\ &= \tilde{C}_1 \cdot \cos x + 4\tilde{C}_2 \sin x + 4\sin x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|. \end{aligned}$$

Задача 8.

Найдите частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \text{ удовлетворяющее начальным условиям}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Решение: Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{одн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \text{ где } y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x.$$

Так как правая часть имеет не специальный вид, то применим метод вариации произвольных постоянных.

$y'_1 = -\sin x, \quad y'_2 = \cos x$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C'_1 \cos x + C'_2 \sin x = 0 \\ -C'_1 \sin x + C'_2 \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Чтобы найти C'_1 и C'_2 , найдем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C'_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad C'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$$

$$C_1 = \int C'_1 dx = \int -\frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + \tilde{C}_1$$

$$C_2 = \int C'_2 dx = \int 1 dx = x + \tilde{C}_2$$

Подставив найденные функции C_1 и C_2 , получим общее

$$\begin{aligned} \text{решение: } y &= (\ln|\cos x| + \tilde{C}_1) \cos x + (x + \tilde{C}_2) \sin x = \\ &= \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + \sin x \end{aligned}$$

Чтобы найти $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ возьмем производную от общего решения уравнения:

$$y' = \left(-\frac{\sin x}{\cos x} \right) \cos x - (\ln|\cos x| + \tilde{C}_1) \sin x + \sin x + (x + \tilde{C}_2) \cos x$$

Подставляя начальные условия, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (0 + \tilde{C}_1) \cdot 1 + (0 + \tilde{C}_2) \cdot 0 = 1 \\ (0 + \tilde{C}_1) \cdot 0 + (0 + \tilde{C}_2) \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{C}_1 = 1 \\ \tilde{C}_2 = 0 \end{cases}$$

Искомое частное решение:

$$y = (\ln|\cos x| + 1) \cdot \cos x + x \cdot \sin x.$$

Задача 9.

$$\text{Решите уравнение: } y'' - 4y = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Решение: Найдем общее решение однородного уравнения, для этого составим характеристическое уравнение $k^2 - 4 = 0$, его корни $k_1 = 2, \quad k_2 = -2$. Следовательно, $y_{одн} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где

$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-2x}$. Правая часть имеет не специальный вид. Применим метод вариации произвольных постоянных. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C'_1 e^{2x} + C'_2 e^{-2x} = 0 \\ 2C'_1 e^{2x} - 2C'_2 e^{-2x} = \frac{e^x}{e^x + 1} \end{cases} \quad \text{Найдем } C'_1 \text{ и } C'_2.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-x}}{e^x + 1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = \frac{e^{3x}}{e^x + 1}$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{4e^x(e^x + 1)}, \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{e^{3x}}{4(e^x + 1)}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \int C_1' dx = \int \frac{dx}{4e^x(e^x + 1)} = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ dx = \frac{dt}{t} \end{matrix} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2(t+1)} = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right) dt = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{4} \cdot \ln t + \frac{1}{4} \cdot \ln|t+1| + \tilde{C}_1 = \\ &= -\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^x + 1}{e^x} \right| + \tilde{C}_1 = -\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4} \ln|1 + e^{-x}| + \tilde{C}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \int C_2' dx = \int -\frac{e^{3x} dx}{4(e^x + 1)} = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = -\frac{1}{4} \int \frac{t^2 dt}{t+1} = \\ &= -\frac{1}{4} \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = -\frac{1}{4} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4} \cdot t - \frac{1}{4} \ln|t+1| + \tilde{C}_2 = \\ &= -\frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4} \ln|e^x + 1| + \tilde{C}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{4} \ln|1 + e^{-x}| - \frac{1}{4}e^{-x} + \tilde{C}_1 \right) \cdot e^{2x} + \left(\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4} \ln|e^x + 1| + \tilde{C}_2 \right) e^{-2x} \\ &= \tilde{C}_1 e^{2x} + \tilde{C}_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} \cdot e^{2x} \ln|1 + e^{-x}| - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2x} \ln|e^x + 1|. \end{aligned}$$

Упражнения.

Решите дифференциальные уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$:

1. $y''' = \cos^2 x - 8x^2 + 2.$

2. $y''' = (x+1)^3 + e^{5x}.$

3. $y''' = x \cos x.$

4. $y^{(4)} = e^x + \frac{3}{(1+x)^3}.$

5. $y''' \sin^4 x = \sin 2x.$

6. $y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x.$

7. $y'' = \arctg x.$

8. $y''' - x + \frac{3}{x^3} + e^{4x} = 0.$

9. $y''' - xe^{2x} = 0.$

10. $x^4 y''' + x^5 = 4x^2 + 1 + 3x^4 \cos x.$

11. $y'' = 32 \sin^3 x \cos x.$

$$12. y^{(5)} = x^2 - e^{4x}.$$

$$13. y''' = x \cos x.$$

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

$$14. y''' = x \ln x \quad y(1) = 1, y'(1) = 2, y''(1) = 3.$$

$$15. y''' = x e^{-x} \quad y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 2.$$

$$16. y''' = 2^x (7 - x) \quad y(0) = \ln^2 2, y'(0) = \ln^2 2, y''(0) = 2.$$

$$17. y''' = \sin^2 x - 10x^2 \quad y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0.$$

$$18. y''' = 2x^2 + e^{4x} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2.$$

$$19. y''' = 4x e^{2x} \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$$

Решите дифференциальные уравнения вида $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, не содержащие функции y :

$$1. (1 - x^2) y'' - x y' = 2.$$

$$2. 2x y''' y'' = y''^2 - a^2.$$

$$3. (1 + x^2) y'' + 1 + y'^2 = 0.$$

$$4. x y''' + y'' = 1.$$

$$5. x^2 y'' + x y' = 1.$$

$$6. \operatorname{ctg} 2x \cdot y''' = -2y''.$$

$$7. \operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0.$$

$$8. 2x y''' = y''.$$

$$9. y'' x \ln x = y'.$$

$$10. x^5 y''' + x^4 y'' = 1.$$

$$11. (1 + x^2) y'' + 2x y' = x^3.$$

$$12. (7x + 1) y''' - y'' = 0.$$

$$13. \cos 3x y'' = y'.$$

$$14. y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

$$15. x y'' = y' \ln \left(\frac{y'}{x} \right).$$

$$16. x y'' - y' = e^x x^2.$$

$$17. x y^{(4)} - y''' = 0.$$

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

$$18. y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1) \quad y(2) = 1, y'(2) = -1.$$

$$19. y'''(x-1) - y'' = 0 \quad y(2) = 2, y'(2) = 1, y''(2) = 1.$$

Решите дифференциальные уравнения вида $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, не содержащие независимой переменной:

1. $y''(2y+3) - 2y'^2 = 0$.
2. $4y^3 y'' = y^4 - 1$.
3. $y'' = 128y^3$.
4. $a^2 y''^2 = 1 + y'^2$.
5. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.
6. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$.
7. $4y'' \cdot y^3 = 16y^4 - 1$.
8. $y''(1+y) = y'^2 + y'$.
9. $2yy'' + y''^2 + y'^4 = 0$.
10. $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$.
11. $(1+y)y'' - 5y'^2 = 0$.
12. $yy'' = y^2 y' + y'^2$.
13. $y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0$.
14. $y'' = ae^y$.
15. $y''(1+yy') = y'(1+y'^2)$.

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

16. $yy'' - y'^2 = 0$ $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
17. $y''y^3 + 64 = 0$ $y(0) = 4, y'(0) = 2$.
18. $y'' = 32 \sin^3 y \cos y$ $y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 4$.
19. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$ $y(0) = \frac{\pi}{4}, y'(0) = 2$.
20. $yy'' + y'^2 = y'^3$ $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - y' - 2y = 0$.
2. $y'' + 25y = 0$.
3. $y'' - y' = 0$.
4. $2y'' + 5y' + 2y = 0$.
5. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.
6. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$.
7. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
8. $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$.
9. $y'' + 4y' + 5y = 0$.

10. $y'' - 6y' + 34y = 0$.
11. $y''' - 2y'' - 4y' + 8 = 0$.
12. $y'' + 5y' + 10y = 0$.
13. $2y'' - 3y' + 8y = 0$

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

14. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.
15. $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
16. $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\pi/6}$.
17. $9y'' + y = 0$, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$, $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.
18. $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
19. $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида:

1. $y'' - y' = e^{2x} \cos x$.
2. $y'' - 2y = 4x^3 e^{x^2}$.
3. $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$.
4. $y'' - y' - 6y = 6xe^{3x}$.
5. $y'' + 3y' - 4y = (x^2 + 3)e^x$.
6. $y'' + y' = e^{-x}(2x + 5)$.
7. $15y'' - 11y' + 2y = 2xe^{2x}$.
8. $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$.
9. $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$.
10. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$.
11. $y'' + 9y = 17 \sin x + \cos x$.
12. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$
13. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$
14. $y'' + 9y = 6 \cos 3x$
15. $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}$
16. $y'' + 2y' + 5y = -2 \sin x$.
17. $y'' + y' - 2y = \sin 3x + 2 \cos 3x$.
18. $y'' - 6y' + 25y = 2 \sin x + 3 \cos x$.
19. $y'' + 7y' = 2x^3 - 3x + 7$.
20. $15y'' - 7y' - 2y = x^3 - 4x^2 + 7$.
21. $y'' + 2y' + y = 4x^2 - x + 7$.

