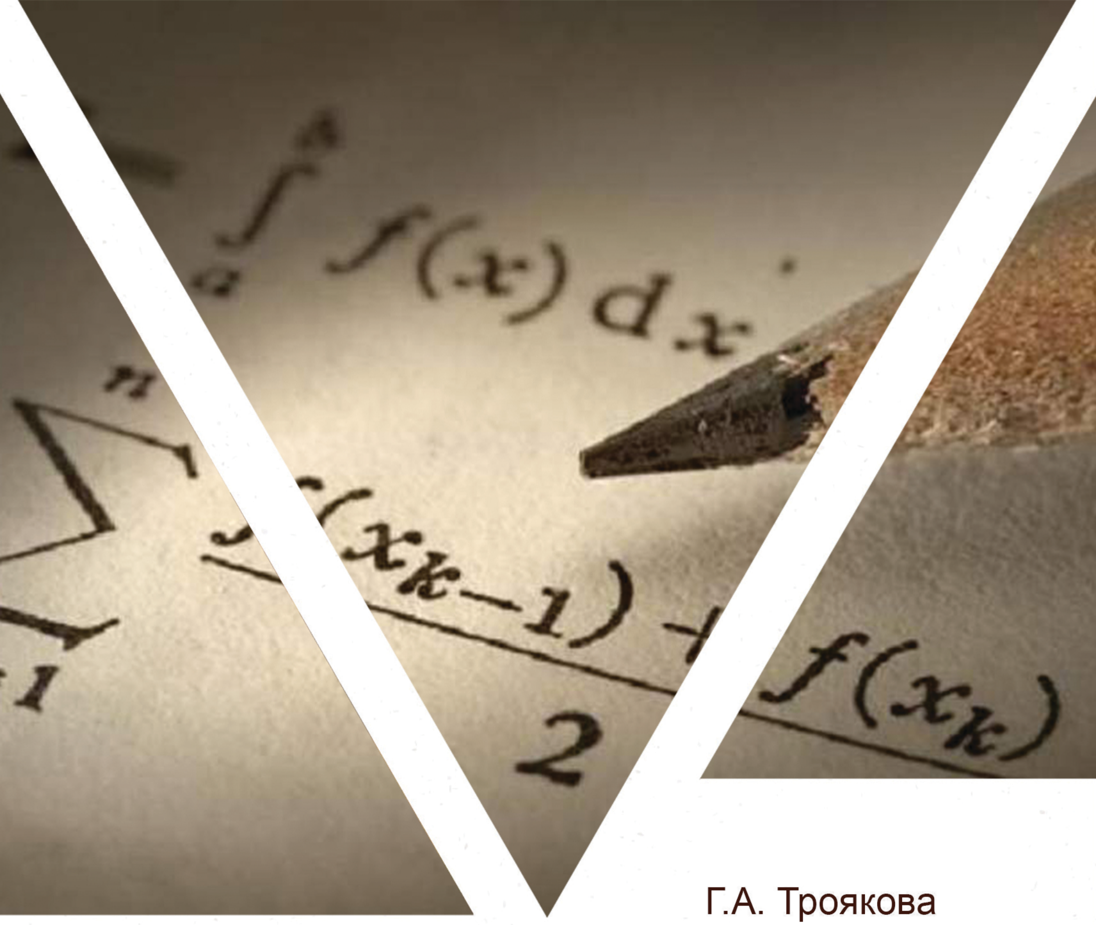


Г.А. Троякова

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Кызыл
2018

ФГБОУ ВО «ТУВИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Г.А. Троякова

Дискретная математика

Учебно-методическое пособие
для студентов физико-математического факультета

Кызыл
2018

УДК 517.98
ББК 22.16
Т76

Печатается по решению учебно-методического
Совета Тувинского государственного университета

Троякова Г.А.
Дискретная математика: учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета. – Кызыл: Изд-во ТувГУ, 2018. – 96 с.

В данном пособии кратко изложены основные теоретические тезисы, обеспечивающие обоснование решений задач по дискретной математике. Перед каждым циклом задач для самостоятельного решения приведены примеры их решения. Пособие ориентировано на студентов ФМФ всех направлений бакалавриата

Рецензенты:

- заведующий кафедрой
физико-математического и дистанционного
образования ТИРО и ПК
кандидат педагогических наук
С.К.Сат

- доцент кафедры математического
анализа и МПМ ТувГУ,
кандидат педагогических наук
Н.М. Кара-Сал

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Пособие предназначено студентам, изучающим дискретную математику, и преподавателям, проводящим занятия по указанной дисциплине. В курсе изучаются элементы теории множеств, булевой алгебры, комбинаторики и др.

Немаловажным для специалиста является способность читать и понимать математические тексты, это особенно подчеркнуто в программах бакалавриата, в большой степени ориентированной на самостоятельную работу. В пособии выделен теоретический минимум, позволяющий успешно справиться с представленными задачами.

Сегодня имеется огромное количество теоретических источников по дискретной математике, они ориентированы на свою конкретную специальность, но во всех присутствуют разделы по теории множеств и комбинаторике как элемент общематематической культуры.

Основные задачи курса – оснастить студентов математическим аппаратом, необходимым для построения и анализа математических моделей, и создания базы для изучения других математических дисциплин и информатики.

В пособии имеется достаточный материал для проведения практических занятий, домашних заданий и проверки остаточных знаний по предмету.

Особый раздел: суммирование, – сложен и весьма специфичен, предназначен для студентов, желающих решать нестандартные и сложные задачи. Этот раздел отмечен (*).

Элементы булевой алгебры ориентированы полностью на самостоятельное изучение, как ветвь ранее изученной математической логики с ориентацией на вопросы прикладного характера в информатике, теории кодирования и декодирования. Имеется полный пакет практических задач индивидуальный для каждого студента(материал не входит в пособие). В пособии представлен лишь теоретический минимум по булевой алгебре и минимум практических задач для понимания алгоритмов их решения.

Троякова Г.А.

I. Элементы теории множеств

I.1. Понятие множества
Способы задания множеств
Основные операции над множествами

Понятие **множества** в математике не имеет строгого определения. Но каждое конкретное множество однозначно определяется входящими в его состав объектами (которые называют **элементами множества**).

Обычно для обозначения множества используют большие латинские буквы: **A, B, C, D**… Для обозначения элементов множества – малые латинские буквы: **a, b, c, d**…

Множество считается заданным, если относительно каждого объекта мы можем сказать, принадлежит он этому множеству или нет.

Запись $\mathbf{a} \in \mathbf{D}$ означает, что «элемент ***a*** принадлежит множеству ***D***» или «***a*** – элемент множества ***D***».

$\mathbf{g} \notin \mathbf{F}$ - означает, что «объект ***g*** не является элементом множества ***F***», «***g*** не принадлежит множеству ***F***».

Рассмотрим два способа, которыми можно задать множество:

1) **Перечисление всех элементов данного множества**:

$A=\{f,s,n,t\}$ – «множество A состоит из элементов f,s,n,t».

2) **Описание характеристического свойства**, которое выделяет элементы данного множества среди элементов более широкого, основного множества:

$M=\{x\in A \mid P(x)\}$ – «множество M состоит из тех элементов x множества A, для которых выполняется свойство P(x)».

Задание множества перечислением его элементов чаще используют для конечных множеств. Среди бесконечных множеств существуют такие, перечислить все элементы которых просто невозможно.

Если множество A конечно, тогда **порядком множества** A называется количество элементов в A.

Для порядка множества используют обозначения: $|A|$ или #A.

Пример. 1) $A=\{1,2,5\}$, $|A|=3$.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется **пустым**.

Обозначение пустого множества – символ $\varnothing$.

Задать пустое множество можно описанием любого противоречивого свойства.

Два множества A и B называются **равными**, если каждый элемент множества A является и элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A:

$A=B \Leftrightarrow \forall x\ ((x\in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x\in B \Rightarrow x \in A))$.

Перестановка элементов при описании множества или повторение в описании одного и того же элемента несколько раз, не изменяют самого множества.

<u>Замечание 1</u>. Запись g и {g} - не одно и то же. g – это элемент, {g} – это множество, содержащее единственный элемент g. Таким образом, $g\neq\{g\}$ и $g\in\{g\}$.

Множество N называется **подмножеством** множества M (обозначение $N\subseteq M$), если каждый элемент множества N принадлежит множеству M: $N\subseteq M \Leftrightarrow \forall x\ (x\in N \Rightarrow x \in M)$.

Это отношение между множеством M и любым его подмножеством называют **отношением включения**.

Пусть $N\subseteq M$. Множество N называется **собственным подмножеством** множества M, если $N\neq M$ и $N\neq\varnothing$. Включение N в M называется в этом случае строгим: $N\subset M$.

Рассмотрим несколько задач

Задача 1. A – множество параллелограммов. Принадлежит ли этому множеству: а) ромб; б) трапеция; в) диагональ параллелограмма; г) прямоугольник; д) параллелепипед?

Решение. Приступая к решению задачи, необходимо вспомнить, что такое параллелограмм, какими он обладает свойствами.

Итак, параллелограмм - это четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон.

а) Ромб, это частный случай параллелограмма, следовательно, ромб принадлежит множеству A.

б) Трапеция — это четырехугольник, у которого только одна пара сторон параллельна, поэтому трапеция не принадлежит множеству A.

в) Диагональ параллелограмма не четырехугольник, поэтому не принадлежит множеству A.

г) Прямоугольник это частный случай параллелограмма, следовательно, ромб принадлежит множеству A.

д) Параллелепипед — это не плоская фигура, поэтому не принадлежит множеству A.

Задача 2. Равны ли множества

а) {2, 4, 5} и {2, 5, 2, 4};

б) {3,5} и {{3,5}};

в) {3, 5, 7} и {{3},{5}, {7}};

Решение задачи: *При решении такого рода задач, необходимо, во-первых, знать определение равенства множеств, а во-вторых, помнить о замечании запись g и {g} - не одно и то же. g – это элемент, {g} – это множество, содержащее единственный элемент g. Таким образом, $g \neq \{g\}$ и $g \in \{g\}$.*
Таким образом, а) множества равны, элемент 2 встречается во втором множестве дважды; б) множества не равны, т.к. второе множество состоит из одного элемента, который сам является двухэлементным множеством; в) множества не равны, т.к. второе множество состоит из одноэлементных множеств.

Задача 3. Вставьте между множествами символ $\in$ или $\subseteq$ так, чтобы получились истинные высказывания:

а) $\{1\}$ и $\{1, \{1, 2\}\}$;
б) $\{1, 2\}$ и $\{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$;
в) $\{1, 2\}$ и $\{1, 2, \{1, 2\}\}$;

Решение задачи: *При решении задачи воспользуемся определением подмножества и собственного подмножества*

а) $\{1\} \subseteq \{1, \{1, 2\}\}$;
б) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$;
в) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

I.2. Понятие универсального множества Операции над множествами Свойства операций над множествами

Объединением двух множеств A и B (обозначение $A \cup B$) называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Пример 1.
1) $A=\{1,2,3,4,5\}$; $B=\{1,3,5,7,9,11\}$; $A \cup B=\{1,2,3,4,5,7,9,11\}$

Пересечением множеств A и B (обозначение $A \cap B$) называется множество, которое состоит из тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.

$A \cap B=\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

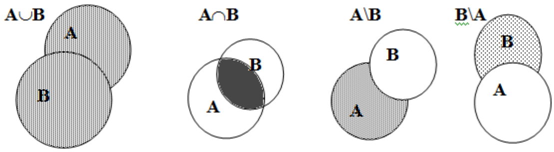
Пример 2. 1) $A=\{q, e, t, s, f\}$, $B=\{q, w, e, r, t, a\}$ $A \cap B=\{q, e, t\}$.

Разностью множеств A и B (обозначение $A \setminus B$) называется множество тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.

$A \setminus B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

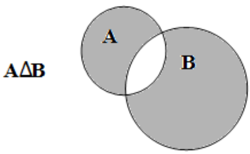
Пример 3: 1) A={2,4,6,8}, B={1,4,8,16,20}, A\B={2,6}, B\A={1,16,20}.

Иллюстрировать введенные операции можно с помощью диаграмм Эйлера-Венна. На этих диаграммах любые множества изображаются кругами. Внутренними точками круга изображаются элементы множества.



Симметрической разностью множеств A и B (обозначение A ΔB – «A дельта B») называется множество тех элементов, которые принадлежат только множеству A или только множеству B.

$A\Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$.

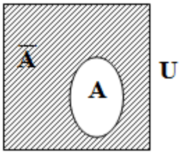


Если множества A и B не имеют общих элементов, т.е. $A \cap B = \varnothing$, тогда A и B называются **непересекающимися** (дизъюнктными) множествами.

В каждой конкретной задаче чаще всего рассматриваются множества, содержащие элементы какого-то одного типа (например, числовые множества или множества геометрических фигур). Поэтому бывает полезно ввести в рассмотрение столь обширное множество U, что все рассматриваемые в задаче множества окажутся его подмножествами. Такое множество U называется универсальным. Это относительное понятие (в каждой задаче – своё универсальное множество).

Пусть выбрано универсальное множество U. Множество $A \subseteq U$. ***Дополнением*** множества A (обозначение A' , или $\neg A$, или $\overline{A}$) называется множество, содержащее только те элементы множества U, которые не принадлежат множеству A.

$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\} = U \setminus A$.



Задача 1.Найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$

а) $A = [3; 7)$, $B = (4; 9]$;

б) $A = (-1; 3)$, $B = [2; \infty)$.

Решение. Такого рода задачи, можно решать с использованием числовой прямой и определений операций над множествами.

а)

$A\cup B = [3;9]$, $A\cap B = (4;7)$, $A\setminus B = [3;4)$, $B\setminus A = (7;9]$,
$A\Delta B = [3;4)\cup(7;9]$, $A = (-\infty;3) \cup[7;+ \infty]$, $B==(-\infty;4] \cup (9;+ \infty]$.

Для пункта б) задачу решите самостоятельно.

I.3. Основные свойства операций над множествами

Для произвольных множеств A, B, C верны следующие тождества.

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$ 2. $A\cup\varnothing = A$
3. $A\cap U = A$. 4. $A\cup U = U$
5. $A\cap A = A$ 6. $A\cup A = A$
7. $A\cap B = B\cap A$ 8. $A\cup B = B\cup A$
9. $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$
10. $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$
11. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
12. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
13. $\overline{\overline{A}} = A$
14. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 15. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Список свойств неполон, Вы можете его продолжить.

Задача 4. Докажем тождество $A \setminus (B \cap C) = (A\setminus B) \cup(A\setminus C)$.

Доказательство:

$A\setminus(B\cap C)$ = (воспользуемся определением) = $A \cap(\overline{B \cap C})$ =
(применим первый закон де Моргана 14) = $A \cap(\overline{B} \cup \overline{C})$ =
(далее по закону дистрибутивности 12) = $(A \cap\overline{B}) \cup(A \cap \overline{C})$ =
(определение) = $(A \setminus B) \cup(A \setminus C)$, что и требовалось доказать. ♦

4. Формула включений и исключений

1. Для конечных непересекающихся множеств A и B $|A \cup B| = |A| + |B|$

2. Для произвольных конечных множеств A и B $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

3. Пусть U – универсальное множество, A – произвольное конечное множество. Тогда $|\overline{A}| = |U| - |A|$.

Теорема. (Формула включений и исключений).

Для произвольных конечных множеств A, B, C имеет место формула:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Следствие 1. Число элементов, не принадлежащих ни одному из множеств A, B, C равно

$$|U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Задача 5. В олимпиаде по математике принимало участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну – по геометрии и одну по тригонометрии. В результате проверки оказалось, что задачу по алгебре решили 20 человек, по геометрии – 18 человек, по тригонометрии – 18 человек, по алгебре и геометрии – 7, по алгебре и тригонометрии – 8, по геометрии и тригонометрии – 9 человек. Известно, что ни одной задачи не решили трое. Сколько учащихся решили все три задачи? Сколько учащихся решили ровно две задачи?

Решение. Для данной задачи универсальным множеством U является множество всех учеников, принимавших участие в олимпиаде.

Пусть А – множество всех решивших задачу по алгебре, Г – решившие задачу по геометрии, Т – решившие задачу по тригонометрии. Тогда те, кто решил задачи и по алгебре, и по геометрии, составляют множество $А \cap Г$; $А \cap Т$ - решившие задачи и по алгебре, и по тригонометрии; $Т \cap Г$ - решившие задачи и по тригонометрии, и по геометрии. Множество $А \cap Т \cap Г$ - те ученики, кто решил все три задачи. Множество $А \cup Т \cup Г$ – те, кто решил хотя бы одну из задач (или по алгебре, или по геометрии, или по тригонометрии). Тогда те, кто не решил ни одной задачи, составляют множество $U \setminus (А \cup Т \cup Г) = \overline{А \cup Т \cup Г}$.

По условию: $|U| = 40$.

$|А| = 20$, $|Г| = 18$, $|Т| = 18$, $|А \cap Г| = 7$, $|А \cap Т| = 8$, $|Т \cap Г| = 9$, $|\overline{А \cup Т \cup Г}| = 3$.

Из 3. $\Rightarrow$ $|(А \cup Т \cup Г)| = |U| - |\overline{А \cup Т \cup Г}| = 40 - 3 = 37$

По теореме

$$|А \cup Т \cup Г| = |А| + |Г| + |Т| - |А \cap Г| - |А \cap Т| - |Т \cap Г| + |А \cap Т \cap Г|$$

$37 = 20 + 18 + 18 - 7 - 8 - 9 + |А\cap Т\cap Г| \Rightarrow |А\cap Т\cap Г| = 5$ (решили все три задачи).

$А\cap Г$ - среди тех, кто решил задачи и по алгебре, и по геометрии есть 5 человек, решивших все три задачи. Значит тех, кто решил ровно по две задачи - по алгебре и по геометрии: $|А\cap Г| - |А\cap Т\cap Г| = 2$.

Аналогично, $|А\cap Т| - |А\cap Т\cap Г| = 3$ решили по 2 задачи – по алгебре и тригонометрии

$|Т\cap Г| - |А\cap Т\cap Г| = 4$ решили по 2 задачи – по геометрии и тригонометрии

Т.о., учеников, решивших ровно две задачи 2 + 3 + 4 = 9

Ответ: Все три задачи решили 5 человек, ровно по две решили 9.

Далее представлены примеры, большинство из которых необходимо решить самостоятельно. Часто – устно.

Пример 4. Задать различными способами множество А всех четных чисел 2, 4, 6, …., не превышающих 1000.

Пример 5. Верно ли, что: 1). $\{\{1,2\}, \{2,3\}\}=\{1,2,3\}$? 2).$\{\{1,2\}\}=\{1,2\}$?

Пример 6. Перечислить элементы следующих множеств:

1). $A=\{a|A\subseteq B, B=\{1,2,3\}\}$; 2). $A=\{a|a\in B, B=\{1,2,3\}\}$.

Пример 7. Приведите примеры таких множеств $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{K}$, для которых

1) $A\in B$, $B\in K$, $A\notin K$; 2) $A \in B$, $B \in K$, $A \in K$;

3) $A \in B$, $B \notin K$, $A \subseteq K$; 4) $A \subseteq B$, $B \in K$, $A \notin K$.

Пример 8. Доказать, используя тождества алгебры множеств, что

1) $\boldsymbol{A} \cup(\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$; 2) $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$;

3) $\boldsymbol{A} \cup(\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{K}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})\cap(\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{K}})$; 4) $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})\cap(\overline{\boldsymbol{B}} \cup \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$;

5) $\boldsymbol{B} \cap(\boldsymbol{A}\setminus \boldsymbol{B}) = \varnothing$;

6) $\boldsymbol{A} \cap(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{K}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{K})$.

Пример 9. Упростить выражение $(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

Пример 10. Пусть **I** $=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$- универсальное множество, **A** $=\{1, 2, 4, 5\}$.**B** $=\{2, 3, 4, 5, 9\}$. **C** $=\{0, 3, 4, 5, 6, 9\}$.
D $=\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Найдите элементы множества:

а) $P = \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap C \cap D \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$,

б) $P = B \cap C \cap \overline{D} \cup A \cap C \cap D \cup A \cap \overline{B} \cap C$,

в) $P = B \cap \overline{D} \cup \overline{A} \cap B \cap D \cup A \cap \overline{C} \cap D \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

Пример 11. Пусть **I** $=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$- универсальное множество, **A** $=\{0, 2, 4, 5, 9\}$; **B** $=\{0, 1, 5, 6, 8\}$; **C** $=\{0, 1, 3, 4, 8\}$. Выяснить, является ли множество $\boldsymbol{P} = A \cap B \cap C \cup \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$ подмножеством множества $\boldsymbol{Q} = A \cap B \cup B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$.

Исходя из определения операций с множествами, найдем $\boldsymbol{P} = \{0, 6\}$, $\boldsymbol{Q} = \{0, 3, 5, 6\}$ и, очевидно, что $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{Q}$.

Пример 12. Выяснить, является ли множество R = $A \cap B \cup \overline{A} \cap C$ подмножеством множества Q в условиях примера 7.

Пример 13. Элементы множеств A, B, C, образующих множества $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, могут быть не заданы. В этом случае исследовать соотношение $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{Q}$ можно, упростив $P \cap \overline{Q}$, применяя теоремы поглощения, склеивания и де Моргана. Если получим пустое множество, то $\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{Q}$.

Следующие тождества, в силу их важности, выделим особо. Их необходимо доказать. **!!!**

Законы де Моргана

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; 2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Законы поглощения

1. $(A \cup B) \cap A = A$; 2. $(A \cap B) \cup A = A$

Закон (операция) склеивания, как и закон поглощения, имеет две формы

1. $A \cap B \cup A \cap \overline{B} = A$; 2. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

Пример 14. Укажите номера множеств, которые являются подмножествами множеств $Q = A \cap D \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$

1) $P = A \cap B \cup B \cap C \cup B \cap D$;

2) $P = A \cap \overline{C} \cap D \cup B \cap \overline{C} \cap D$;

3) $P = \overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C \cap D$;

4) $P = A \cap B \cup B \cap C$;

5) $P = A \cap D \cup \overline{B} \cap C \cup B \cap \overline{C} \cap \overline{D}$;

6) $P = A \cup B \cap C \cup \overline{B} \cap D$;

7) $P = A \cap C \cap D \cup \overline{B} \cap C \cup B \cap \overline{C} \cap D$;

8) . $P = A \cup B \cap \overline{C} \cup B \cap D$

Решение. По закону де Моргана $\overline{Q} = (\overline{A} \cup \overline{D}) \cap (B \cup \overline{C}) \cap (A \bigcup \overline{B} \cup C)$ Для каждого пункта 1)-8) найдем $P \cap \overline{Q}$.

1) Составим $P \cap \overline{Q}$ раскроем скобки по правилам теории множеств и упростим: $P \cap \overline{Q} = \overline{A} \cap B \cap C \cup A \cap B \cap \overline{D}$. Последнюю запись далее сократим заменив выражение A∩B на AB. В нашем случае $P \cap \overline{Q} = \overline{A}BC \cup AB\overline{D}$. Итак, $P \cap \overline{Q} \neq \varnothing$. $P \not\subset Q$.

2) $P \cap \overline{Q} = \varnothing$, P ⊂ Q.

3) $P \cap \overline{Q} = \varnothing$, $P \subset Q$.

4) $P \cap \overline{Q} = AB\overline{D} \neq \varnothing$ и $P \not\subset Q$.

5) $P \cap \overline{Q} = AB\overline{N}\overline{D} \neq \varnothing$ и $P \not\subset Q$.

6) $P \cap \overline{Q} \neq \varnothing$ и $P \not\subset Q$.

7) $P \cap \overline{Q} = \varnothing$, $P \subset Q$.

8) $P \cap \overline{Q} = AB\overline{D} \neq \varnothing$ и $P \not\subset Q$.

Каждый из пунктов 1) – 6) распишите подробно.

Ответ: 2, 3, 7.

Пример 15. Пусть ***A, B, K*** – такие множества, что $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{K}$. Найдите множество $\boldsymbol{X}$, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{X} = \boldsymbol{K} \end{cases}.$$

Решение. Из первого уравнения следует, что $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{X}$, поэтому $\boldsymbol{X}$ можно представить в виде $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{X}'$, где $\boldsymbol{X}' \cap \boldsymbol{B} = \varnothing$. Из равенств $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$,

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{X}'$, $\boldsymbol{X}' \cap \boldsymbol{B} = \varnothing$ следует, что $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{X}' = \varnothing$.

Итак, нам осталось найти множество $\boldsymbol{X}'$. Заменим $\boldsymbol{X}$ во втором уравнении на $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{X}'$. Получим $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{X}') = \boldsymbol{K}$. По ассоциативному закону

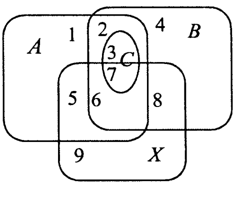
$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{K}$. Из включения $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ следует, что $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$, поэтому получаем равносильное уравнение $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{K}$. Два факта $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{X}' = \varnothing$ и $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{K}$ позволяют заключить, что решением последнего уравнения является множество $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{K} \setminus \boldsymbol{A}$. Окончательно

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cup (K \setminus \boldsymbol{A})$.

Пример 13. Решить систему соотношений относительно множества **X** и указать условия совместности системы

$$\begin{cases} B \,\Delta\, C = X \cap A \\ X \setminus C = A \cap B \\ C \subseteq A \cap B. \end{cases}$$

Решение:



1. Построим множества общего положения **A, B, X** и множество **C** такие, что

$C \subseteq A \cap B$ и C ⚭ X

Будем говорить, что множества **A** и **B** находятся в общем положении и писать **A** ⚭ **B**, если существуют такие элементы ***a, b, c***, что **a**∈A, и **a**∉**A**, **b**∈**B** и **b**∉**A**, ***c*** ∈ **A** и ***c*** ∈ **B**.

Условия задачи реализуем на кругах Эйлера-Венна: через 1 обозначены элементы множества A, не содержащиеся ни в каких других множествах; символом 7 обозначены общие элементы множеств A, B, C, X и т.д.

Восстановим множества по рисунку:

A= {1, 2, 3, 5, 6,7}, **B** = {2, 3, 4, 6, 7,8}, **C** = {3, 7}, **X** = {5, 6, 7, 8,9}. (1)

Находим **B**Δ**C** = {2, 4, 6, 8}, **X**∩**A** = {5, 6, 7}.

Из того, что **B**Δ**C = X**∩**A,** следует, что множества 2, 4, 5, 7 и 8 пусты. С учетом этого факта имеем:

A= {1, 3, 6}, **B** = {3, 6}, **C** = {3}, **X** = {6, 9}. (2)

Далее: **X** \ **C** = {6, 9}, **B**∩**A** = {3, 6}, эти множества равны по условию, следовательно списки элементов множеств 3 и 9 пусты. Тогда:

A= {1, 6}, **B** = {6}, **C** = ∅, **X** = {6}. (3)

Получили, что **X** = **B**, **B**⊂ **A, C** = ∅.

2. Проверка решения **X** = **B**. Если **B**⊂ **A, C** = ∅, можно записать **A**= {a, b}, **B** = {b}, где a,b – списки элементов.