22. $y'' + 4y' + 4y = x^3 - 2x^2 + 1$.
 23. $y'' + y = x \cos 2x$.
 24. $y'' - 4y' = x^3 + x - 4$.
 25. $4y'' + 4y' + y = 2x^3 + 3x^2 + x + 5$.
 26. $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x)$.
 27. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$.
 28. $y^{(4)} + y''' = 2$.
 29. $y''' + 4yy'' + 4y' = \cos 2x + \sin 2x$.
 30. $y''' - y' = 2e^x + \cos x$.

31. $y'' + y = 2 \sin x - 6 \cos x + 2e^x$.

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

32. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = \frac{4}{3}$, $y'(0) = \frac{1}{27}$.
 33. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.
 34. $y'' - 4y' + 8y = 61e^{-2x} \sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 4$.
 35. $y'' + 9y = 2 \sin x \sin 2x$, $y(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
 36. $y'' + y = \cos 3x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
 37. $y'' + 4y = \sin 2x$, $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 0$.
 38. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
 39. $y'' + y = 3 \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
 40. $y'' - 6y' + 9y = 16e^{-x} + 9x - 6$, $y(0) = y'(0) = 1$.
 41. $y^{(4)} - y = 8e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.
 42. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, $y(\pi) = \pi \cdot e^\pi$, $y'(\pi) = e^\pi$.
 43. $y'' + y = 3 \sin x$, $y(0) + y'(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью неспециального вида:

1. $y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$.
 2. $y'' + y' = 2 \operatorname{ctgx}$.
 3. $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$.
 4. $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^x}$.

$$5. y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}.$$

$$6. y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

$$7. y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}.$$

$$8. y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x.$$

$$9. y'' + y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}.$$

$$10. y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

$$11. y'' + 4y' + 4y = \frac{\ln x}{e^{2x}}.$$

$$12. y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

$$13. y'' + y = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$14. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$15. y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}.$$

Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

$$16. y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x} \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

$$17. y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

$$18. y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$19. y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 3\ln 2.$$

$$20. y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right), \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = \frac{1}{2}.$$

$$21. y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

$$22. y'' + y = 2 \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

$$23. y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$24. y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$25. y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}, \quad y(0) = 4\ln 4, \quad y'(0) = 3(3\ln 4 - 1).$$

ТЕМА 3. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теоретические вопросы:

Нормальные системы дифференциальных уравнений, метод исключения, метод Лагранжа, метод Даламбера, метод неопределенных коэффициентов.

Задача1. Найти общее решение системы уравнений:
$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Решение: 1 способ. Составим характеристическое уравнение:

Матрица системы $A \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $|A - kE| = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \quad (5-k)(2-k) - 4 = 0; \quad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \quad k_1 = 1; \quad k_2 = 6;$$

Т.о фундаментальная система решений e^{1t} и e^{6t} .

Общее решение имеет вид
$$\begin{cases} x = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{6t} \\ y = \beta_1 e^t + \beta_2 e^{6t} \end{cases}$$

Решим систему уравнений:

Величины α_1 и β_1 , α_2 и β_2 можно найти из системы $(A - kE) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

где k - корни характеристического уравнения

Для k_1 :
$$\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений $\beta_1 = -2\alpha_1$. Возьмем $\alpha_1 = C_1 \Rightarrow \beta_1 = -2C_1$ где C_1 - любое число

Для k_2 :
$$\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Эта система тоже имеет бесконечное множество решений $\alpha_2 = 2\beta_2$. Возьмем $\beta_2 = C_2 \Rightarrow \alpha_2 = 2C_2$ где C_2 - любое число.

Т. о общее решение системы:
$$\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$$

2 способ. Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$;

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Подставим сюда y , выраженное из первого уравнения:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$$

$$x'' - 7x' + 6x = 0$$

$$k_1 = 6; \quad k_2 = 1$$

$$x = Ae^t + Be^{6t}; \quad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$

$$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t};$$

$$y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t};$$

Если обозначим $A = C_1$; $\frac{1}{2}B = C_2$, получаем решение системы:
$$\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$$

Задача 2. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$$

Решение:

Эта система дифференциальных уравнений не относится к рассмотренному выше типу, т.к. не является однородной (в систему уравнений входит независимая переменная x). (2 уравнения и 3 переменных).

Для решения продифференцируем первое уравнение по x .

Получаем: $y'' = y' + z'$.

Заменяя значение z' из второго уравнения системы получаем: $y'' = y' + y + z + x$.

С учетом первого уравнения системы, получаем: $y'' = 2y' + x$. (*)

Решаем полученное дифференциальное уравнение второго порядка.

$$y'' - 2y' = x; \quad y'' - 2y' = 0; \quad k^2 - 2k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2.$$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Кардинальное число правой части $K = 0$, оно есть среди корней характеристического уравнения $\Rightarrow r = 1$.

Теперь находим частное решение неоднородного дифференциального уравнения по формуле $y = e^{0x} \cdot (Ax + B) \cdot x^r$; $y = Ax^2 + Bx$ $\alpha = 0$; $r = 1$; $Q(x) = Ax + B$;

$$y = Ax^2 + Bx; \quad y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A;$$

$$2A - 4Ax - 2B = x; \quad A = -\frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4A = 1 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4}; \quad \text{т. о.} \quad y_{\text{част}} = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$$

Общее решение неоднородного уравнения: $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1)$.

Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получаем:

$$z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1).$$

Задача 3. Найти решение системы уравнений:
$$\begin{cases} y' = z + w \\ z' = 3y + w \\ w' = 3y + z \end{cases}$$

Решение:

Система состоит из 3 уравнений и 3 переменных $|A - kE| = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0; \quad -k \begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-k(k^2 - 1) + 3k + 3 + 3 + 3k = 0; \quad k^3 - 7k - 6 = 0; \quad k_1 = -1; \quad k_2 = -2; \quad k_3 = 3;$$

Фундаментальная система решений e^{-t} , e^{-2t} и e^{3t} .

$$\begin{cases} y = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{-2t} + \alpha_3 e^{3t} \\ z = \beta_1 e^{-t} + \beta_2 e^{-2t} + \beta_3 e^{3t} \\ w = \gamma_1 e^{-t} + \gamma_2 e^{-2t} + \gamma_3 e^{3t} \end{cases}, \text{ где } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ находится из условия } (A - kE) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $k = -1$.
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0; & \alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = -\gamma_1; \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Пусть $\gamma_1 = C_1 \Rightarrow \beta_1 = -C_1 \quad \alpha_1 = 0$

при $k_2 = -2$.
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0; & \alpha_2 = -\gamma_2; \quad \beta_2 = \gamma_2; \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Пусть $\gamma_2 = C_2 \Rightarrow \beta_2 = C_2$ и $\alpha_2 = -C_2$

при $k_3 = 3$.
$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + \gamma = 0; & \alpha = \frac{2}{3}\gamma; \quad \beta_3 = \gamma_3; \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Пусть $\gamma_3 = 3C_3 \Rightarrow \beta_3 = 3C_2 \Rightarrow \alpha_3 = 2C_3$

Общее решение
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -C_2 & 2C_3 \\ C_1 & C_2 & 3C_3 \\ C_1 & C_3 & 3C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Общее решение имеет вид:
$$\begin{cases} y = -C_2 e^{-2x} + 2C_3 e^{3x} \\ z = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \\ w = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \end{cases}.$$

Задача 4. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1} \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1} \end{cases} \quad (1)$$

Решение:

Перенесем переменные x и y в левую часть

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 4x + 2y = \frac{2}{e^t - 1} \\ \frac{dy}{dt} - 6x - 3y = -\frac{3}{e^t - 1} \end{cases} \quad (2)$$

Решим однородную систему методом исключения

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 4x + 2y = 0 \\ \frac{dy}{dt} - 6x - 3y = 0 \end{cases} \quad \text{выразим } 2y \text{ из первого уравнения}$$

Продифференцируем первое уравнение системы

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -4 \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dy}{dt}$$

Подставим вместо $\frac{dy}{dt}$ второе уравнение системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\frac{dx}{dt} - 2(6x + 3y)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\frac{dx}{dt} - 12x - 6y$$