Пусть **X** = **B** = {b}, тогда **B**Δ**C = B** \ **C** = {b}. **X** \ **C** = X= {b}, {b,{b}} = A\ X, **X**∩**C** = {a, b} = **B**∩**A.**

Очевидно, что все соотношения системы выполняются.

Ответ: **X** = **B**, **B**⊂ **A, C** = ∅.

Пример 14. Решить систему уравнений $\begin{cases} A\Delta X = B\setminus C \\ C\cap X = A\cup B \\ B\setminus X = A\setminus X \end{cases}$ (*)

относительно множества **X** и указать условия совместности системы или доказать ее несовместность.

№	A	B	C	X
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1
5	0	1	0	0
6	0	1	0	1
7	0	1	1	0
8	0	1	1	1
9	1	0	0	0
10	1	0	0	1
11	1	0	1	0
12	1	0	1	1
13	1	1	0	0
14	1	1	0	1
15	1	1	1	0
16	1	1	1	1

Строим множества общего положения **A, B, X** и множество **C**, являющиеся подмножествами универсального множества **U**. В таблице слева представлены все 16 двоичных наборов размерности 4.

Пусть разряды этих наборов слева направо соответствуют множествам **A, B, C, X**

U={1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16},

A = {9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}**,**

B = {5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16}**,**

C = {3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16}**,**

X = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16}.

Далее, из первого уравнения системы имеем:

A Δ **X = {**2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15**}, B** \ **C =** {5, 6, 13, 14}

A Δ **X = B** \ **C,** значит 2, 4, 5, 8, 9, 11, 14, 15 – пустые.
A = { 10, 12, 13,16**}; B ={**6, 7,13,16**}; C = {**3, 7, 12,16**}; X = {**6, 10,12,16**}**

Из второго уравнения системы имеем:

$C \cap X = \{12, 16\}$, $A \cup X = \{6, 10, 12, 13, 16\}$

$C \cap X = A \cup X \Rightarrow$ 6, 10, 13 –пустые и множества примут вид:

A = { 12, 16}, B ={7, 16}, C = {3, 7, 12, 16}, X = { 12, 16}

Из третьего уравнения системы имеем:

B\ X = A \X, B\ X = {7}, A \X = $\varnothing$ $\Rightarrow$ 7 – пустое множество

A = { 12, 16}, B ={16},C = {3, 12, 16}, X = { 12, 16}

U = {1, 3, 12, 16}, X = A , B $\subset$ **A** $\subset$ **C** $\subset$ **U**

Убедимся, что X = A – решение системы

$B \subseteq A \subseteq C \subseteq U \Rightarrow$ B = {**a**}, A = {**a, b**}, C = {**a, b, c**} , U = {**a, b, c** , **u**}

Пусть X = A = {**a, b**}, B = {**a**}, A = {**a, b**}, C = {**a, b, c**},
U = {**a, b, c** , **u**}

Это удовлетворяет системе (*).

Ответ: **X = A,** $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$**.**

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите элементы множества **P**. Универсальным множеством считать множество десятичных цифр. В ответе элементы множества **P** упорядочить по возрастанию.

Замечание: В силу того, что операция $\cap$ сильнее операции $\cup$, будем использовать обозначение $A \cap B = AB$ и дополнение $\overline{A} = A'$.

А

а) $P = BC \cup A' BD \cup A' C D \cup AB' C'$;
б) $P = B' C \cup A' BD \cup A' C D \cup AB' C$;
в) $P = BC' \cup A' BD \cup AC' D \cup AB' C'$;
A = {0, 1, 2, 4, 5, 6, 9}; B = {1, 2, 3, 4, 7, 9};
C = {2, 3, 4, 5, 6, 9}; D = {0, 1, 3, 4, 5, 6, 7}

Б

а) $P = BD' \cup A' BD \cup A B' D' \cup AB' D'$;
б) $P = AB' \cup BCD' \cup B' CD \cup AB' C$;
в) $P = A' B' \cup ACD' \cup BC' D' \cup AB' C'$;
A = {0, 1, 2, 4, 5, 8}; B = {1, 2, 3, 4, 7, 9};
C = {2, 3, 4, 5, 6, 9}; D = {1, 3, 4, 5, 6, 7}

В

а) $P = AD \cup A' BC \cup A' BD \cup A'CD'$;
б) $P = AB' C \cup ACD' \cup B' C' D \cup AB' C$;

в) $P = A' B \cup BCD' \cup BC' D' \cup A' BC'$;

$A = \{1, 2, 4, 7, 8\}$; $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 9\}$;

$C = \{2, 3, 5, 6, 9\}$; $D = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

2. Укажите номера множеств, которые являются подмножествами множества Q:

А	$Q = A \cup BC \cup BD$ 1) $P = AB \cup BC \cup BD$; 2) $P = A \cup BD$; 3) $P = A'B \cup BC \cup BD$; 4) $P = A \cup BC$; 5) $P = A \cup BC \cup BD'$; 6) $P = A \cup BC \cup B'D$; 7) $P = AC' \cup BC \cup BD$; 8) $P = A \cup BC' \cup BD$.

Б	$Q = A' BD \cup A' C \cup CD \cup AB' D$ 1) $P = AB \cup A' C$; 2) $P = AB' \cup A'C' \cup CD$ 3) $P = A' BD \cup A' C$; 4) $P = A'CD \cup AB'D$ 5) $P = ABD \cup A' C$; 6) $P = A'BD \cup A' B' C$ 7) $P = ABD \cup A'B'D'$; 8) $P = A'C \cup A' B'$

В	$Q = AB \cup BC \cup AD \cup CD$ 1) $P = ABC \cup A' CD$; 2) $P = AB' \cup A'C \cup CD$; 3) $P = A'B \cup A'C$; 4) $P = CD \cup AB'D'$; 5) $P = A'BCD \cup AD$; 6) $P = ABD \cup A' B' C$; 7) $P = BD \cup A' B'D'$; 8) $P = AC' D \cup B'CD$.

3. Решите систему относительно множества X и укажите условия ее совместимости при заданных соотношениях:

№	*Система*	№	*Система*	№	*Система*
1	$\begin{cases} B \cap X = A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	2	$\begin{cases} (A \Delta X) \cup B = C \\ C \setminus X = A \cup B \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	3	$\begin{cases} B \setminus X = A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$
4	$\begin{cases} (A \Delta C) = X \cap B \\ X \setminus B = A \setminus C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	5	$\begin{cases} C \setminus X = B \setminus A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	6	$\begin{cases} B \Delta C = C \setminus X \\ X \cup A = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$

7	$\begin{cases} A\cap X=B \\ A\Delta X=C \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	8	$\begin{cases} X\setminus B=C\setminus A \\ A\Delta X=C\Delta B \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	9	$\begin{cases} C\setminus X=A\cup(C\setminus X) \\ X\cup A=B \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$
9	$\begin{cases} X\setminus B=C\setminus A \\ C\cap X=A \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	1 1	$\begin{cases} B\setminus X=A \\ B\cup X=C \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	1 2	$\begin{cases} X\cup(B\setminus A)=C \\ C\setminus X=A\cap B \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$

4. Решите систему относительно множества X и укажите условия ее совместимости или доказать ее несовместность при заданных соотношениях:

№	*Система*	№	*Система*	№	*Система*
1	$\begin{cases} B\cap X=A\cup X \\ C\cup X=A\cap X \\ A'\setminus X=C\setminus A \end{cases}$	2	$\begin{cases} (A\setminus X)=X\setminus B \\ C\setminus X=X\setminus A \\ (B\cap X)'=X\setminus A \end{cases}$	3	$\begin{cases} B\setminus X=A\cap X \\ X\setminus A=C\cup X \\ X\setminus C=A\cup B \end{cases}$
4	$\begin{cases} A\cup X=B\setminus X \\ X\setminus B=C\cup X \\ A'\setminus C=X\setminus A \end{cases}$	5	$\begin{cases} A\cup X=B\Delta C' \\ X\setminus C=B\cup X \\ (B\cap X)'=C\setminus A \end{cases}$	6	$\begin{cases} B\setminus C=A\Delta X \\ B\setminus X=A\setminus C \\ C\cap X=A\cap B \end{cases}$
7	$\begin{cases} B\setminus X=A\cap C \\ A\setminus X=C\setminus B \\ X\setminus C=A\cup B \end{cases}$	8	$\begin{cases} X\cup B=B\bigcap C \\ A\cup C=C\cap X \\ A\cup B=X\cap C \end{cases}$	9	$\begin{cases} A\cap X=B\cap A \\ C\setminus X=(A\cup B)' \\ A'=A\setminus B \end{cases}$
10	$\begin{cases} (X\cap B)'=X\cap C \\ C\cap B=B\setminus X \\ A\setminus(B\cup C)=C\setminus B \end{cases}$	11	$\begin{cases} B\setminus C=A\setminus B \\ A\setminus C=(X\cap C)' \\ (B\setminus X)\setminus A=A\setminus C \end{cases}$	12	$\begin{cases} X\cup C=A\setminus B \\ A\cap B=B\cup C \\ B\setminus A=X\cap C \end{cases}$

I. 3. Диаграммы Эйлера-Венна

Диаграммы Эйлера-Венна лают возможность наглядного представления отношений между множествами и позволяют сократить решение трудоемких задач теории множеств.

Пример. Пусть ***I*** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – универсальное множество и заданы его подмножества A= {1, 4, 5, 8}, B = {1, 2, 3, 5, 7}, C

= {2, 3, 5, 6, 9}. Найти элементы множества P = A$\cap$ B C A B C A B C A B C

P = A$\cap \overline{B} \cap$ C $\cup$A$\cap$ $\overline{B}\cap$ $\overline{C} \cup$ $\overline{A} \cap$ B$\cap$ $\overline{C}$ $\cup \overline{A}$ $\cap$ $\overline{B}\cap$ C. Далее знак $\cap$ будем просто пропускать.

В нашем случае P = A $\overline{B}$ $\overline{C}$ $\cup$ A $\overline{B}$ C $\cup$ $\overline{A}$ B $\overline{C}$ $\cup \overline{A}$ $\overline{B}$ C

На диаграмме нанесем элементы заданных множеств

Из рисунка 1 видно, что A $\overline{B}$ $\overline{C}$ = {4, 8}, A $\overline{B}$ C = $\varnothing$, $\overline{A}$ B $\overline{C}$ = {7}, $\overline{A}$ $\overline{B}$ C = {6, 9}.

Итак, **P = {4, 6, 7, 8, 9}**.

Пример. Пусть P = $\overline{A}$ B C $\cup$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ C $\cup$ A $\overline{B}$ $\overline{C}$ $\cup$ A $\overline{B}$ C.
При этом A = {0, 4, 6, 7, 8}, B = {1, 4, 5, 7}, C = {0, 2, 3, 5, 6, 9}.

По диаграмме Венна (рис. 2) находим результат:
P = {0, 2, 3, 5, 6, 8, 9}.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить диаграмму Венна для множеств вида:

A = {0,2, 4, 5,8}; B = {1, 2, 4, 7, 9};
C = {2, 3, 4, 5, 6, 9}; ***I*** = {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

При помощи полученной диаграммы найдите элементы **P**.

а) P = $A^{/} B^{/} C^{/} \cup A^{/} B C^{/} \cup A B^{/} C^{/} \cup A B C^{/}$;

б) P = $A^{/} B^{/} C^{/} \cup A^{/} B C^{/} \cup A B^{/} C^{/} \cup A B C$.

2. Построить диаграмму Венна для множеств вида:

A = {0, 2,3, 4, 5,8}; Б = {1, 2, 4, 7, 9};
C = {2, 3, 4, 5, 6, 7}; ***I*** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, б, 7, 8, 9}.

При помощи полученной диаграммы найдите элементы **P**.

а) P = $A^{/} B^{/} C^{/} \cup A^{/} B C^{/} \cup A B C^{/} \cup A B C$;

б) P = $A^{/} B^{/} C^{/} \cup A^{/} B C^{/} \cup A B^{/} C^{/} \cup A B^{/} C$.

3. Построить диаграмму Венна для множеств вида:

A = {0, 1, 2, 4, 5, 8}; B = {1, 2, 3, 4, 7, 9};

$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$; $\boldsymbol{I} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

При помощи полученной диаграммы найдите элементы **P**.

а) $P = A' B' C' \cup A' B C' \cup A B' C' \cup A B C$;

б) $P = A' B' C' \cup A' B C \cup A B' C' \cup A B' C$.

4. Построить диаграмму Венна для множеств вида:

$A = \{0, 1, 2, 4, 5, 9\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$;

$C = \{2, 4, 5, 6, 9\}$; $\boldsymbol{I} = \{O, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

При помощи полученной диаграммы найдите элементы **P**.

а) $P = A' B' C' \cup A' B C \cup A B' C' \cup A B C'$;

б) $P = A' B' C' \cup A' B C \cup A B' C' \cup A B C$.

5. Построить диаграмму Венна для множеств вида:

$A = \{0,1,2,4,6,8\}$; $B = \{1, 2, 4, 7, 9\}$;

$C = \{2, 3, 4, 5, 9\}$; $\boldsymbol{I} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

При помощи полученной диаграммы найдите элементы **P**.

а) $P = A' B' C' \cup A' B C \cup A B' C \cup A B C'$;

б) $P = A' B' C' \cup A' B C \cup A B' C \cup A B C$.

6. Построить диаграмму Венна для множеств вида:

$A = \{0,1,2,4,6,8\}$; $B = \{1, 3, 4, 7, 8\}$;

$C = \{0, 2, 3, 4, 5, 9\}$; $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

При помощи полученной диаграммы найдите элементы **P**.

а) $P = A' B' C' \cup A' B C \cup A B C' \cup A B C$;

б) $P = A' B' C' \cup A B' C' \cup A B' C \cup A B C'$.