Теперь вместо y подставим $2y = -\frac{dx}{dt} - 4x$, найденное из первого уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\frac{dx}{dt} - 12x + 3\frac{dx}{dt} + 12x$$

Получим $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0$ или $x'' + x' = 0$. Решаем это однородное уравнение

$$k^2 + k = 0$$

$$k(k + 1) = 0$$

Находим корни, они получаются действительными, различными

$k = 0$ и $k = -1$. Фундаментальная система решений e^{0t} и e^{-1t} .

$$2y = -\frac{dx}{dt} - 4x = C_2 e^{-t} - 4C_1 - 4C_2 e^{-t} = -4C_1 - 3C_2 e^{-t}$$

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-t} \\ y = -2C_1 - \frac{3}{2}C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Теперь применим метод вариации произвольной постоянной будем считать C_1 и C_2 не постоянными, а переменными от t

$$\begin{cases} x = C_1(t) + C_2(t)e^{-t} \\ y = -2C_1(t) - \frac{3}{2}C_2(t)e^{-t} \end{cases} \quad (3)$$

Продифференцировать систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = C_1'(t) + C_2'(t)e^{-t} - C_2(t)e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} = -2C_1'(t) - \frac{3}{2}C_2'(t)e^{-t} + \frac{3}{2}C_2(t)e^{-t} \end{cases} \quad (4)$$

Подставляем значения $x, y, \frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ из систем (3) и (4) в (2)

$$\begin{cases} C_1'(t) + C_2'(t)e^{-t} - C_2'(t)e^{-t} + 4C_1(t) + 4C_2(t)e^{-t} - 4C_1(t) - 3C_2(t)e^{-t} = \frac{2}{e^t - 1} \\ C_1'(t) + C_2'(t)e^{-t} = \frac{2}{e^t - 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2C_1(t) - \frac{3}{2}C_2(t)e^{-t} + \frac{3}{2}C_2(t)e^{-t} - 6C_1(t) - 6C_2(t)e^{-t} + 6C_1(t) + 6C_2(t)e^{-t} + \frac{9}{2}C_2(t)e^{-t} = -\frac{3}{e^t - 1} \\ -2C_1'(t) - \frac{3}{2}C_2'(t)e^{-t} = -\frac{3}{e^t - 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(t) + C_2'(t)e^{-t} = \frac{2}{e^t - 1} \\ -2C_1(t) - \frac{3}{2}C_2(t)e^{-t} = -\frac{3}{e^t - 1} \end{cases}$$

Решаем систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-t} \\ -2 & -\frac{3}{2}e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{-t} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{2}{e^t - 1} & e^{-t} \\ -\frac{3}{e^t - 1} & -\frac{3}{2}e^{-t} \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{e^t - 1} \\ -2 & \frac{3}{e^t - 1} \end{vmatrix} = \frac{1}{e^t - 1}$$

$$\Rightarrow C_1' = 0 \text{ и } C_2' = \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$C_1'(t) = 0 \quad C_1(t) = \tilde{C}_1$$

$$C_2'(t) = \frac{2e^t}{e^t - 1} \quad C_2(t) = 2 \int \frac{e^t dt}{e^t - 1} = 2 \ln|e^t - 1| + \tilde{C}_2$$

$$\begin{cases} x = \tilde{C}_1 + (2 \ln|e^t - 1| + \tilde{C}_2)e^{-t} \\ y = -2\tilde{C}_1 - \frac{3}{2}(2 \ln|e^t - 1| + \tilde{C}_2)e^{-t} \end{cases}$$

Задача 5. Решить систему дифференциальных уравнений методом неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \sin t \\ \frac{dy}{dt} = x + \cos t \end{cases} \quad (1).$$

Решение:

$$\text{Решим систему дифференциальных уравнений} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (2).$$

Продифференцируем 2-ое уравнение, подставим в него 1-ое уравнение получим $\frac{d^2 y}{dt^2} = -y$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} \quad y'' + y = 0$$

$$k^2 + 1 = 0$$

$$k = \pm i$$

Фундаментальная система решений $\sin t$ и $\cos t$, $y = C_1 \sin t + C_2 \cos t$, тогда из (2) системы $x = y' = C_1 \cos t - C_2 \sin t$ из второго уравнения вернемся к системе (1). Продифференцируем и подставим в систему (1).

$$\begin{cases} x_{rp} = (At + B)\cos t + (Ct + D)\sin t \\ y_{rp} = (Lt + K)\cos t + (Qt + R)\sin t \end{cases}$$

$$A\cos t + (At + B)\cos t + C\sin t + (Ct + D)\cos t = -(Lt + K)\cos t - (Qt + R)\sin t + \sin t$$

$$L\cos t - (Lt + K)\sin t + Q\sin t + (Qt + R)\cos t = (At + B)\cos t + (Ct + D)\cos t + \cos t$$

$$\begin{array}{l|l} \cos t & A + D = -K & A = 0 \\ \sin t & -B + C = -R + 1 & B = -1 \\ t \sin t & -A = -Q & C = 0 \\ t \cos t & C = -L & D = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \cos t & L + R = B + 1 & L = 0 \\ \sin t & -K + Q = D & K = 0 \\ t \sin t & -L = C & Q = 0 \\ t \cos t & Q = A & R = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} A + D = -K \\ -B + C = -R + 1 \\ A = Q \\ C = -L \\ L + R = B + 1 \\ -K + Q = D \end{cases} \quad \begin{cases} D = 0 \\ K = 0 \\ R = 0 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{rp} = -\cos t \\ y_{rp} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \cos t \\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t \end{cases}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \begin{cases} x = -C_1 \sin t + (C_2 t) \cos t \\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Решить системы уравнений

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 4y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z \\ \frac{dz}{dx} = -2y + 4z \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy}{du} = x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 3y + 9z, \\ \frac{dy}{du} = -18x + 7y + 18z, \\ \frac{dz}{dt} = 18x - 6y - 17z. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y - 3z, \\ \frac{dy}{du} = -6x + 2y + 6z, \\ \frac{dz}{dt} = 6x - 2y - 6z. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - 3z \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 2z \end{cases}.$$

$$10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy}{du} = x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y + 4z, \\ \frac{dy}{du} = -12x + 5y + 12z, \\ \frac{dz}{dt} = 10x - 3y - 9z. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - z, \\ \frac{dy}{du} = -6x + 2y + z, \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y - 4z. \end{cases}$$

Решить системы уравнений методом Лагранжа

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1} \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t \\ \frac{dy}{dt} + x - y = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t \\ \frac{dy}{dt} = -y - 2x + \cos t + \sin t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t} \end{cases}.$$

Решить системы уравнений методом неопределенных коэффициентов

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y + e^{2t} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \sin t \\ \frac{dy}{dt} = x + \cos t \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - 5\sin t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + y - e^t \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y + 4t - 1 \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + t \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x - y + e^t \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1$$

$$7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = t^2 \\ \frac{dy}{dt} - x = t \end{cases}.$$

Решить системы уравнений методом Даламбера

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y + e^t \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y + 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t \end{cases}.$$

Индивидуальная работа «Дифференциальные уравнения»

Вариант 1

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1.1. 4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$$

$$1.2. 3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$$

$$1.3. y' = \frac{3y^3 + 2x^2y}{x^3 + 2y^2x}.$$

$$1.4. y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$2.2. y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3. y''' = 4xe^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$$

$$2.4. 4y^3y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения: $xy''' + y'' = 1$.

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x.$$

$$4.2. y'' + 9y = 17\sin x + \cos x.$$

$$4.3. y'' - 3y' - 4y = x^2e^{5x}.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1 - \ln 2).$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 2

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $\sqrt{4 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy$.

1.2. $(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0$.

1.3. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

1.4. $y' = \frac{x + y - 2}{2x - 2}$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' - y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

2.2. $xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 0,5$.

2.3. $y''' = (1 + x)e^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

2.4. $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$.

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy''' + y'' = x + 1.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' + y' - 2y = \sin 3x + 2 \cos 3x$.

4.2. $y'' - y' - 6y = 6xe^{3x}$.

4.3. $15y'' - 7y' - 2y = x^3 - 4x^2 + 7$.

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + y = 2 \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}.$$

Вариант 3

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $x\sqrt{3 + y^2} dx + y\sqrt{2 + x^2} dy = 0$.