7. Построить диаграмму Венна для множеств вида:

$A = \{0,1, 2, 3, 5, 8\}$; $B = \{0, 2, 3, 4, 7, 9\}$;

$C = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$; $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

При помощи полученной диаграммы найдите элементы **P**.

а) $P = A' B' C' \cup A B' C' \cup A B' C \cup A B C$.

б) $P = A' B' C' \cup A B' C' \cup A B C' \cup A B C$.

8. Построить диаграмму Венна для множеств вида:

$A = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 9\}$; $B = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$;

$C = \{2, 3, 4, 6, 9\}$; $\boldsymbol{I} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

При помощи полученной диаграммы найдите элементы **P**.

а) $P = A' B' C' \cup A B' C \cup A B C' \cup A B C$.

б) $P = A' B' C' \cup A' B C' \cup A' B C \cup A B' C'$.

9. Построить диаграмму Венна для множеств вида:

$A = \{0,1,2,8\}$; $B = \{1,2, 3,4, 7\}$;

$C = \{2, 3, 4, 6, 9\}$; $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

При помощи полученной диаграммы найдите элементы **P**.

а) $P = A' B' C \cup A' B C' \cup A' B C \cup A B' C$.

б) $P = A' B' C \cup A' B C' \cup A' B C \cup A B C'$.

10. Построить диаграмму Венна для множеств вида:

$A = \{0,1,2,4,5\}$; $B = \{1, 3, 4, 7, 9\}$;

$C = \{2, 5, 6, 7, 9\}$; $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

При помощи полученной диаграммы найдите элементы **P**.

а) $P = A' B' C \cup A' B C' \cup A' B C \cup A B C$.

б) $P = A' B' C \cup A' B C' \cup A B' C' \cup A B' C$.

Решите задачи 11 - 31, указав в ответе числа через запятую

11. На одной из кафедр университета работают тринадцать человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро – немецкий, шестеро – французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо – английский и французский, трое – немецкий и французский.

1) Сколько человек знают все три языка?

2) Сколько человек знают ровно два языка?

3) Сколько человек знают только английский язык?

12. Из 100 опрошенных студентов 50 программируют на алгоритмическом языке Си++, 53 − на Паскале, 42 − на Бейсике, 15 студентов могут программировать на Си++ и на Бейсике, 20 студентов − на Паскале и Бейсике, 25 − на Си++ и Паскале, а 5 студентов программируют на всех трех языках.

1) Определить число студентов, не умеющих программировать ни на одном из данных языков?

2) Сколько студентов программируют хотя бы на одном из перечисленных языков?

3) Сколько студентов программируют только на Паскале?

4) Сколько студентов не программируют ни на Си++, ни на Паскале?

13. В отделе НИИ работают несколько сотрудников, знающих хотя бы один иностранный язык. Из них 6 человек знают английский, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 – английский и немецкий, 3- французский и немецкий, 2- французский и английский,1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Сколько человек знают только один язык?

14. Староста одного класса дал следующие сведения об учениках: « Из 45 учеников в классе, где 25 мальчиков; 30 учеников учатся на хорошо и отлично, в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 человек, в том числе 18 мальчиков и 17 школьников, которые учатся на хорошо и отлично. 15 мальчиков учатся на хорошо и отлично и занимаются спортом». Докажите, что в этих сведениях кроется ошибка.

15. Из 35 студентов, побывавших на каникулах в Москве, все, кроме двоих, делились впечатлениями. О посещении Большого театра с восторгом вспоминали 12 человек, Кремля – 15, а 17 – о концерте, по четыре студента запомнили посещение театра и Кремля, а также театра и концерта, а четверо – концерта и пребывания в Кремле. Сколько студентов сохранили воспоминания одновременно о театре, концерте и Кремле?

16. На потоке из 100 студентов 28 человек изучают английский язык, 30 человек – немецкий язык, 42 человека – французский язык. Причем 8 человек изучают два языка – английский и немецкий, 10 человек изучает английский и французский языки, 5 человек – немецкий и французский языки. 3 человека изучают все 3 языка. Сколько студентов не изучает ни один из перечисленных языков?

17. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок , 11 – физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков: а) сколько учеников посещают и математический и физический кружок? б) сколько учащихся посещают только математический кружок?

18. В классе каждый из учеников либо девочка, либо блондин, либо любит математику. В классе 20 девочек, из них 12 блондинок, и одна блондинка любит математику. Всего в классе 24 ученика– блондина, математику из них любят 12, а всего учеников (мальчиков и девочек), которые любят математику – 17, из них 6 девочек. Сколько учеников в данном классе?

19. Пятьдесят лучших студентов колледжа наградили за успехи поездкой в Англию и Германию. Из них 5 не владели ни одним иностранным языком, 34 знали английский язык и 27 – немецкий. Сколько студентов владело двумя иностранными языками?

20. Студенты группы программистов занимается в свободное время либо музыкой, либо спортом. Сколько студентов в группе, если 23 увлекаются спортом, 12 занимаются музыкой, а 7 совмещают эти занятия?

21. Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

22. Сколько имеется натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые 1) делятся на 3 или на 5; 2) не делятся ни на одно из чисел 2, 3, 5?

23. Сколько чисел среди первых 1000 натуральных чисел не делятся ни на 3, ни на 4, ни на 5?

24. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 300 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3 и 5.

25. а) Сколько чисел от 5 до 110, которые не делятся нацело ни на 3, ни на 5? б) Сколько чисел среди них, которые делятся нацело на 3 и не делятся на 5? в) Сколько чисел в первой сотне, которые делятся нацело на 5 и не делятся на 3? г) Сколько чисел в первой сотне, которые делятся нацело либо на 5, либо на 3 и не делятся на 15?

26. а) Сколько чисел от 1 до 200, которые делятся нацело либо на 3, либо на 5, либо на 7? б) сколько чисел от 5 до 210, которые делятся нацело на 7, но не делятся на 3? в) сколько чисел от от 5 до 210, которые делятся нацело на 7, но не делятся на 5 и 11?

27. На соревнованиях были школьники и студенты. Все они были либо с коньками, либо с лыжами. Мальчиков было 16. С лыжами пришли 24 человека. Девочек с коньками было ровно столько, сколько мальчиков с лыжами. Сколько человек участвовало в соревнованиях по лыжному и конькобежному видам спорта?

28. По результатам опроса студенческой группы из 32 человек 12 регулярно читают журнал "Мир ПК", 10 человек читают журнал " КомпьютерПресс", 8 человек предпочитают журнал "Знание–сила", 3 человека читают и "Мир ПК" и "КомпьютерПресс", 4 человека читают "Мир ПК" и "Знание–сила", 5 человек – "КомпьютерПресс" и "Знание–сила", а 1 человек читает все три журнала.

а) сколько человек читают только "Мир ПК"?

б) сколько человек читают только журнал "Знание–сила"?

29. На потоке обучается 65 студентов, все они посещают дисциплины по выбору. "Теорию групп" изучает 39 человек; "Криптографию" – 26 человек; "Математическую статистику" – 24 человека; 10 человек изучает "Теорию групп" и " Криптографию ", 9 человек – "Теорию групп" и "Математическую статистику", а 8 человек изучает " Криптографию " и "Математическую статистику".

а) сколько человек изучает все три дисциплины?

б) сколько человек изучает одну дисциплину?

с) сколько человек изучает две дисциплины?

г) сколько человек изучает только "Теорию графов"?

30. В результате социологического опроса студентов ФМФ о занятиях в свободное от уроков время, выяснилось, что из 100 человек:

18 – любят только читать книги;
24 – читают книги, но не ходят в театр;
7 – читаю книги и посещают театр;
28 – читают книги;
47 – ходят на дискотеки;
9 – посещают театр и дискотеки;
13 – лежат на диване перед телевизором, занимаются только просмотром всех возможных каналов телевидения.
Сколько студентов любят ходить в театр (?); сколько студентов читают книги, посещают театр, но не дискотеки (?); сколько студентов посещают либо дискотеки, либо театр (?) ; сколько студентов, посещая дискотеки и театр, не любят читать книги (?); сколько студентов предпочитают только дискотеки (?); сколько студентов, посещая дискотеки и театр, либо читают книги

31. Решите задачу Льюиса Кэррола, автора книг «Алиса в стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье»: «В ожесточенном бою из 100 пиратов потеряли по одному глазу – 70, по одному уху – 75, по одной реке – 80, по одной ноге – 85 пиратов. Определите число пиратов, потерявших одновременно глаз, ухо, ногу и руку?»

II. Метод математической индукции

Метод математической индукции (ММИ) служит для доказательства истинности предложений вида ∀nA(n), A(n) – высказывательная форма на множестве натуральных чисел.

Принцип математической индукции: пусть A(n) – высказывательная форма на множестве натуральных чисел. Тогда справедлива теорема:

1) A(1) **(базис индукции)**,

2) ∀n (A(n)→ A(n + 1));

То предложение ∀n A(n) истинно.

Из «принципа» следует, что для доказательства истинности утверждения ∀nA(n) достаточно доказать два факта 1) и 2). Первый из них называется **(базис индукции),** проверяется непосредственно.

Доказательство второй части основано на определении импликации, которая ложна только в одном случае, когда посылка истинна, а заключение ложно. Следовательно, истинность предложения ∀n (A(n)→ A(n + 1)) может быть установлена предположением истинности A(n) **(предположение индукции)** и, исходя из этого, доказательства истинности A(n + 1) (индукционный шаг).

Пример 1. Доказать, что при любом натуральном *n* число $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ делится на 3.

Решение. Обозначим A(n): «($a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$) $\vdots$ 3».

Используем метод полной математической индукции.

1) При проверке для *n* =1 имеем $a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9$, которое делится на 3 и A(1) - истинно .

2) Предположим, что утверждение справедливо при *n*=*k*, $k \geq 1$, то есть $a_k = k^3 + 3k^2 + 5k$ делится на 3, и установим, что при *n* = *k*+1 число $a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$ делится на 3.

Действительно, $a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) =$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 =$$

$$= (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3(k^2 + 3k + 3) = a_k + 3(k^2 + 3k + 3).$$

Т.к. каждое слагаемое делится на 3, то их сумма также делится на 3. ♦

Пример 2. Доказать, что сумма первых n натуральных нечётных чисел равна квадрату их числа, то есть $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Решение. Воспользуемся методом полной математической индукции.

1) Проверяем справедливость данного утверждения при n=1: $1=1^2$ – это верно.

2) Предположим, что сумма первых k ($k \geq 1$) нечётных чисел равна квадрату числа этих чисел, то есть $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$. Исходя из этого равенства, установим, что сумма первых k+1 нечётных чисел равна $(k+1)^2$, то есть

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Воспользуемся нашим предположением и получаем

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2. \ \blacklozenge$$

Метод полной математической индукции применяется для доказательства некоторых неравенств. Докажем неравенство Бернулли.

Пример 3. Доказать, что при $\alpha \geq -1$ и любом натуральном n справедливо неравенство $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ **(неравенство Бернулли).**

Решение. 1) При n=1 получаем $1+\alpha \geq 1+\alpha$, что верно.

2) Предполагаем, что при n=k имеет место неравенство $(1+\alpha)^k \geq 1+k\alpha$ (*). Используя это предположение, докажем, что $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+(k+1)\alpha$. Отметим, что при $\alpha=-1$ это неравенство выполняется и поэтому достаточно рассмотреть случай $\alpha > -1$.

Умножим обе части неравенства (*) на число $1+\alpha$ и получим:

$$(1+\alpha)^{k+1} \geq (1+k\alpha)(1+\alpha)=1+(k+1)\alpha+k\alpha^2 \geq 1+(k+1)\alpha,$$

то есть $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+(k+1)\alpha$. ♦

Аналогично проводится доказательство методом, так называемой, ***неполной математической индукции*** некоторого высказывания, зависящего от n ($n \geq 2$), где на первом шаге проверяем его справедливость для наименьшего n.

В ряде задач нет явного указания на возможность доказательства ММИ, тогда необходимо провести исследование, уловить закономерность, выдвинуть гипотезу и только потом эту гипотезу доказать ММИ (или опровергнуть).

В некоторых задачах явно не сформулировано утверждение, которое можно доказать методом ***математической индукции.***

Пример 4. Найти сумму $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

*Решение***.** Найдём суммы S_1, S_2, S_3. Имеем $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$. Высказываем гипотезу, что при любом натуральном n справедлива формула $S_n = \frac{n}{n+1}$. Для проверки этой гипотезы воспользуемся методом полной математической индукции.

1) При $n = 1$ гипотеза верна, т.к. $S_1 = 1/2$.

2) Предположим, что гипотеза верна при $n = k$, $k \geq 1$, то есть $S_k = \frac{k}{k+1}$. Используя эту формулу, установим, что гипотеза верна и при $n = k+1$, то есть

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

В самом деле,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Итак, исходя из предположения, что гипотеза верна при $n = k$, $k \geq 1$, доказано, что она верна и при $n = k+1$, и на основании принципа математической индукции делаем вывод, что формула справедлива при любом натуральном n. ♦

Пример 6. Найти все натуральные n, для которых справедливо неравенство

$$2^n > n^2.$$

Решение. Рассмотрим n=1, 2, 3, 4, 5, 6. Имеем: $2^1>1^2$, $2^2=2^2$, $2^3<3^2$, $2^4=4^2$, $2^5>5^2$, $2^6>6^2$. Таким образом, можно высказать гипотезу: неравенство $2^n > n^2$ имеет место для каждого $n \geq 5$. Для доказательства истинности этой гипотезы воспользуемся принципом неполной математической индукции.

1) При исследовании задачи мы получили, что данная гипотеза истинна при $n=5$.

2) Пусть она истинна для $n = k$, $k \geq 6$, то есть справедливо неравенство $2^k > k^2$. Используя это предположение, докажем, что справедливо неравенство $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Т. к. $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$ и при $k \geq 6$ имеет место неравенство $2k^2 > (k+1)^2$

$$\left((k-1)^2 - 2 > 0 \text{ при } k \geq 6 \right),$$

то получаем, что $2^{k+1} > (k+1)^2$. Итак, истинность гипотезы при $n=k+1$ следует из предположения, что она верна при $n=k$, $k \geq 5$.

Из пп. 1 и 2 на основании принципа неполной математической индукции следует, что неравенство $2^n > n^2$ верно при каждом натуральном $n \geq 5$. ♦

Задачи для самостоятельного решения

1. Сформулируйте форму математической индукции, в которой рассматриваются случаи:

1. $n = 1$; n и $n + 1$;
2. $n = 1$; $1 \leq к < n$ и n;
3. $n = m$; $m \leq n$ и $n + 1$;
4. $n = m$; $m \leq к < n$ и n.

2. Докажите, что для любого натурального ***n*** число $\boldsymbol{a_n}$ делится на ***b***, если:

1) $a_n = n^3 + 5n$, $b = 6$;
2) $a_n = 7^{n+2} + 8^{2n+1}$, $b = 57$.
3) $a_n = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$, $b = 11$;
4) $a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$, $b= 133$;
5) $a_n = 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$, $b = 17$;
6) $a_n = 3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$, $b = 19$;
7) $a_n = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$, $b = 11$;
8) $a_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$, $b =7$;
9) $a_n = 4^n - 3n - 1$, $b = 9$;
10) $a_n = 3^{2n} + 15$, $b = 12$, $n \geq 2$;
11. $a_n = 7^{2n} - 4^{2n}$, $b = 33$;
12) $a_n = 10^n + 18n - 28$, $b = 18$.

3. Докажите, что при любом натуральном ***n***:

1) $2^{2n} - 1$ делится на3;
2) $2^{2n+1} + 1$ делится на 3;
3) $n^5 - n$ делится на 5, на 10 и на 30;
4) $n^3 + 5n$ делится на 6;
5) $n^3 + 11n$ делится на 6;
6) $7^n - 1$ делится на 6;
7) $2n^3 + 3n^2 + 7n$ делится на 6;
8) $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ делится на 8;
9) $n^7 - n$ делится на 7 и на 42;
10) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7;
11) $n^{11} - n$ делится на 11 и на 66;

12) $n^p - n$ делится на p, где p - простое натуральное число;
13) $7^n + 3n - 1$ делится на 9;
14) $4^n + 15n - 1$ делится на 9;
15) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9
16) $10^n - 4^n + 3n$ делится на 9;
17) $5^{6n+5} + 7^{6n+7}$ делится на 9;
18) $4^n + 6n - 1$ делится на 9;
19) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ делится на 11;
20) $3^{2n} + 15$ делится на 12;
21) $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ делится на 14;
22) $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на16;
23) $4^n + 15n - 1$ делится на 16;
24) $5^{n+3} + 11^{3n+1}$ делится на 17;
25) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17;
26) $9^{n+1} - 18n - 9$ делится на 18;
27) $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ делится на 19;
28) $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^{2n}$ делится на 19;
29) $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ делится на 19;
30) $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ делится на 19;
31) $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ делится на 19;
32) $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ делится на 23;
33) $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ делится на 24;
34) $n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 - 2n$ делится на 24;
35) $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ делится на 25;
36) $10^n + 18n - 28$ делится на 27;
37) $2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$ делится на 27;
38) $7^{2n} - 4^{2n}$ делится на 33;
39) $6^{2n} - 1$ делится на 35;
40) $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ делится на 37;
41) $5^{n+3} \cdot 2^n - 125$ делится на 45;
42) $7^{2n} - 1$ делится на 48;
43) $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ делится на 57;
44) $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}$ делится на 59;
45) $n^2(n^4 - 1)$ делится на 60;
46) $3^{2n+1} + 40n - 67$ делится на 64;
47) $3^{2n+2} - 8n - 9$ делится на 64;
48) $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ делится на 84;
49) $5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n - 2^n)$ делится на 91;
50) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133;
51) $7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^n$ делится на 100, если n кратно 4;
52) $11^{6n+3} + 1$ делится на 148;

53) $10^{n+1} - 10(n + 1) + n$ делится на 81;
54) $20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1$ делится на 323;
55) $3^{2n+2.}\, 5^{2n} - 3^{3n+2.}\, 2^{2n}$ делится на 1053;
56) $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1};
57) $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ делится на 7;
58) $5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^{2n-1}$ делится на 19;
59) $3^{2(n+1)} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}$ делится на 117;
60) $7^{2n} + 3^{2n} + 30 \cdot 21^n$ делится на 16.

4. Докажите, что для любого натурального n справедливы следующие равенства:

1. $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; 2. $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3. $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

4. $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$;

5. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + (n-1)n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

6. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + ... + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$;

7. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

8. $\dfrac{0}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{n-1}{n!} = 1 - \dfrac{1}{n!}$

9. $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

10. $1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \dfrac{\cos\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

5. Докажите, что при каждом натуральном **n** справедливо равенство:

1) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(2n-1)^2}{4}$;

4) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

5) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

6) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

7) $\sum_{k=1}^{n} (k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

8)

$$1\cdot 2\cdot \ldots \cdot p + 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot p\cdot (p+1) + \ldots + n(n+1)\cdot \ldots \cdot (n+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$$

9) $\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2$;

10) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$;

11) $\sum_{k=1}^{n} (k-1)k^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$

12) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\cdot 3\cdot 4}$;

13) $\sum_{k=1}^{n} nx^{n-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$; где x $\neq$1;

14) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; п ≥ 2;

15) $\sum_{k=1}^{n} (k^2+2k-1) = \frac{n(2n^2+9n+1)}{6}$;

16) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$,где $x \neq 1$;

17) $7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777\ldots7}_{\text{п цифр}} = \dfrac{7(10^{n+1}-9n-10)}{27}$;

18) $(n + 1)(n + 2)\cdots(n + n) = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$.

19) $\sum_{k=1}^{n} (2\square+1)\cdot 2^{k-1}\cdot k! = 2^n\,(n+1)! - 1$

20) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^2}\cdot(k+1)! = \dfrac{(n+2)!}{2^n} - 2$.

6. Докажите, что при каждом натуральном n справедливо тождество:

1) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$;

2) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$;

3) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$;

4) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

5) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+3)(k+4)} = \dfrac{n}{4(n+4)}$;

6) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{7}{(7k-6)(7k+1)} + \dfrac{1}{7n+1} = 1$;

7) $\sum \dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \dfrac{n}{a(a+n)},\ a \in N$;

8) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1}$;

9) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{2^{k+2}}=1-\frac{n+4}{2^{n+2}}$;

10) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$;

11) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=2-\frac{n+2}{2^n}$;

12) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{2^{k+2}}=1-\frac{n+4}{2^{n+2}}$;

13) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k-1}{2^{k-1}}=2^{1-n}+2(n-1)$;

14) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$;

15) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$;

16) $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$; где $|x| \neq 1$;

17) $\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-x^{2n}}{1-x^{2^n}}$;

18) $\sum_{k=1}^{n}(x^k-\frac{1}{x^k})^2=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}}\right)-2n-1$;

19) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$;

20) $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^{n-1}}) = 1 + x + x^2 + x^3+\ldots+ x^{2^n-1}$.

7. Докажите, что для натуральных n верно неравенство:

1) $2^n \geq n + 1$;

2) $1{,}5^n \geq 1 + 0{,}5n$

3) $2{,}5^n \geq 1 + 1{,}5n$;

4) $\left(\sqrt{3}\right)^n > n$;

5) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^n > n$;

6) $\left(\sqrt{2}\right)^n \ge n$, если $n \ge 4$;

7) $2^n \ge n^2$ если $n \ge 4$;

8) $2^n > 2n + 1$, если $n \ge 3$;

9) $(1 + a)^n \ge 1 + na$, если $a \ge -1$;

10) $2^n > n^3$, если $n \ge 10$;

11) $3^n \ge n^2 + 2n$;

12) $(1 + a)^n > 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$, если $n \ge 3$, $a > 0$,

13) $n^3 > 3n + 3$, $n \ge 3$;

14) $4^n > n^2$:

15) $2^{\frac{1}{2}(n-1)n} > n!, n \ge 3$;

16) $2^n > n^2 - 2n + 2$;

17) $5^n > 7n - 3$;

18) $3^n \ge 2^n + n$;

19) $4^n > 3^n + 2^n$, $n \ge 4$;

20) $2^{n-1} > n(n + 1)$;

21) $3^n > 5n^2$, $n \ge 4$;

22) $2^n > n(n + 4)$, $n \ge 4$.

8. Докажите, что для натуральных n верно неравенство:

1) $\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{3}}}}}_{n} < 3$;

2) $\underbrace{\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{5+\ldots+\sqrt[3]{5}}}}}_{n} < 2$;

3) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, если $n \ge 2$;

4) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n} - 1$;

5) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$, если $n > 1$;

6) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

7) $n \cdot (x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n) \ge (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1})$, если $x_i \ge 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$;

8) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \ge n^2$, если $x_i > 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$;

9) $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$;

10) $$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}},$$

если $x_i \ge 0$ при i =1, 2, ..., n.

11) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}$;

12) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} \le n$;

13) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$; $n \ge 2$;

14) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$, $n \ge 2$;

15) $\frac{5}{6} \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} \le \frac{4}{3}$.

15) $a_{n+2} = 9a_{n+1} - 20a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, то $a_n = 5^n - 4^n$;

16) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$, $a_1 = 3$, $a_2 = 15$, то $a_n = 4^n - 1$;

17) $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = -1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, то $a_n = 2^n + n$;

18) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, то $a_n = 3^n - 1$.

19) $2^n > n^2$ при $n \ge 5$,

20) $2^n > 2n + 1$ при $n \ge 3$.

21) $2n < n!$ при $n \ge 4$.

9*. Используя метод математической индукции, докажите для допустимых значений аргумента, что:

1) $|\sin nx| \le n \sin x$, $n \in N$;

2) $$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^n \alpha) = \frac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha};$$

3) $$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2} \cdot x\right)\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}};$$

4) $$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \cdot x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2};$$

I.1. Суммирование*

Не существует алгоритма решения задач на суммирование. Каждая задача оригинальна и требует для своего решения нестандартные подходы. И только после того, как идея решения появляется, необходимо ее обосновать. Часто для этого применяется метод математической индукции. Решите хотя бы часть предложенных задач.

1. Найти сумму:

а) $1\cdot 3+3\cdot 9+5\cdot 27+...+(2n-1)\cdot 3^n$;

б) $1+2\cdot 3+3\cdot 7+...+n\cdot(2^n-1)$.

2. Найти сумму: а) $x+x^2+x^3+...+x^n$;

б) $1+2\cdot x+3\cdot x^2+4\cdot x^3+...+n\cdot x^{n-1}$.

3. Найти сумму членов:

$S=2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+4\cdot 3^2+...+n\cdot(n-1)^2+(n+1)\cdot n^2$.

4. Найти сумму: $S_n=1\cdot 3x\ +3\cdot 5x^2+...+(2n-1)(2n+1)x^2$.

5. Найти сумму:

а) $1^2+2^2+3^2...+n^2$; б) $1^3+2^3+3^3...+n^3$.

6. Найти сумму: $1^3+3^3+5^3...+(2n-1)^3$.

7. Найти сумму n членов ряда:

$$\frac{1^2}{1}+\frac{1^2+2^2}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3}+...+\frac{1^2+2^2+...+k^2}{k}.$$

8. Найти сумму: $\dfrac{2}{3+1}+\dfrac{2^2}{3^2+1}+\dfrac{2^3}{3^4+1}+...+\dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}+1}$.

9. Найти сумму: $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{15}+...+\dfrac{1}{(n+1)^2-1}$.

10. Найти сумму:

$1+2\cdot 3+2\cdot 4\cdot 5+2\cdot 4\cdot 6\cdot 7+...+2\cdot 4\cdot 6\times...\times(2(k-1)(2k-1)+...$.

11. Найти сумму: $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+...+\dfrac{n-1}{n!},\quad n\geq 2$.

1.12. Найти сумм: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+n\cdot n!$.

1.13. Найти сумму: $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

1.14. Найти сумму: $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$.

III. Возвратные последовательности, рекуррентные соотношения

III.1 Линейные однородные рекуррентные соотношения (ЛОРС)

Нередко встречаются последовательности, в которых, начиная с некоторого номера, каждый член выражается через предыдущие.

Например, арифметическая и геометрическая прогрессии

Последовательность 1, 4, 7, …, 31, … – арифметическая прогрессия с формулой общего члена $u_n = a + (n-1)d$, *a = 1, d = 3.*

Последовательность 1, 3, 9, …, 81, … – геометрическая прогрессия с формулой общего члена $u_n = aq^{n-1}$, *a = 1, q = 3.*

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (1) называется *возвратной* (рекуррентной) порядка k, если для некоторого k и всех n выполняется соотношение вида

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + \ldots + p_k a_n = 0 \quad (2),$$

где коэффициенты p_i (i = 1, …, k) не зависят от n.

Выше представленные арифметическая и геометрическая прогрессии примеры рекуррентных последовательностей порядка 1.