1.2. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right) dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$.

$$1.3. \quad xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$1.4. \quad y' = \frac{3y - x - 4}{3x + 3}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. \quad y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

$$2.2. \quad y' + 4x^3y = 4(1 + x^3)e^{-4x}y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3. \quad y''' = \sin^2 x - 10x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0.$$

$$2.4. \quad y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$x^3y''' + x^2y'' = 1.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. \quad y'' - 6y' + 9y = 4xe^{3x}.$$

$$4.2. \quad y'' - 9y = -30\sin 3x + 6\cos 3x.$$

$$4.3. \quad y'' - y' - y = 4x^2 + 3x.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

№ 6. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 4

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1.1. \quad ye^{2x}dx + (e^{2x} + 5)dy = 0.$$

$$1.2. \quad \left(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x} \right) dx + (2xy + \operatorname{tg} x) dy = 0.$$

$$1.3. \quad xy' = \frac{3y^3 + 6x^2y}{2y^2 + 3x^2}.$$

$$1.4. \quad y' = \frac{2y - 2}{x + y - 2}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. \quad y' + \frac{2xy}{1 + x^2} = \frac{2x^2}{1 + x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$2.2. \quad xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, \quad y(1) = 1.$$

$$2.3. \quad y''' = (1 + x)^3 + e^{5x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2.$$

$$2.4. \quad y'' = 32\sin^3 y \cos y, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 4.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения: $\operatorname{ctg} 2x \cdot y''' = -2y''$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' + 2y' + y = 4x^2 - x + 7$.

4.2. $y'' + 9y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

4.3. $y'' - 3y' + 2y = -4xe^{7x}$.

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 5

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $x\sqrt{5+y^2}dx - y\sqrt{4+x^2}dy = 0$.

1.2. $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$.

1.3. $3x^2y' = 4x^2 + 8xy + y^2$.

1.4. $y' = \frac{2y-2}{x+y-2}$.

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1$.

2.2. $2y' + 2xy = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 2$.

2.3. $y''' = x^2 - e^{4x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$.

2.4. $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7$.

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' + 3y' - 4y = (x^2 + 3)e^x$.

4.2. $2y'' - 4y' = 3\sin 2x + \cos 2x$.

4.3. $y'' + 5y' + 6y = 5x^2 - 2x + 1$.

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 6

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $y'y \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.

$$1.2. (\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)dy = 0.$$

$$1.3. 2x^2 y' = y^2 + 6xy + 3x^2.$$

$$1.4. y' = \frac{2x+y-3}{x-1}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 1,5.$$

$$2.2. 2y' + y \cos x = \frac{1}{y} \cos x (1 + \sin x), \quad y(0) = 1.$$

$$2.3. y''' = x \cos x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0.$$

$$2.4. 4y'' \cdot y^3 = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. y'' - y = 4e^{-x}.$$

$$4.2. y'' + y' = \sin 2x - 5 \cos 2x.$$

$$4.3. y'' + 3y' - 4y = 6x^2 - 7x.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 3 \ln 3, \quad y'(0) = 5 \ln 3.$$

$$\text{№6 Решить систему дифференциальных уравнений: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}.$$

Вариант 7

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1.1. \sqrt{3+y^2} dx - y dy = x^2 y dy.$$

$$1.2. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx - \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0.$$

$$1.3. y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$$

$$1.4. y' = \frac{x+7y-8}{9x-y-8}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$2.2. 3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3.$$

$$2.3. y''' = x - \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y''(0) = 1.$$

$$2.4. y'' y^3 + 49 = 0, \quad y(3) = -7, \quad y'(3) = -1.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. \quad y'' + y' = 5x^2 - 7x + 1.$$

$$4.2. \quad y'' + 2y' + 5y = -2 \sin x.$$

$$4.3. \quad y'' + 16y = (4x + 9)e^{2x}.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

$$\text{№6 Решить систему дифференциальных уравнений: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 8

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1.1. \quad (e^x + 8)dy - ye^x dx = 0.$$

$$1.2. \quad \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0.$$

$$1.3. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + 4 \frac{y}{x} + 2.$$

$$1.4. \quad y' = \frac{x + 3y}{3x - 6} = 4.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. \quad y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$$

$$2.2. \quad 3y' + 2xy = \frac{2x}{y^2 e^{-2x^2}}, \quad y(0) = -1.$$

$$2.3. \quad y^{(4)} = e^x + \frac{3}{(1+x)^3}, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = y'''(0) = 1.$$

$$2.4. \quad y'' = 72y^3, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$y'' x \ln x = y'.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. \quad 12y'' + y' = 4x^2 - 2x + 1.$$

$$4.2. \quad y'' + 10y' + 25y = \cos x.$$

$$4.3. \quad y'' + y = (x - 7)e^{2x}.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$\text{№6 Решить систему дифференциальных уравнений: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 9

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $\sqrt{4-x^2} y' + xy^2 + x = 0$.

1.2. $\frac{1+xy}{x^2y} dx + \frac{1-xy}{xy^2} dy = 0$.

1.3. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2yx}$.

1.4. $y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}$.

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1$.

2.2. $3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3$.

2.3. $y''' = 8x^4 - \sin^2 x, \quad y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = 0$.

2.4. $y'' = 50y^3, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 5$.

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$x^5 y''' + x^4 y'' = 1.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $15y'' - 11y' + 2y = 2xe^{2x}$.

4.2. $y'' - 8y' + 20y = 5x^2 - 7x$.

4.3. $y'' + 25y = \sin 5x + \cos 5x$.

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 10 - \ln 3.$$

№ 6. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 10

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $2xdx - ydy = x^2 y dy - xy^2 dx$.

1.2. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$.

1.3. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

1.4. $y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}$.

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' + \frac{2y}{x} = x^3, \quad y(1) = -\frac{5}{6}$.

2.2. $3xy' + 5y = (4x-5)y^4, \quad y(1) = 1$.

2.3. $y''' = 2xe^{2x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$.

2.4. $y''y^3 + 49 = 0, \quad y(4) = 7, \quad y'(4) = -1.$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(7x+1)y''' - y'' = 0.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' - 3y' - 10y = (x+2)e^{-2x}.$

4.2. $y'' + 8y' + 25y = 3x^2 - x.$

4.3. $y'' + 16y' = -24\sin 4x.$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 11

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $y(4+e^x)dy - e^x dx = 0.$

1.2. $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{dy}{x} = 0.$

1.3. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$

1.4. $y' = \frac{x - 2y + 3}{-2x - 2}.$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' - \frac{2x+5}{x^2}y = 5, \quad y(2) = 4.$

2.2. $y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = 0,5.$

2.3. $y'' = 2x \cos x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$

2.4. $y'' = 18\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 3.$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$x y''' + 2y'' = 0.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $4y'' - 4y' + y = 3xe^x.$

4.2. $y'' + y = 8\cos 2x.$

4.3. $y'' - 3y' = (8-x)e^{3x}.$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1+e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 6\ln 2.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 12

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0.$

1.2. $\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right)dy + \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx = 0.$

1.3. $2x^2y' = y^2 + 8xy + 8x^2.$

1.4. $y' = \frac{x+8y-9}{10x-y-9}.$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x, \quad y(1) = e.$

2.2. $2xy' - 3y = -y^3(5x^2 + 3), \quad y(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

2.3. $y'' = (1+x)\ln x + 4, \quad y(1) = 3, y'(1) = 4.$

2.4. $4y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$x \cdot y''' + y'' + x = 0.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' - 4y' = x^3 + x - 4.$

4.2. $y'' + 4y = 2e^x.$

4.3. $y'' - 7y' + 10y = \sin 7x + 2\cos 7x.$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 13

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx.$

1.2. $\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x\cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3\right)dy = 0.$

1.3. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

1.4. $y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}.$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

2.2. $y' + 2xy = 2x^3 y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}.$

2.3. $y''' = \sin^2 2x + 5x^2, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 1, y'(\frac{\pi}{4}) = 1, y''(\frac{\pi}{4}) = 0.$

2.4. $y'' = 8y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$x^2 \cdot y'' + xy' = 1.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' - 8y' + 25y = xe^{2x}.$

4.2. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 4)e^x.$

4.3. $y'' + 2y' + 2y = \sin x - 3\cos x.$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2 + e^x}, \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = \ln 9 - 1.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 14

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $y \ln y + xy' = 0.$

1.2. $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x \right) dx - \frac{xdy}{x^2 + y^2} dy = 0.$

1.3. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$

1.4. $y' = \frac{4y - 8}{3x + 2y - 7}.$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1.$

2.2. $xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 3.$

2.3. $y''' = x^2 - \cos x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 5, y''(0) = -2.$

2.4. $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(1 - x^2) \cdot y'' = xy'.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' + y = 2 \cos 3x - 3 \sin 3x.$

4.2. $y'' - 2y' + y = (x - 2)e^x.$

4.3. $y'' - 12y' + 36y = x^3 - 2x^2 + 1.$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}.$$

Вариант 15

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $(1 + e^x)y' = ye^x$.

1.2. $e^y dx + (\cos y + xe^y) dy = 0$.

1.3. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$.

1.4. $y' = \frac{x + 3y - 4}{5x - y - 4}$.

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1$.

2.2. $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(e) = 2$.

2.3. $y''' = 2x + e^{2x} + 4\sin 7x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y''(0) = 1$.

2.4. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy''' + 4y'' = 0.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' + 6y' + 10y = 4x^2 - 11x + 8$.

4.2. $y'' + 7y' = \cos 2x - 4\sin 2x$.

4.3. $y'' + 4y' = (x - 1)e^{-4x}$.

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3, \quad y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\pi.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}.$$

Вариант 16

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $\sqrt{1 - x^2} y' + xy^2 + x = 0$.

1.2. $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$.

1.3. $y' - 12 = \frac{y^2 + 8xy}{x^2}$.

$$1.4. y' = \frac{y - 2x + 3}{x - 1}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$$

$$2.2. y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3. y^{(4)} = e^x + \frac{3}{(1+x)^3}, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = y'''(0) = 1.$$

$$2.4. y''(1+y) - 5(y')^2 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 32.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. y'' - 3y' + 2y = (-4x - 3)e^x.$$

$$4.2. y'' - 2y' - 3y = \cos 2x - 3\sin 2x.$$

$$4.3. y'' + 6y' = x^2 + 5.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' - 3y' = \frac{9}{1 + 3e^{3x}}, \quad y(0) = 8\ln 2, \quad y'(0) = 9\ln 4 - 3.$$

№ 6. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}.$$

Вариант 17

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1.1. y(1 + \ln y) + xy' = 0.$$

$$1.2. (x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$$

$$1.3. 4y' = \frac{y^2 + 5x^2}{x^2} + \frac{10y}{x}.$$

$$1.4. y' = \frac{x + 2y - 3}{x - 1}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$2.2. 2y' - 3y \cos x = \frac{-(2 + 3\cos x)}{e^{2x}y}, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3. y''' - xe^{2x} = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = y''(0) = 1.$$

$$2.4. 1 + (y')^2 + yy'' = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy''' + 2y'' = x^3.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. y'' - 6y' + 9y = 3xe^{5x}.$$

$$4.2. y'' + 9y = 4\sin 3x.$$

4.3. $y'' - 6y' + 13y = 2x^2 - x + 2$.

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 4y = \frac{-14}{\sin 2x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y \end{cases}.$$

Вариант 18

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} yy' = 0$.

1.2. $(\cos(x+y^2) + \sin x)dx + 2y \cos(x+y^2)dy = 0$.

1.3. $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$.

1.4. $y' = \frac{3x + 2y - 1}{x + 1}$.

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}$.

2.2. $y' + xy = (x-1)e^x y^2, \quad y(0) = 1$.

2.3. $y''' = (1+x)e^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

2.4. $y''' + \frac{2}{x^2} + \cos 4x = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = y''(\pi) = 0$.

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$x^4 y'' + x^3 y' = 4.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' + 2y' = 2y = \sin 2x - \cos 2x$.

4.2. $y'' - 16y' + 64y = x^3 - 5x + 2$.

4.3. $15y'' + y' = 3xe^{\frac{x}{15}}$.

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 4y \end{cases}.$$

Вариант 19

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $(3+e^x)yy' = e^x$.

1.2. $(5xy^2 - x^3)dx - (y - 5x^2y)dy = 0$.

1.3. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$.

$$1.4. y' = \frac{5y+5}{4x+y-1}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2, \quad y(0) = 1.$$

$$2.2. 2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2.$$

$$2.3. y''' = (x+4)\cos 4x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0.$$

$$2.4. 3yy'' + (y')^2 = 0, \quad y(1) = 8, \quad y'(1) = 3.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y'tg x = \sin x.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. y'' - 3y' + y = (x-8)e^{2x}.$$

$$4.2. y'' + 2y' + 5y = -2\sin x + 3\cos x.$$

$$4.3. 4y'' - 3y' = 4x^2 - 3x.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 3y' = \frac{9}{e^{-x} + 1}, \quad y(0) = 2\ln 2, \quad y'(0) = 3 - \ln 8.$$

№ 6. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 6y \end{cases}.$$

Вариант 20

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1.1. xdx - ydy = x^2 ydy - xy^2 dx.$$

$$1.2. xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + tg^2 y) dy = 0.$$

$$1.3. xy' = \frac{3y^3 + 12x^2 y}{2y^2 + 6x^2}.$$

$$1.4. y' = \frac{x + 4y - 5}{6x - y - 5}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. y' - \frac{2y}{1+x} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$2.2. 8xy' - 12y = -y^3(5x^2 + 3), \quad y(1) = \sqrt{2}.$$

$$2.3. x^4 y''' + x^5 = 4x^2 + 1 + 3x^4 \cos x, \quad y(1) = y'(1) = y''(1) = 1.$$

$$2.4. y'' y^3 + 25 = 0, \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$x^4 \cdot y''' + x^3 y'' = -4.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. y'' - 4y' = 7x^2 + 8x - 1.$$

$$4.2. 2y'' + 3y' + y = 4e^{-2x}.$$

4.3. $y'' - y = 3\sin x + 2\cos x$.

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x}, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases}.$$

Вариант 21

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $(1 + e^x)yy' = e^x$.

1.2. $\frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2} = 0$.

1.3. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

1.4. $y' = \frac{x + y + 2}{x + 1}$.

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$.

2.2. $y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1$.

2.3. $y''' = e^{-3x}(4 - 5x), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2$.

2.4. $y'' - 18\cos y \cdot \sin^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$x^5 \cdot y'' + x^4 y' = 1.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' + 3y = (x^2 + 1)e^{-x}$.

4.2. $y'' - 5y' - 14y = \sin 2x + 10\cos 2x$.

4.3. $4y'' + 4y' + y = 2x^3 + 3x^2 + x + 5$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x}, \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = 1 - \ln 9.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y \end{cases}.$$

Вариант 22

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $3(x^2 y + y)dy + \sqrt{2 + x^2} dx = 0$.

1.2. $2(3xy^2 + 2xy + 2x^3)dx + (6x^2 y + 2x^2 + y^2)dy = 0$.

1.3. $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$.

$$1.4. y' = \frac{2x + y - 3}{4x - 4}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. y' - 3y = 81xy^4, \quad y(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$2.2. y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$2.3. y''' = 2^x(7 - x), \quad y(0) = y'(0) = \ln^2 2, y''(0) = 2.$$

$$2.4. 4y'' \cdot y^3 + 1 = y^4, \quad y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y'tgx = \sin x.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. 16y'' + 9y = 5\cos x - 4\sin x.$$

$$4.2. y'' + 10y' + 16y = xe^{-2x}.$$

$$4.3. y'' + 7y' + 12y = 3x^2 + 4x + 5.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

$$\text{№6 Решить систему дифференциальных уравнений: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}.$$

Вариант 23

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1.1. y'y \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$$

$$1.2. (\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)dy = 0.$$

$$1.3. 2x^2 y' = y^2 + 6xy + 3x^2.$$

$$1.4. y' = \frac{2x + y - 3}{2x - 2}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 1,5.$$

$$2.2. 2y' + y \cos x = \frac{1}{y} \cos x (1 + \sin x), \quad y(0) = 1.$$

$$2.3. y''' = x \cos x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0.$$

$$2.4. 4y'' \cdot y^3 = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' - y = 4e^{-x}$.

4.2. $y'' + y' = \sin 2x - 5\cos 2x$.

4.3. $y'' + 3y' - 4y = 6x^2 - 7x$.

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 5\ln 3.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}.$$

Вариант 24

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $\sqrt{4 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy$.

1.2. $(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0$.

1.3. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' - y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

2.2. $xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 0,5$.

2.3. $y''' = (1+x)e^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

2.4. $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$.

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy''' + y'' = x + 1.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' + y' - 2y = \sin 3x + 2\cos 3x$.

4.2. $y'' - y' - 6y = 6xe^{3x}$.

4.3. $15y'' - 7y' - 2y = x^3 - 4x^2 + 7$.