Формула $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n^2$ задает рекуррентную последовательность порядка 2. Если задать первые два члена последовательности, например, $u_1 = 1,\ u_2 = 2$ (начальные условия), получим: 1, 2, 3, 5, …

Формула $u_{n+3} = u_{n+2}u_{n+1} + u_n - 1$ задает рекуррентную последовательность порядка 3. Задав начальные условия $u_1 = 1,\ u_2 = 2, u_3 = 2$, получим: 1, 2, 2, 4, 9, 37, …

Пример. Найти рекуррентное соотношение для $\sigma_m(n) = 1^m + 2^m + \ldots + n^m$. Здесь $\sigma_0(n) = 1^0 + 2^0 + \ldots + n^0$, $\sigma_1(n) = 1 + 2 + \ldots + n$, $\sigma_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ и т.д.

Решение. Воспользуемся формулой бинома Ньютона и получим следующие соотношения:

$$(n+1)^m = n^m + C_m^1 n^{m-1} + C_m^2 n^{m-2} + \ldots + C_m^{m-1} n + C_m^m;$$

$$((n-1)+1)^m = (n-1)^m + C_m^1 (n-1)^{m-1} + C_m^2 (n-1)^{m-2} + \ldots + C_m^{m-1}(n-1) + C_m^m;$$

$$(2+1)^m = 2^m + C_m^1 2^{m-1} + C_m^2 2^{m-2} + \ldots + C_m^{m-1} 2 + C_m^m;$$

$$(1+1)^m = 1^m + C_m^1 1^{m-1} + C_m^2 1^{m-2} + \ldots + C_m^{m-1} 1 + C_m^m.$$

Сложим полученные равенства по частям и получим:

$$(n+1)^m = 1 + C_m^1 \sigma_{m-1}(n) + C_m^2 \sigma_{m-2}(n) + \ldots + C_m^{m-1} \sigma_1(n) + C_m^m \sigma_0(n).$$

Или,

$$\sigma_{m-1}(n) = \frac{1}{C_m^1}\Big((n+1)^m - 1 - C_m^2 \sigma_{m-2}(n) - \ldots - C_m^{m-1}\sigma_1(n) - C_m^m \sigma_0(n)\Big).$$

В частности; $\sigma_0(n) = 1^0 + 2^0 + \ldots + n^0 = n$; $\sigma_1(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

$$\sigma_2(n) = \frac{1}{C_3^1}\Big((n+1)^3 - 1 - C_3^2\sigma_1(n) - C_3^3\sigma_0(n)\Big) =$$

$$= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\sigma_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ и т.д. Можно вычислить суммы любого сколь угодно большого порядка.

Данный способ вычисления громоздок и нерационален, если нам нужен член последовательности с большим номером и нам необходима формула общего члена последовательности.

Пусть задана рекуррентная последовательность (1) с соотношением (2). *Функция* $\acute{r}_n = f(n)$, $n \in \boldsymbol{N}$ *называется* решением рекуррентного соотношения*, если при подстановке выражения* $f(n)$ *в это соотношение оно оказывается справедливым для каждого* n.

Например, функция $\acute{r}_n = n^3$ *является решением рекуррентного соотношения* $\acute{r}_{n+4} = 4\acute{r}_{n+3} - 6\acute{r}_{n+2} + 4\acute{r}_{n+1} - \acute{r}_n$.

Действительно, $\acute{r}_{n+1} = (n+1)^3$, $\acute{r}_{n+2} = (n+2)^3$, $\acute{r}_{n+3} = (n+3)^3$, $\acute{r}_{n+4} = (n+4)^3$. Откуда видим, что

$$4\acute{r}_{n+3} - 6\acute{r}_{n+2} + 4\acute{r}_{n+1} - \acute{r}_n = 4(n+3)^3 - 6(n+2)^3 + 4(n+2)^3 - n^3 =$$

$$= n^3 + 12n^2 + 48n + 64 = (n+4)^3 = \acute{r}_{n+4}.$$

Для последовательности Фибоначчи $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ соотношения второго порядка общее решение имеет вид :

$u_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$. В частном случае, когда $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, решение имеет вид: $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Убедитесь в этом самостоятельно.

Не существует универсального способа решения рекуррентных соотношений, но для частных видов, таких как линейных рекуррентных соотношений, такие способы найдены. Рассмотрим эти алгоритмы решений.

Определение

Линейным однородным рекуррентным соотношением (ЛОРС) с постоянными коэффициентами порядка k называется формула вида $u_{n+k} = F(u_n, ..., u_{n+k-1})$ или

$$\boldsymbol{a_{n+k} = \alpha_1 \cdot a_{n+k-1} + \alpha_2 \cdot a_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k \cdot a_n,}$$

где a_i – некоторые числа, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Определение. Пусть последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (1) задана соотношением вида

$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + \ldots + p_k a_n = 0$ (2). Тогда многочлен вида:

$$P(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \ldots + p_{k-1} x + p_k \qquad (3)$$

называется *характеристическим* для возвратной последовательности (1).

Общее решение характеристического уравнения, если r_1, r_2, r_k – его корни и все они различны, имеет вид:

$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \ldots + c_r r_r^n,$$

c_i определяется начальными условиями, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Алгоритм решения ЛОРС

Схема отыскания решения

$a_{n+k} = \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k a_n$

1. Составляем характеристическое уравнение

$x^k = \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} + \ldots + \alpha_k x^0$ и находим корни x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

2. Если x_i кратности 1, то общее решение ЛОРС имеет вид

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i^n \text{ или } f(n) = c_1 \tilde{o}_1^n + c_2 \tilde{o}_2^n + \ldots + c_k \tilde{o}_k^n$$

Если x_i кратности r_i, то общее решение ЛОРС имеет вид

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} (c_{i1} + \acute{n}_{i2} n^1 + c_{i3} n^2 + \ldots + c_{ir} n^{r-1}) x_i^n$$

Пример 1. Решите ЛОРС: $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n$, $a_0 = 3$, $a_1 = -4$ (4)

Решение. Корни характеристическое уравнения: $x^2 - 6x + 8$ есть $x_1 = 2$,
$x_2 = 4$, корни кратности 1.

Для этих корней запишем общее решение:
$a_n = c_1 \cdot (x_1)^n + c_2 \cdot (x_2)^n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 4^n$.

Начальные условия однозначно дают значения коэффициентов c_1 и c_2.
$a_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 4^0 = c_1 + c_2 = 3$;
$a_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 4^1 = 2c_1 + 4c_2 = -4$.
Из системы линейных уравнений относительно c_1 и c_2

$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ 2c_1 + 4c_2 = -4 \end{cases}$, имеем решение: $c_1 = 8$ и $c_2 = -5$.

В итоге, решение (4): $a_n = 8 \cdot 2^n - 5 \cdot 4^n$.

Пример 2. Решите ЛОРС: $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$, $a_0 = 5$, $a_1 = 6$. (5)

Характеристическое уравнение для (5): $x^2 - 6x + 9$.
Корни этого уравнения: $x_1 = x_2 = 3$ кратности 2.

Тогда общее решение (5) имеет вид
$a_n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot (x_1)^n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot 3^n$. Коэффициенты c_1 и c_2 определяются однозначно из начальных условий:
$a_0 = (c_1 + c_2 \cdot 0)3^0 = c_1 = 5$;
$a_1 = (c_1 + c_2 \cdot 1)3^1 = (c_1 + c_2)3 = 6$.

Имеем систему $\begin{cases} c_1 = 5 \\ 3c_1 + 3c_2 = 6 \end{cases}$,

из которой: $c_1 = 5$ и $c_2 = -3$.
Итак, решение (5): $a_n = (5 - 3n) \cdot 3^n$.

Пример 3. Решите ЛОРС $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 6a_{n+1} - 8a_n$, $a_0 = 9$, $a_1 = -9$, $a_2 = -9$. (6)

Для (6) характеристическое уравнение имеет вид:

$$x^3 - 3x^2 + 6x + 8.$$

Корни этого уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ $x_1 = 4$ кратности 1.

Тогда общее решение (6) имеет вид:
$a_n = c_1 \cdot (x_1)^n + c_2 \cdot (x_2)^n + c_3(x_3)^n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot (-2)^n + c_3 \cdot 4^n$.

Начальные условия однозначно определяют коэффициенты c_1, c_2, c_3.

$a_0 = c_1 \cdot 1^0 + c_2 \cdot (-2)^0 + c_3 \cdot 4^0 = c_1 + c_2 + c_3 = 9;$
$a_1 = c_1 \cdot 1^1 + c_2 \cdot (-2)^1 + c_3 \cdot 4^1 = c_1 - 2c_2 + 4c_3 = -9;$
$a_2 = c_1 \cdot 1^2 + c_2 \cdot (-2)^2 + c_3 \cdot 4^2 = c_1 + 4c_2 + 16c_3 = -9;$

Решение системы $\begin{cases} \acute{n}_1 + \acute{n}_2 + \acute{n}_3 = 9 \\ \acute{n}_1 - 2\acute{n}_2 + 4\acute{n}_3 = -9 \\ \acute{n}_1 + 4\acute{n}_2 + 16\acute{n}_3 = -9 \end{cases}$

есть $c_1 = 7$, $c_2 = 4$ и $c_3 = -2$.
В итоге имеем решение (6): $\boldsymbol{a_n} = 7 \cdot 1^n + 4 \cdot (-2)^n - 2 \cdot 4^n$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти решение ЛОРС второго порядка

1. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 6 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 5 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = 11$, $\boldsymbol{a_1} = 3$.
2. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 2 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} + 6 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = 11$, $\boldsymbol{a_1} = 11 - 5\sqrt{7}$.
3. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 6 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 5 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = 11$, $\boldsymbol{a_1} = 3$.
4. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 2 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 10 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 3 + 21i$.
5. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 10 \cdot a_{n+1} - 25 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 3$, $a_1 = -20$.
6. $\boldsymbol{a_{n+2}} = -6 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 15 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 2i\sqrt{6}$.
7. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 8 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 15 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 4$.
8. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 4 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} + 5 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 7$, $a_1 = 11$.
9. $\boldsymbol{a_{n+2}} = \boldsymbol{a_{n+1}} + 7/4 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.
10. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 8 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 16 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 8$, $a_1 = 44$.
11. $\boldsymbol{a_{n+2}} = (\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 2\sqrt{10} \cdot \boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 7$, $a_1 = 2\sqrt{2} + 10\sqrt{5}$.
12. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 5 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 4 \cdot \boldsymbol{a_n}\, \boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$.
13. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 2 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 5 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $a_0 = 5$, $a_1 = 6i + 5$.

Найти решение ЛОРС третьего порядка

14. $\boldsymbol{a_{n+3}} = 3 \cdot \boldsymbol{a_{n+2}} - 3 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} + \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = 2$, $\boldsymbol{a_1} = 4$, $\boldsymbol{a_2} = 12$.
15. $\boldsymbol{a_{n+3}} = -3 \cdot \boldsymbol{a_{n+2}} + 4 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} + 12\boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = 6$, $\boldsymbol{a_1} = -5$, $\boldsymbol{a_2} = 29$.
16. $\boldsymbol{a_{n+3}} = 10 \cdot \boldsymbol{a_{n+2}} - 33 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} + 36\boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = 0$, $\boldsymbol{a_1} = 1$, $\boldsymbol{a_2} = 2$.
17. $\boldsymbol{a_{n+3}} = 3 \cdot \boldsymbol{a_{n+2}} + 10 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 24 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = 2$, $a_1 = -3$, $a_2 = -69$.
18. $\boldsymbol{a_{n+3}} = 12 \cdot \boldsymbol{a_{n+2}} - 48 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} + 64 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = 2$, $a_1 = -16$, $a_2 = 64$.
19. $\boldsymbol{a_{n+3}} = 4 \cdot \boldsymbol{a_{n+2}} + 11 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 30 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = 0{,}2$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$.
20. $\boldsymbol{a_{n+3}} = 8 \cdot \boldsymbol{a_{n+2}} - 20 \cdot \boldsymbol{a_{n+1}} + 16 \cdot \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = -3$, $a_1 = -13$, $a_2 = -56$.

21. $\boldsymbol{a_{n+3}} = 4\cdot \boldsymbol{a_{n+2}} + 7\cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 10\cdot \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = 3$, $a_1 = 29$, $a_2 = 33$.
22. $\boldsymbol{a_{n+3}} = 5\cdot \boldsymbol{a_{n+2}} - 7\cdot \boldsymbol{a_{n+1}} + 3\cdot \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = 11$, $a_1 = 34$, $a_2 = 97$.
23. $\boldsymbol{a_{n+3}} = 11\cdot \boldsymbol{a_{n+2}} + 29\cdot \boldsymbol{a_{n+1}} - 39\cdot \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0}= 27$, $a_1 = -17$, $a_2 = -77$.
24. $\boldsymbol{a_{n+3}} = 12\cdot \boldsymbol{a_{n+2}} - 45\cdot \boldsymbol{a_{n+1}} + 50\cdot \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_0} = -1$, $a_1 = 37$, $a_2 = 404$.

III.2. Линейные рекуррентные соотношения (ЛРС)

Последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_k,$ – неоднородная линейная рекуррентная последовательность порядка k , *если существуют натуральное число* k , *числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ($\alpha_k \neq 0$), действительные или комплексные, и функция $b_n = f(n)$ такие, что

$$u_{n+k} = \alpha_1 u_{n+k-1} + \alpha_2 u_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k u_n + b_n\,, \quad (1)$$

Рекуррентное соотношение (1) называется *неоднородным линейным рекуррентным соотношением порядка k* (сокращенно: ЛРС).

Рекуррентное соотношение

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n\,. \quad (2)$$

есть *ассоциированное с* (1) однородное линейное рекуррентное соотношение.

Не существует общего алгоритма решения таких соотношений. Но ход решения таких задач, как никогда, подчеркивает единый характер математики. Вспомните методы решения систем линейных уравнений и дифференциальных уравнений.

Решение ЛРС основано на теореме:

Теорема. *Общее решение ЛРС* (1) *есть сумма любого частного решения данного неоднородного соотношения и общего решения ассоциированного с ним однородного рекуррентного соотношения* (2).