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + y = 2\operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}.$$

Вариант 25

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $2xdx - ydy = x^2 y dy - xy^2 dx$.

$$1.2. 2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0.$$

$$1.3. xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$1.4. y' = \frac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. y' + \frac{2y}{x} = x^3, \quad y(1) = -\frac{5}{6}.$$

$$2.2. 3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, \quad y(1) = 1.$$

$$2.3. y''' = 2xe^{2x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3.$$

$$2.4. y''y^3 + 49 = 0, \quad y(4) = 7, \quad y'(4) = -1.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(7x + 1)y''' - y'' = 0.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. y'' - 3y' - 10y = (x + 2)e^{-2x}.$$

$$4.2. y'' + 8y' + 25y = 3x^2 - x.$$

$$4.3. y'' + 16y' = -24\sin 4x.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

№ 6. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 26

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1.1. (e^x + 8)dy - ye^x dx = 0.$$

$$1.2. \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0.$$

$$1.3. y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$$

$$1.4. y' = \frac{x + y - 4}{x - 2}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$$

$$2.2. 3y' + 2xy = \frac{2x}{y^2 e^{-2x^2}}, \quad y(0) = -1.$$

$$2.3. y^{(4)} = e^x + \frac{3}{(1+x)^3}, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = y'''(0) = 1.$$

$$2.4. y'' = 72y^3, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$y''x \ln x = y'.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. \quad 12y'' + y' = 4x^2 - 2x + 1.$$

$$4.2. \quad y'' + 10y' + 25y = \cos x.$$

$$4.3. \quad y'' + y = (x - 7)e^{2x}.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$\text{№6 Решить систему дифференциальных уравнений: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 27

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1.1. \quad \sqrt{5 + y^2} + yy'\sqrt{1 - x^2} = 0.$$

$$1.2. \quad \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y \right) dy + \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx = 0.$$

$$1.3. \quad 2x^2 y' = y^2 + 8xy + 8x^2.$$

$$1.4. \quad y' = \frac{2x + y - 1}{2x - 2}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e.$$

$$2.2. \quad 2xy' - 3y = -y^3(5x^2 + 3), \quad y(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2.3. \quad y'' = (1 + x) \ln x + 4, \quad y(1) = 3, y'(1) = 4.$$

$$2.4. \quad 4y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$x \cdot y''' + y'' + x = 0.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. \quad y'' - 4y' = x^3 + x - 4.$$

$$4.2. \quad y'' + 4y = 2e^x.$$

$$4.3. \quad y'' - 7y' + 10y = \sin 7x + 2 \cos 7x.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{№6 Решить систему дифференциальных уравнений: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}.$$

Вариант 28

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.

1.2. $(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y})dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0$.

1.3. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

1.4. $y' = \frac{x+y+2}{x+1}$.

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' - y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

2.2. $xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 0,5$.

2.3. $y''' = (1+x)e^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

2.4. $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$.

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy''' + y'' = x + 1.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' + y' - 2y = \sin 3x + 2 \cos 3x$.

4.2. $y'' - y' - 6y = 6xe^{3x}$.

4.3. $15y'' - 7y' - 2y = x^3 - 4x^2 + 7$.

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + y = 2 \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

№ 6. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}.$$

Вариант 29

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $(3 + e^x)yy' = e^x$.

1.2. $(5xy^2 - x^3)dx - (y - 5x^2y)dy = 0$.

1.3. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$.

1.4. $y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}$.

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2, \quad y(0) = 1$.

2.2. $2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2$.

2.3. $y''' = (x+4)\cos 4x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0$.

2.4. $3yy'' + (y')^2 = 0, \quad y(1) = 8, \quad y'(1) = 3$.

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y'tgx = \sin x.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. \quad y'' - 3y' + y = (x-8)e^{2x}.$$

$$4.2. \quad y'' + 2y' + 5y = -2\sin x + 3\cos x.$$

$$4.3. \quad 4y'' - 3y' = 4x^2 - 3x.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 3y' = \frac{9}{e^{-x} + 1}, \quad y(0) = 2\ln 2, \quad y'(0) = 3 - \ln 8.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 6y \end{cases}.$$

Вариант 30

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1.1. \quad y(1 + \ln y) + xy' = 0.$$

$$1.2. \quad (x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$$

$$1.3. \quad 4y' = \frac{y^2 + 5x^2}{x^2} + \frac{10y}{x} \quad 1.4. \quad y' = \frac{2x + 3y - 5}{5x - 5}.$$

№ 2. Найти решение задачи Коши:

$$2.1. \quad y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$2.2. \quad 2y' - 3y \cos x = \frac{-(2 + 3\cos x)}{e^{2x}y}, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3. \quad y''' - xe^{2x} = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = y''(0) = 1.$$

$$2.4. \quad 1 + (y')^2 + yy'' = 0 \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$$

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy''' + 2y'' = x^3.$$

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$4.1. \quad y'' - 6y' + 9y = 3xe^{5x}.$$

$$4.2. \quad y'' + 9y = 4\sin 3x.$$

$$4.3. \quad y'' - 6y' + 13y = 2x^2 - x + 2.$$

№ 5. Найти решение задачи Коши методом вариации произвольных постоянных:

$$y'' + 4y = \frac{-14}{\sin 2x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

№6 Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y \end{cases}.$$

ОБРАЗЕЦ
выполнения индивидуальной работы по теме
«Дифференциальные уравнения»

№ 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.1. $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$

Попробуем разделить переменные

$$20xdx + 5xy^2dx = 3x^2ydy + 3ydy \quad \Leftrightarrow (4 + y^2) \cdot 5xdx = (x^2 + 1) \cdot 3ydy \quad \Leftrightarrow \frac{5xdx}{x^2 + 1} = \frac{3ydy}{4 + y^2}.$$

Таким образом, наше уравнение привели к виду $f(x)dx = g(y)dy$, это уравнение с разделяющимися переменными.

Перейдем к интегралам: $\int \frac{5xdx}{x^2 + 1} = \int \frac{3ydy}{4 + y^2} + C.$

$$\int \frac{5xdx}{x^2 + 1} = \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{5}{2} \ln|x^2 + 1|.$$

$$\int \frac{3ydy}{4 + y^2} = \frac{3}{2} \int \frac{d(y^2 + 4)}{y^2 + 4} = \frac{3}{2} \ln|y^2 + 4|.$$

$$\frac{5}{2} \ln|x^2 + 1| = \frac{3}{2} \ln|y^2 + 4| + C \quad \Leftrightarrow \ln|x^2 + 1|^5 = \ln|y^2 + 4|^3 + \ln C_1.$$

Воспользуемся свойством логарифмов и получим общее решение уравнения:

$$(x^2 + 1)^5 = C_1(y^2 + 4)^3.$$

1.2. $xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0.$

Сгруппируем уравнение по дифференциалам

$$\left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0.$$

Таким образом, наше уравнение имеет вид $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

$$P(x; y) = x - \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x; y) = y + \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Проверим необходимое и достаточное условие полного дифференциала $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 - \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 + \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Таким образом, это уравнение в полных дифференциалах, решением будет некоторая функция $F(x; y) = C$, которую можно найти по формуле:

$$F(x; y) = \int_{x_0}^x P(x; y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0; y)dy,$$

где (x_0, y_0) некоторые значения при которых $P(x; y)$, $Q(x; y)$ имеют смысл.

Для функций $P = x - \frac{y}{x^2 + y^2}$ и $Q = y + \frac{x}{x^2 + y^2}$

например, $x_0 = 0, y_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
F(x; y) &= \int_0^x \left(x - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \int_1^y \left(y + \frac{0}{0 + y^2} \right) dy = \\
&= \int_0^x x dx - y \int_0^x \frac{dx}{x^2 + y^2} + \int_1^y y dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^x - y \cdot \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_0^x + \frac{y^2}{2} \Big|_1^y = \\
&= \frac{x^2}{2} - 0 - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \operatorname{arctg} 0 + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{1}{2} \\
\text{Общий интеграл } &\frac{x^2 + y^2}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C.
\end{aligned}$$

1.3. $y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$. Наше уравнение имеет вид $y' = f(x, y)$, где

$$f(x; y) = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy} \text{ - является однородной функцией, т.к.}$$

$$f(\lambda x; \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + 2 \cdot \lambda x \cdot \lambda y - 5(\lambda y)^2}{2(\lambda x)^2 - 6 \cdot \lambda x \cdot \lambda y} = \frac{\lambda(x^2 + 2xy - 5y^2)}{\lambda(2x^2 - 6xy)} = f(x; y).$$

Применим подстановку $\Rightarrow y = tx, \quad y' = t'x + t$.

$$t'x = \frac{1 + 2t - 5t^2}{2 - 6t} - t = \frac{1 + 2t - 5t^2 - 2t + 6t^2}{2 - 6t} = \frac{t^2 + 1}{-6t + 2}$$

$$\frac{dt}{dx} \cdot x = \frac{t^2 + 1}{-6t + 2} \Rightarrow \frac{dt(-6t + 2)}{t^2 + 1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \text{получили уравнение с разделяющимися переменными}$$

$$\int \frac{-6t + 2}{t^2 + 1} dt = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\int \frac{-6t + 2}{t^2 + 1} dt = -6 \int \frac{tdt}{t^2 + 1} + 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = -3 \ln|t^2 + 1| + 2 \operatorname{arctg} t$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$-3 \ln|t^2 + 1| + 2 \operatorname{arctg} t = \ln|x| + C. \text{ Вернемся к замене } t = \frac{y}{x}.$$

$$\text{Общий интеграл: } -3 \ln \left| \frac{y^2}{x^2} + 1 \right| + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

1.4. $y' = -\frac{x - 2y + 5}{2x - y + 4}$.