Именно нахождение частного решения достаточно сложная задача, для которых существуют определенные методы, связанные видом $b_n = f(n)$.

Алгоритм решения ЛРС

Пусть дано соотношение (ЛРС):

$$u_{n+k} = \alpha_1 u_{n+k-1} + \alpha_2 u_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k u_n + f(n)\,, \quad (1)$$

Всегда есть возможность представления $f(n)$ в виде $R_m(n)\cdot\lambda^n$, $R_m(n)$ – многочлен степени m от переменной n. Например:

$$f(n) = 10n - 3 = (10n - 3)1^n = R_1(n)\cdot 1^n\,,$$

или $f(n) = 3^n \cdot n^2 + 3^{n+1} = (n^2 + 3) \cdot 3^n = R_2(n) \cdot 3^n$.

Записываем ЛРС в виде

$$u_{n+k} - \alpha_1 \cdot u_{n+k-1} - \alpha_2 \cdot u_{n+k-2} - \cdots - \alpha_k \cdot u_n = R_m(n) \cdot \lambda^n.$$

1 шаг. Выпишем ассоциированное с (1) ЛОРС:

$u_{n+k} - \alpha_1 \cdot u_{n+k-1} - \alpha_2 \cdot u_{n+k-2} - \ldots - \alpha_k \cdot u_n = 0$ и найдем его общее решение.

а) характеристическое уравнение:

$x^k - \alpha_1 \cdot x^{k-1} - \alpha_2 \cdot x^{k-2} - \ldots - \alpha_k \cdot x^0 = 0$;

б) его корни x_i, где $i = 1, \ldots, k$. Если x_i – различны, то общее решение соответствующего ЛОРС имеет вид:

$$\overline{u_n} = c_1 \cdot (x_1)^n + c_2 \cdot (x_2)^n + c_3 \cdot (x_3)^n + \ldots + c_k \cdot (x_k)^n.$$

2 шаг. Найдем частное решение u_n^* ЛРС (1):

а) в случае, когда λ – не корень характеристического уравнения $x^k - \alpha_1 \cdot x^{k-1} - \alpha_2 \cdot x^{k-2} - \ldots - \alpha_k = 0$, то $u_n^* = Q_m(n) \cdot \lambda^n$, где $Q_m(n)$ – многочлен степени m от переменной n;

б) в случае, когда λ – корень характеристического уравнения $x^k - \alpha_1 \cdot x^{k-1} - \alpha_2 \cdot x^{k-2} - \ldots - \alpha_k = 0$, кратности r, то $u_n^* = n^r \cdot Q_m(n) \cdot \lambda^n$, где $Q_m(n)$ – многочлен степени m от переменной n. Далее, подставляем u_n^* в исходное ЛРС и находим коэффициенты в многочлене $Q_m(n)$.

3 шаг. Общее решение ЛРС(1) есть сумма общее решение ассоциированной ЛОРС $\overline{u_n}$ и частного решения ЛРС u_n^*: $u_n = \overline{u_n} + u_n^*$. Начальные условия однозначно определяют коэффициенты c_i.

Задача 1. Найти решение линейного рекуррентного соотношения второго порядка: $a_{n+2} = 18 \cdot a_{n+1} - 81 \cdot a_n + 128$, $a_0 = 5$, $a_1 = 2$.

Перепишем ЛРС в виде $a_{n+2} - 18 \cdot a_{n+1} + 81 \cdot a_n = 128 \cdot 1^n$.

1. Выписываем соответствующий ЛОРС:

$$a_{n+2} - 18 \cdot a_{n+1} + 81 \cdot a_n = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$x^2 - 18x + 81 = 0$; $(x - 9)^2 = 0$;

$x_1 = x_2 = 9$ – корни характеристического уравнения совпали, следовательно, их кратность равна 2. Тогда общее решение

$$\overline{a_n} = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot (x_1)^n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot 9^n.$$

2. Находим a_n^* – частное решение ЛРС. По условию $f(n) = R_m(n) \cdot \lambda^n = 128 \cdot 1^n = R_0(n) \cdot \lambda^n$, где $R_0(n) = 128$ – многочлен нулевой степени от переменной n, а $\lambda = 1$ – не корень характеристического уравнения соответствующего ЛОРС. Следовательно, $a_n^* = Q_m(n) \cdot \lambda^n = Q_0(n) \cdot 1^n$, где $Q_0(n)$ – многочлен нулевой степени от переменной n, в общем виде $Q_0(n) = c$. Таким образом, $a_n^* = c \cdot 1^n$.

Далее, подставляем a_n^* в исходное ЛРС (*) и находим коэффициент c в многочлене $Q_0(n)$:

$c \cdot 1^{n+2} - 18c \cdot 1^{n+1} + 81c \cdot 1^{n} = 128 \cdot 1^{n}$;

$c - 18c + 81c = 128$; $64c = 128$; $c = 2$.

Следовательно, получили $a_n^* = c \cdot 1^n = 2 \cdot 1^n = 2$.

3. Находим общее решение ЛРС, оно представляет собой сумму общего решения соответствующего ЛОРС $\overline{a_n}$ и частного решения ЛРС a_n^*, то есть $a_n = \overline{a_n} + a_n^*. = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot 9^n + 2$.

Осталось с помощью начальных условий найти коэффициенты c_1, и c_2.

$a_0 = (c_1 + c_2 \cdot 0)\, 9^0 + 2 = c_1 + 2 = 5$;

$a_1 = (c_1 + c_2 \cdot 1)\, 9^1 + 2 = 9c_1 + 9c_2 + 2 = 2$.

Решая систему $\begin{cases} \acute{n}_1 + 2 = 5, \\ 9c_1 + 9c_2 + 2 = 2 \end{cases}$, получим $c_1 = 3$, $c_2 = -3$. Таким образом, решение ЛРС имеет вид:

$a_n = (3 - 3n) \cdot 9^n + 2$.

Задача 2. Найти решение линейного рекуррентного соотношения: $a_{n+2} = 10 \cdot a_{n+1} - 25 \cdot a_n + 50 \cdot 5^n.$, $a_0 = 7$, $a_1 = 50$.

Перепишем ЛРС в виде

$a_{n+2} - 10 \cdot a_{n+1} + 25 \cdot a_n = 50 \cdot 5^n$.

1. Выписываем соответствующий ЛОРС:

$a_{n+2} - 10 \cdot a_{n+1} + 25 \cdot a_n = 0$;

составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$x^2 - 10x + 25 = 0$; $(x - 5)^2 = 0$;

$x_1 = x_2 = 5$ – корень кратности 2. Тогда общее решение ЛОРС имеет вид:

$\overline{a_n} = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot (x_1)^n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot 5^n$.

2. Находим a_n^* – частное решение ЛРС. По условию

$f(n) = R_m(n) \cdot \lambda^n = 50 \cdot 5^n = R_0(n) \cdot \lambda^n$, где $R_0(n) = 50$ -многочлен нулевой степени от переменной n, а $\lambda = 5$ совпадает с корнем x_1 кратности 2 характеристического уравнения соответствующего ЛОРС. Следовательно, $a_n^* = n^r \cdot Q_m(n) \cdot \lambda^n = n^2 \cdot Q_0(n) \cdot 5^n$, где $Q_0(n) = c$ - многочлен нулевой степени от переменной n. Таким образом, $a_n^* = n^n \cdot c \cdot 5^n$. Далее, подставляем a_n^*в исходное ЛРС и находим коэффициент $\boldsymbol{c}$:

$c\cdot(n+2)^2\cdot 5^{n+2} - 10c\cdot(n+1)^2\cdot 5^{n+1} + 25c\cdot n^2\cdot 5^n = 50\cdot 5^n$

$25c\cdot(n+2)^2 - 50c\cdot(n+1)^2 + 25c\cdot n^2 = 50;$

$c\cdot(n^2+4n+4) - 2c\cdot(n^2+2n+1) + c\cdot n^2 = 2;$ c = 1.

Следовательно, $a_n^* = n^2\cdot c\cdot 5^n = n^2\cdot 5^n$.

3. Выписываем общее решение ЛРС:

$a_n = \overline{a_n} + a_n^* = (c_1 + c_2\cdot n)\cdot 5^n + n^2\cdot 5^n$.

С помощью начальных условий находим коэффициенты c_1, и c_2:
$a_0 = (c_1 + c_2\cdot 0)\, 5^0 + 0^2\cdot 5^2 = c_1 = 7;$
$a_1 = (c_1 + c_2\cdot 1)\, 5^1 + 1^2\cdot 5^1 = 5c_1 + 5c_2 + 5 = 50.$

Решая систему $\begin{cases} c_1 = 7, \\ c_1 + c_2 + 1 = 10 \end{cases}$, получим $c_1 = 7$, $c_2 = 2$. Таким образом, решение ЛРС имеет вид:
$a_n = (7 + 2n)\cdot 5^n + n^2\cdot 5^n = (7 + 2n + n^2)\cdot 5^n$.

Задача 3. Найти решение линейного рекуррентного соотношения:
$a_{n+2} = 6\cdot a_{n+1} - 8\cdot a_n + 3n + 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = -11$. (Самостоятельно).

Задачи для самостоятельного решения

Решить рекуррентные соотношения:

1. $\boldsymbol{a_{n+1}} - a_n = n$, $a_1 = 1$;

2. $\boldsymbol{a_{n+1}} = 4\cdot\boldsymbol{a_n} + 6$, $a_0 = -5$.

3. $\boldsymbol{a_{n+1}} = \boldsymbol{a_n} + n + 1$, $a_0 = 1$.

4. $\boldsymbol{a_{n+1}} = 5\cdot\boldsymbol{a_n} + 4n^2 + 6n - 7$, $a_0 = 3$.

5. $\boldsymbol{a_{n+1}} = 3\cdot\boldsymbol{a_n} + 5\cdot 2^n$, $a_0 = -1$.

6. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 4\cdot\boldsymbol{a_{n+1}} - 3\cdot\boldsymbol{a_n} - 8n + 4$, $a_0 = 5$, $a_1 = 13$.

7. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 12\cdot\boldsymbol{a_{n+1}} - 36\cdot\boldsymbol{a_n} + 50n + 5$, $a_0 = 6$, $a_1 = 21$.

8. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 2\cdot\boldsymbol{a_{n+1}} - \boldsymbol{a_n} + 6n + 3$, $a_0 = 9$, $a_1 = 12$.

9. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 7\cdot\boldsymbol{a_{n+1}} - 10\cdot\boldsymbol{a_n} + (6n-1)\cdot 3^n$, $a_0 = 6$, $a_1 = 2$.

10. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 4\cdot\boldsymbol{a_{n+1}} - 4\cdot\boldsymbol{a_n} + 2^n\cdot(24n + 8)$, $a_0 = 4$, $a_1 = 4$.

11. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 49\cdot\boldsymbol{a_n} - 48$, $a_0 = 9$, $a_1 = 15$.

12. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 7\cdot\boldsymbol{a_{n+1}} - 12\cdot\boldsymbol{a_n} + 12n + 8$, $a_0 = 4$, $a_1 = 11$.

13. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 8\cdot\boldsymbol{a_{n+1}} - 16\cdot\boldsymbol{a_n} + 32\cdot 4^n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 24$.

14. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 10\cdot\boldsymbol{a_{n+1}} - 21\cdot\boldsymbol{a_n} + 12n + 16$, $a_0 = 1$, $a_1 = 12$.

15. $\boldsymbol{a_{n+2}} = 12\cdot\boldsymbol{a_{n+1}} - 35\cdot\boldsymbol{a_n} + 48n^2 + 32n + 50$, $a_0 = 26$, $a_1 = 143$.

IV. Элементы комбинаторика

IV.1. Правило суммы и правило произведения. Комбинаторные числа без повторений

Правило суммы

На практике часто приходится делать выбор в разных исходных ситуациях, в которых нас интересует количество всевозможных выборов при разных условиях. Это приводит к формированию тех или иных комбинаций объектов. Например, сколько существует возможностей организовать отпуск, если имеются путевки в три санатория и пять курортов? Задачи такого плана называют *комбинаторными задачами.* Раздел математики, в котором изучаются комбинаторные задачи, называют *комбинаторикой.*

Задача. На тарелке лежат 6 яблок и 5 груш. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение. Так как в задаче идёт речь о выборе “яблока или груши”, то его можно осуществить 6 + 5 = 11 способами.

Справедливо следующее утверждение:

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b - n способами, причём любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то выбор “a или b” можно сделать $m + n$ способами.

На языке теории множеств, где символом n(A) обозначим число элементов множества A, данное правило формулируется так:

Теорема. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Множества могут иметь и непустое пересечение, тогда для двух множеств имеет место теорема.

Теорема. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. (1)

Доказательство. Множество $A \cup B$ есть объединение трёх непересекающихся множеств: $A \setminus (A \cap B)$, $A \cap B$ и $B \setminus (A \cap B)$. Каждое из них соответственно имеет элементов: $n(A) - n(A \cap B)$, $n(A \cap B)$ и $n(B) - n(A \cap B)$. Следовательно, число элементов во множестве $A \cup B$ равно:

$$n(A) - n(A\cap B) + n(A\cap B) + n(B) - n(A\cap B)= n(A) + n(B) - n(A\cap B).$$

Формула (1) есть частный случай для двух множеств и её можно распространить на любое конечное число элементов. Например, для трёх множеств А, В и С: $n(A \cup B \cup C) =$
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Далее рассмотрите примеры с ответами, которые даны только с одной целью: убедиться в правильности понимания материала.

1. Сколькими способами можно выбрать билет из10 билетов «Спортлото» и 15 билетов «Столото»?

Ответ: 25**.**

2. Сколькими способами можно организовать культпоход, если в городе действуют три театра, три музея и органный зал?