Попробуем привести данное уравнение к однородному

Сделаем подстановку $x = u + h, \quad y = v + k$. Мы имеем $dx = du, \quad dy = dv$. Поэтому после перехода к новым переменным уравнение примет вид:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u - 2v + (h - 2k + 5)}{2u - v + (2h - k + 4)}.$$

Чтобы это уравнение было однородным, выберем h и k так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} h - 2k + 5 = 0 \\ 2h - k + 4 = 0. \end{cases}$$

Решая систему находим $h = -1$, $k = 2$. При $h = -1$, $k = 2$ уравнение принимает вид:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u-2v}{2u-v}. \text{ Данное уравнение уже является однородным. Таким образом делаем первую}$$

подстановку $x = u - 1$ $y = v + 2$, $dx = du$ $dy = dv$

Решим это однородное уравнение подстановкой: $v = uz$, получаем $\frac{dv}{du} = z + \frac{dz}{du}$, тогда

$$z + u \frac{dz}{du} = \frac{u-2zu}{2u-zu} \text{ отсюда } u \frac{dz}{u} = \frac{1-4z+z^2}{2-z}$$

$$u \frac{dz}{du} = -\frac{1-z^2}{2-z},$$

Решением которого является $\frac{z-1}{(z+1)^3} = Cu^2 (C \neq 0).$

Подставляя значение $z = \frac{v}{u}$, получаем: $\frac{v-u}{(v+u)^3} = C.$

Так как $u = x+1$, $v = y-2$, то имеем отсюда $\frac{y-x-3}{(y+x+1)^3} = C$

При разделении переменных мы делили на выражение $z^2 - 1$. Из уравнения $z^2 - 1 = 0$ получаем потерянные решения $z = \pm 1$ уравнения. Выражая z через x и y , получаем решения $y = x+3$ и $y = -x-1$ (решение $y = x+3$ получается из, если положить $C=0$, а решение $y = -x-1$ - если записать в виде $\frac{(y+x+1)^3}{y-x-3} = C_1$ и положить $C_1 = 0$).

№ 2. Найти решение задачи Коши:

2.1. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, y(1) = 4.$

Сначала найдем общее решение уравнения. Данное уравнение является линейным, так как имеет вид $y' + a(x)y = b(x)$, решим его методом Бернулли. Сделаем подстановку

$$y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -\frac{2}{x^2} \Leftrightarrow u'v + u \cdot \left(v' - \frac{v}{x} \right) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0 \\ u'v = -\frac{2}{x^2} \end{cases}$$

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} + C_1$$

$$\ln|v| = \ln|x| + C_2.$$

Т.к. нам нужна одна из функций v , удовлетворяющая условию $v' - \frac{v}{x} = 0$, возьмем $C_2 = 0$,

$$\ln|v| = \ln|x| \Rightarrow v = x. \text{ Во второе уравнение системы (*)}$$

$$u'x = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow du = -\frac{2}{x^3} dx \Rightarrow \int du = \int -\frac{2}{x^3} + C$$

$$\int du = u, \quad \int -\frac{2dx}{x^3} = x^{-2}.$$

$$u = x^{-2} + C.$$

$$y = x \cdot (x^{-2} + C) = C \cdot x + \frac{1}{x} - \text{общее решение.}$$

Для решения задачи Коши найдем C , подставив начальные условия.

$$4 = C \cdot 1 + \frac{1}{1} \Rightarrow C = 3$$

$$\text{Решение задачи Коши: } y = \frac{1}{x} + 3x.$$

$$2.2. y' - y \cdot \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} y^4 \cdot \sin x, \quad y(0) = 1.$$

Сначала найдем общее решение. Данное уравнение имеет вид $y' + a(x)y = b(x)y^n$ - является уравнением Бернулли. Будем решать методом Бернулли.

$$y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v \cdot \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} u^4 \cdot v^4 \cdot \sin x \Leftrightarrow$$

$$u' \cdot v + u \cdot (v' - v \cdot \operatorname{tg} x) = -\frac{2}{3} u^4 \cdot v^4 \cdot \sin x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v' - v \operatorname{tg} x = 0 \\ u'v = -\frac{2}{3} u^4 v^4 \sin x \end{cases}$$

$$v' - v \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = v \cdot \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{tg} x dx + C_1 \Leftrightarrow \ln|v| = -\ln|\cos x| + C_1$$

Т.к. нам нужна одна из функций v , то $C_1=0$.

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}.$$

Подставим во второе уравнение системы (*) в уравнение $u'v = -\frac{2}{3} u^4 v^4 \sin x$.

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = -\frac{2}{3} u^4 \cdot \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{2}{3} u^4 \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u^4} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow \int \frac{du}{u^4} = \int -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + C$$

$$\int \frac{du}{u^4} = \frac{u^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3u^3}.$$

$$\int -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{2}{3} \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\cos^{-2} x}{-2} = -\frac{1}{3 \cos^2 x}$$

$$-\frac{1}{3u^3} = -\frac{1}{3 \cos^2 x} \cdot C \Rightarrow \frac{1}{3u^3} = \frac{1 + C \cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{C \cdot \cos^2 x + 1}}$$

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{C \cdot \cos^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x + C \cdot \cos^3 x}} - \text{общее решение.}$$

Найдем решение задачи Коши:

$$1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos 0 + C \cdot \cos^3 0}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + C \cdot 1}} \Rightarrow C = 0. \text{ Т.о. } y = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}.$$

$$2.3. \quad y''' = x \cdot e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 1.$$

Данное уравнение имеет вид $y'' = f(x)$

$$y'' = \int y''' dx$$

Применим n-кратное интегрирование.

$$y'' = \int x \cdot e^x dx = \left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \\ du = dx \\ v = e^x \end{array} \right| = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C_1.$$

Далее будем использовать интеграл $\int x e^x dx = x e^x - e^x$.

Применим начальное условие $y''(0) = 1$.

$$1 = 0 \cdot e^0 - e^0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow y'' = x \cdot e^x - e^x + 2.$$

$$y' = \int y'' dx = \int (x \cdot e^x - e^x + 2) dx = \int x \cdot e^x dx - \int e^x dx + 2 \int dx = \\ = x \cdot e^x - e^x - e^x + 2x + C_2 = x \cdot e^x - 2e^x + 2x + C_2.$$

Используем начальное условие $y'(0) = 2$.

$$2 = 0 \cdot e^0 - 2 \cdot e^0 + 2 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 4 \Rightarrow y' = x \cdot e^x - 2e^x + 2x + 4$$

$$y = \int y' dx = \int (x \cdot e^x - 2e^x + 2x + 4) dx =$$

$$= \int x \cdot e^x dx - \int 2e^x dx + \int 2x dx + \int 4 dx = x e^x - e^x - 2e^x + 2 \frac{x^2}{2} + 4x + C_3 = x \cdot e^x - 3e^x + x^2 + 4x + C_3.$$

Используем начальное условие $y(0) = 0$.

$$0 = 0 \cdot e^0 - 3e^0 + 0^2 + 4 \cdot 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 3.$$

Т.о. решение задачи Коши: $y = x \cdot e^x - 3e^x + x^2 + 4x + 3$.

$$2.4. \quad y'' \cdot y^3 + 1 = 0, \quad y(4) = y'(4) = 1.$$

Дифференциальное уравнение не содержит переменной x , решим его с помощью подстановки $y' = p$,

$$\text{тогда } y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y') \cdot dy}{dy \cdot dx} = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p \Rightarrow$$

Подставим в уравнение, получим

$$\frac{dp}{dy} p \cdot y^3 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy} p \cdot y^3 = -1 \Rightarrow dp \cdot p = -\frac{dy}{y^3} \Rightarrow$$

$$\int p dp = \int -\frac{dy}{y^3} + C_1 \Rightarrow \frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + C_1 \Rightarrow p^2 = \frac{1}{y^2} + C_1, \Rightarrow (y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1$$

Используем начальное условие $y(4) = y'(4) = 1$.

$$1^2 = \frac{1}{1^2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\text{Т.о. } (y')^2 = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y' = \pm \frac{1}{y}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \Rightarrow dy \cdot y = dx \Rightarrow \int y dy = \int dx + C_2 \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x + C_2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} \Rightarrow y dy = -dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -x + \tilde{C}_2$$

Используем начальные условия $y(4) = 1$.

$$\frac{1}{2} = 4 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{7}{2}, \quad \frac{1}{2} = -4 + \tilde{C}_2 \Rightarrow \tilde{C}_2 = \frac{9}{2}.$$

Решение задачи Коши: $y^2 = 2x - 7$ или $y^2 = -2x + 9$.

№ 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3.$$

Данное уравнение допускает понижение степени с помощью

замены $y' = p$, тогда $y'' = (y')' = (p)' = \frac{dp}{dx}$.

$(1+x^2)\frac{dp}{dx} + 2xp = 12x^3$. уравнение стало линейным уравнением 1-ого порядка

$$\frac{dp}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}p = \frac{12x^3}{1+x^2}.$$

Решаем методом Бернулли: $p = u \cdot v$, $p' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$u'v + uv' + \frac{2x}{1+x^2}uv = \frac{12x^3}{1+x^2} \Rightarrow u'v + u \cdot \left(v' + \frac{2x}{1+x^2}v \right) = \frac{12x^3}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v' + \frac{2x}{1+x^2}v = 0 \\ u'v = \frac{12x^3}{1+x^2} \end{cases}.$$

$$v' + \frac{2x}{1+x^2}v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{2x}{1+x^2}v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{2x}{1+x^2}dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = \ln|v|, \quad \int \frac{-2xdx}{1+x^2} = -\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = -\ln|1+x^2|$$

$$\ln|v| = -\ln|1+x^2| + C_1, \quad C_1 = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$u' \frac{1}{1+x^2} = \frac{12x^3}{1+x^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 12x^3 \Rightarrow du = 12x^3 dx \Rightarrow$$

$$\int du = \int 12x^3 dx \Rightarrow u = 3x^4 + C_1 \Rightarrow p = uv = \frac{3x^4 + C_1}{1+x^2}$$

$$\text{Т.о. } \frac{dy}{dx} = \frac{3x^4}{1+x^2} + \frac{C_1}{1+x^2} \Rightarrow dy = \left(\frac{3x^4}{1+x^2} + \frac{C_1}{1+x^2} \right) dx \Rightarrow$$

$$y = \int \left(\frac{3x^4}{1+x^2} + \frac{C_1}{1+x^2} \right) dx = \int \left(3x^2 - 3 + \frac{3}{1+x^2} + \frac{C_1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= x^3 - 3x + (3+C_1)\arctg x + C_2.$$

Общий интеграл $y = x^3 - 3x + (3+C_1)\arctg x + C_2$.

№ 4. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами:

4.1. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$.

Сначала решим однородное уравнение $y'' - 2y' + 5y = 0$

$$y_{общ} = y_{одн} + y_r$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 5 = 0. \text{ Найдем корни этого уравнения: } k_{1,2} = -1 \pm 2i. \text{ ФСР } \begin{cases} y_1 = e^{-1x} \cos 2x \\ y_2 = e^{-1x} \sin 2x \end{cases}$$

Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид: $y_{одн} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Найдем частное решение, соответствующее правой части

$f(x) = 10\cos x$. Вспомогательное число $K = 0 \pm 1i$ не является корнем характеристического уравнения.

$$y_q = e^{0 \cdot x}(A \cos x + B \sin x) = A \cos x + B \sin x$$

$$y'_q = -A \sin x + B \cos x$$

$$y''_q = -A \cos x - B \sin x$$

$-A \cos x - B \sin x - 2A \sin x + 2B \cos x + 5A \cos x + 5B \sin x = 10 \cos x$ Приравняем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ правой и левой частей.

$$\begin{cases} -A + 2B + 5A = 10 \\ -B - 2A + 5B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

Т.о. $y_q = 2 \cos x + \sin x$.

$$y_{общ} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2 \cos x + \sin x.$$

4.2. $y'' - 8y' = x^2 + 4x - 1$.

Сначала решим однородное уравнение $y'' - 8y' = 0$

Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 8k = 0$.

Найдем корни характеристического уравнения: $k_1 = 0, k_2 = 8$ ФСР $\begin{cases} y_1 = e^{0x} \\ y_2 = e^{8x} \end{cases}$

$$y_{одн} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{8x} = C_1 + C_2 e^{8x}.$$

Вспомогательное число правой части $K = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности 1.

$$y_q = e^{0 \cdot x}(Ax^2 + Bx + C)x^1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y'_q = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y''_q = 6Ax + 2B$$

$$6Ax + 2B - 24Ax^2 - 16Bx - 8C = x^2 + 4x - 1$$

$$\begin{cases} -24A = 1 \\ 6A - 16B = 4 \\ 2B - 8C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{24} \\ B = -\frac{17}{64} \\ C = \frac{15}{256} \end{cases}$$

$$y_q = -\frac{1}{24}x^3 - \frac{17}{64}x^2 + \frac{15}{256}x.$$

$$y_{общ} = C_1 + C_2 e^{8x} - \frac{1}{24} x^3 - \frac{17}{64} x^2 + \frac{15}{256} x.$$

$$4.3. y'' + 3y' - 4y = (x+2)e^x.$$

Сначала решим уравнение ФСР $y'' + 3y' - 4y = 0$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 3k - 4 = 0. \text{ Корни этого уравнения будут: } k_1 = 1, \quad k_2 = -4. \text{ ФСР } \begin{matrix} y_1 = e^{1x} \\ y_2 = e^{4x} \end{matrix}$$

$y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$. Вспомогательное число правой части $K = 1 \pm 0i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1.

$$y_q = e^x (Ax + B) x^1 = e^x (Ax^2 + Bx)$$

$$y'_q = e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B)$$

$$y''_q = e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A) = e^x (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A)$$

$$e^x (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A) + e^x (3Ax^2 + 3Bx + 6Ax + 3B) + e^x (-4Ax^2 - 4Bx) =$$

$$e^x (4Ax + 2B + 2A + 6Ax + 3B) = e^x (x + 2)$$

Приравняем коэффициенты при x в правой и левой части.

$$\begin{cases} 10A = 1 \\ 5B + 2A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{10} \\ B = \frac{36}{100} \end{cases}.$$

$$y_q = e^x (0,1x^2 + 0,36x)$$

$$y_{общ} = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + e^x (0,1x + 0,36x).$$

№ 5. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Правая часть $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ не специального вида. Будем решать методом вариации произвольной

постоянной. Сначала решим однородное уравнение $y'' + y = 0$.

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $k^2 + 1 = 0$. Корни этого уравнения будут: $k_{1,2} = \pm i$.

Фундаментальная система решений: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Тогда по методу вариации произвольной постоянной

$y_{общ} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ функции такие, что

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0 \\ C_1 y'_1 + C_2 y'_2 = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'_1 \cos x + C'_2 \sin x = 0 \\ -C'_1 \sin x + C'_2 \cos x = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1 \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$C_1' = -1 \Rightarrow C_1 = -\int dx = -x + \tilde{C}_1$$

$$C_2' = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow C_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + \tilde{C}_2.$$

$$y_{\text{общ}} = (-x + \tilde{C}_1)\cos x + (\ln|\sin x| + \tilde{C}_2)\sin x.$$

Решение задачи Коши:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 = \left(-\frac{\pi}{2} + \tilde{C}_1\right)\cos\frac{\pi}{2} + (\ln\sin\frac{\pi}{2} + \tilde{C}_2)\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tilde{C}_2 = 1$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = (-1 + \tilde{C}_1)\cos\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2} + \tilde{C}_1\right)\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)\sin\frac{\pi}{2} + \left(\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| + \tilde{C}_2\right)\cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tilde{C}_1 = 0$$

Т.о. решение задачи Коши: $y = -x \cdot \cos x + (\ln|\sin x| + 1) \cdot \sin x.$

Рекомендуется дополнительная литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения; Кратные интегралы; Ряды. - М.:Наука, 1989, - 512 с.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Высшая школа, 1978,- 287 с.
3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. М.: Высшая Школа, 1983,-174 с.
4. Крум Е.В., Бичи-оол Е.К. Математика. Дифференциальные уравнения. Учебно- методическое пособие для студентов инженерно-технического факультета. - Кызыл: Издательство Тыв ГУ, 2004, - 92 с.
5. Попов А.Г., Данко П.Е., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1989, ч.2-416 с.
6. Под редакцией Виленкина Н.Я. Задачник по курсу математического анализа. - М.: Просвещение, 1971, ч.2-333 с.

Учебное издание

Крум Елена Валерьевна, Бичи-оол Елена Карловна

Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений

*Учебно-методическое пособие
для студентов физико-математического факультета*

Редактор А.Р. Норбу
Дизайн обложки К.К. Сарыглар

Сдано в набор: 27.06.2018. Подписано в печать: 25.10.2018.
Формат бумаги 60×84 ¹/₈. Бумага офсетная.
Физ. печ. л. 9,8. Усл. печ. л. 9,1. Заказ № 1490. Тираж 50 экз.

667000, г. Кызыл, Ленина, 36
Тувинский государственный университет
Издательство ТувГУ