Ответ: 7.

2. Сколькими способами можно пирожное из 6 эклеров, 7 тортиков и 3 медовиков?

Ответ: 16**.**

3. Сколькими способами можно выбрать один фрукт на завтрак из пяти груш, трех апельсинов и четырех яблок?

Ответ: 12.

Прямое произведение множеств

Правило произведения

Определение Прямым произведением двух множеств А и В называется множество всех упорядоченных пар (a ; $в$) таких, что $a \in$ А и $в \in$ В. Обозначение: $A \times B$.

$$A \times B = \{ (a\ ;\ в) \mid a \in A \text{ и } в \in B \}$$

Аналогично определяется прямое произведение n множеств

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \ldots,\ a_n \in A_n \}$$

Здесь: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - упорядоченная n-ка.

Считаем, что $(a\ ;\ в) = (a_1\ ;\ в_1)$, если $a = a_1$ и $в = в_1$.

Пример 1. Найдите $A \times B$, если А = { 1, 2 }, b = { a, b, c }.

Ответ: $A \times B$ = { (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)}.

Пусть А и В - числовые множества. Тогда элементы прямого произведения этих множеств будут упорядоченными парами чисел, которые можно изобразить на плоскости и получить фигуру.

Как найти число элементов прямого произведения двух множеств? Рассмотрим это на примере. Пусть А = {a, d, c}, т.е. n(A) = 3 и B ={p, q}, где n(B) = 2. Выпишем все элементы множества $A \times B$:

(a, p)	(b, p)	(c, p)
(a, q)	(b, q)	(c, q)

В этой таблице n(A) столбцов и n(B) строк. Поэтому

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Можно сформулировать и более общее утверждение.

Теорема. Если $A_1, A_2, ..., A_n$ - конечные множества, то

$$n(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \cdots \cdot n(A_n).$$

Пример 2. Сколько двузначных чисел можно образовать используя только цифры 0, 1, 2?

Решение. Первую цифру двузначного числа мы можем выбрать только из множества $A = \{ 1, 2 \}$ (почему?), а вторую цифру из множества $B = \{0, 1, 2 \}$. Получим: 10, 11, 12, 20, 21, 22. Их шесть. $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 2 \cdot 3 = 6$.

Решение таких задач можно проводить на основе следующего утверждения, обобщающего теорему:

Правило произведения. Если первый элемент a_1 упорядоченной n-ки можно выбрать m_1 способом, второй элемент a_2, после выбора a_1, - m_2 способами (независимо от того, как выбран a_1) и т.д., элемент a_n, после выбора $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ и независимо от того, как они выбраны, - m_n способами, то общее число получаемых n-ок равно $m = m_1 m_2 \cdots m_n$.

Правило произведения является следствием *теоремы о мощности прямого произведения конечного числа конечных множеств.*

Задача. Сколькими способами можно сформировать формулу логики высказываний длины 4, если задано множество символов $\{A, D, C, D, E, \wedge, \vee\}$? Порядок выполнения операций: $\wedge, \vee$.

Пример 3. Имеются чайные чашечки четырех видов, и блюдца трех типов. Сколькими способами можно сформировать чайную пару.

Решение. Гласную букву можно выбрать 2-мя способами, согласную можно выбрать 4-мя способами. По правилу произведения выбор «гласной и согласной» можно осуществлять $2 \cdot 4 = 8$ способами.

Пример 4. Сколько существует двузначных четных чисел в десятичной системе счисления?

Решение. Выбираются две цифры из множества $\{0,1,2,...,8,9\}$. Первая цифра может быть любой, кроме нуля. Поэтому ее можно выбрать 9-ю способами. Вторая цифра может быть любой из множества $\{2,4,6,8,0\}$, ее можно выбрать 5-ю способами. Следовательно, четных двузначных чисел по правилу произведения будет

$n \cdot m = 45$, где $n = 9$, $m = 5$.

Пример 5. В микроавтобусе 15 мест, одно из которых – место водителя. Сколькими способами могут сесть в автобус 15 человек, если место водителя могут занять только трое из них.

Решение. Начнем с места водителя. Имеется $n_1 = 3$ способа занять его место. Следующее место может занять любой из 12 оставшихся человек, т.е. $n_2 = 12$ и т. д. По правилу произведения получаем всего возможностей $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_{10} = 3 \times 12 \times 11 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 12!$.

Далее представлены задачи, практически устного характера, чтобы, изучающий вопросы комбинаторики, имел возможность убедиться в правильности понимания правил суммы и произведения

1. Определите количество двузначных чисел в 10-ной системе счисления, если в числе нет одинаковых цифр.

Ответ: 81.

2. Сколько существует нечётных трехзначных чисел?

Ответ: 450.

3. На ферме есть 20 овец и 24 козы. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну козу? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?

Ответ: 480, 437.

4. Сколькими способами можно выбрать по одному экземпляру каждого учебника, если имеется 3 экземпляра учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 10 экземпляров учебника информатики?

Ответ: 210.

5. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетным числом?

6. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

Ответ: 20.

7. Сколькими способами можно выбрать согласную и гласную буквы из слова «здание»? Из слова «кабинет»?

Ответ: 9.

8. В корзине лежат 12 яблок и 10 груш. Сын выбирает из нее яблоко или грушу, после чего дочь берет и яблоко, и грушу. В каком случае дочь имеет большую свободу выбора: если сын взял яблоко или если он взял грушу?

Ответ: Если сын выбрал яблоко.

9. Сколькими способами можно совершить круговой рейс из А в В и обратно, если на обратном пути выбирать новую дорогу и известно, что А и В соединены семью дорогами?

Ответ: 42.

10. У некоторых народов принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дают не более трех имен, а общее число имен равно 300?
Ответ: 26 820 600.

11. Сколько существует нечётных трехзначных чисел?
Ответ: 450.

12. На ферме есть 20 овец и 24 козы. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну козу? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?
Ответ: 480, 437.

13. Сколькими способами можно выбрать по одному экземпляру каждого учебника, если имеется 3 экземпляра учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 10 экземпляров учебника информатики?
Ответ: 210.

14. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетным числом?

15. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?
Ответ: 20.

16. Сколькими способами можно выбрать согласную и гласную буквы из слова «здание»? Из слова «кабинет»?
Ответ: 9.

17. Сколькими способами можно совершить круговой рейс из А в В и обратно, если на обратном пути выбирать новую дорогу и известно, что А и В соединены семью дорогами?
Ответ: 42.

18. У некоторых народов принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дают не более трех имен, а общее число имен равно 300?
Ответ: 26 820 600.

Определение. k-элементные подмножества n-элементного множества A ($k \le n$) называются сочетаниями без повторений из n элементов этого множества по k. Обозначение: C_n^k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Определение. *Размещением* из *n* элементов по *m* называется любое упорядоченное подмножество из *m* элементов множества, состоящего из *n* различных элементов.

Пример 6. Пусть имеется множество, содержащее четыре буквы:

$\{A; B; C', D\}$. Запишем все возможные размещения из четырех указанных букв по две. Таких размещений 12: *AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC*.

Заметим, что размещения отличаются порядком входящих в них элементов и их составом. Размещения *AB* и *BA* содержат одинаковые буквы, но порядок их расположения различен. Поэтому эти размещения считаются разными.

На практике чаще представляет интерес количество размещений, а не их конкретный вид. Число размещений из n элементов по m будем обозначать символом A_n^m, где $m < n$. Формула для определения числа размещений из n элементов по m имеет вид:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Можно ли узнать число участников шахматных соревнований, если в них было: а) 20 юношей и 12 девушек;

б) 20 юношей и 27 школьников?

2. ГИА по математике сдавали 250 школьников. Оценку ниже 5 получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 школьников. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

3. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 - на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на лыжах, и на коньках?

4. В группе из 100 туристов 70 человек говорят на английском языке, 45 – на французском и 23 знают английский и французский. Сколько человек не знают ни английского ни французского языка?

5. В отделе магазина посетители обычно покупают либо парфюмерный подарочный набор, либо одну коробку конфет, либо один набор и одну коробку конфет. В один из дней продано 57 наборов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили набор и коробку конфет?

6. В отряде из 40 человек 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того, ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы ?

7. Найдите $n(A \cap B \cap C)$, если известно, что $n(A) = 13$, $n(B) = 18$, $n(C) = 9$, $n(A \cup B \cup C) = 40$.

8. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги A, B и C. Результаты опроса оказались таковы:

книгу А читало 25 учащихся, книгу В - 22, книгу С - также 22. Книгу А или В читали 33 ученика, А или С - 32 , В или С - 31; все три книги прочитали 10 учащихся. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учащихся не читали ни одной из этих трёх книг?

9. Сколько среди первых 50 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

10. В спортивном лагере 65% ребят умеют играть в футбол, 70% - в волейбол, 75% - в баскетбол. Каково наименьшее число ребят, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

11. Определите количество чисел среди первой сотни натуральных, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7.

12. Множество А содержит 8 элементов. Сколько элементов в множестве В, если прямое произведение $A \times B$ состоит из:

а) 80 элементов; б) 8 элементов; в) 0 элементов?

13. Сколькими способами можно составить трёхбуквенные слова, используя буквы { а, б, в, г }, если: а) буквы в слове не повторяются ; б) буквы повторяются?

14. Сколькими способами можно расставить в определенном порядке три цветка из пяти различных?

15. В классе 20 учеников. Сколькими способами можно выбрать старосту и профорга, если каждый ученик может быть выбран только на одну должность ?

16. Для дежурства в классе в течение недели выделены 6 учащихся. Сколькими способами можно установить очередность дежурства, если каждый учащийся дежурит один раз?

17. Сколькими способами можно расставить различные белые шахматные фигуры на три заданные клетки доски?

18. Сколькими способами можно рассадить в ряд 3 человека, 4 человека?

19. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если:

а) цифры не повторяются;

б) рядом не стоят две одинаковые цифры;

в) одна из цифр обязательно единица?

20. Сколькими способами можно разложить 4 письма в 7 ящиков по одному в каждый?

21. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

22. Сколькими способами можно выбрать согласную и гласную из слова “значение”? из слова “паркет”?

23. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата - белый и черный ? Решите ту же задачу, если нет ограничений на цвет квадратов. Решите её, если надо выбрать два белых квадрата.

24. Для проведения экзамена создается комиссия из двух преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из пяти преподавателей?

25.Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной горизонтали или одной вертикали?

26. Из 3 экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 6 экземпляров учебника физики надо выбрать комплект, содержащий все три учебника по одному разу. Сколькими способами это можно сделать ?

27. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает либо яблоко, либо апельсин, после чего Надя выбирает из оставшихся фруктов и яблоко, и апельсин. Сколько возможно таких выборов? При каком выборе Вани у Нади больше возможностей выбора?

28. Сколько чисел, меньших 10^5, можно записать из цифр 7, 6, 4? Сколько среди них нечётных?

29. Сколько чисел, меньших 10^4, можно составить из цифр 3, 5, 8? Сколько среди них чётных?

30. Какие из ниже рассматриваемых соединений являются сочетаниями, а какие нет:

а) сколькими способами можно выбрать три краски из шести различных;

б) сколькими способами можно выбрать из 6 человек комиссию, состоящую из трёх человек;

в) сколькими способами можно рассадить 6 человек за круглым столом?

31. Сколькими способами можно поставить 8 шашек на чёрные поля доски?

32. Сколькими способами можно поставить на чёрные поля доски 12 белых и 12 чёрных шашек?

33. У одного ученика 11 книг по математике, а у другого - 15 книг. Сколькими способами они могут выбрать по 3 книги каждый для обмена?

34. Сколько существует таких перестановок семи учеников, при которых три определённых ученика находятся рядом друг с другом?

35. На книжной полке стоит собрание сочинений в 30 томах. Сколькими различными способами их можно переставить, чтобы:

а) тома 1 и 2 стояли рядом ;

б) тома 3 и 4 не стояли рядом ?

36. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов ?

37. В колоде 36 карт, из них 4 туза. Сколькими способами можно выбрать 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза ?

38. Сколькими способами можно заполнить карточки “Спортлото” (зачеркнуть 6 номеров из 49)? Во скольких случаях из выбранных шести номеров три окажутся угаданными правильно? Во скольких случаях правильно будут угаданы 4 номера? 5 номеров? 6 номеров?

39. На пять сотрудников выделены три путёвки. Сколькими способами их можно распределить, если : а) все путёвки различны, б) все путёвки одинаковы?

40. Сколько диагоналей имеет выпуклый n-угольник?

41. На первой из двух параллельных прямых лежит 10 точек, на второй - 20. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

42. В теннисном турнире участвуют 10 мужчин и 6 женщин. Сколькими способами можно составить 4 смешанные пары?

43. Сколько всевозможных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы в каждом числе содержалась одна цифра 1? содержалась цифра 1?

44. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить 1 сержанта и 3 солдата для патрулирования ?

45. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник ,если в этот день должно быть 5 занятий: по алгебре, геометрии, истории, географии и литературе, причём алгебра и геометрия не должны следовать непосредственно друг за другом?

46. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров?

47. Сколько существует различных телефонных номеров, если считать, что каждый номер содержит не более семи цифр (телефонный номер может начинаться с нуля)?

47. Пусть буквы некоторой азбуки образуются как последовательности точек, тире и пробелов. Сколько различных букв можно образовать, .если использовать 5 символов?

48. В некотором государстве нет двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства (наибольшее число зубов 32)?

49. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Сколько делителей имеет число $q = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ некоторые натуральные числа (делители 1 и q включаются)?

50. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если в каждом номере кет повторяющихся цифр?

51. Сколько существует различных исходов эксперимента, связанного с *n* бросаниями монеты? (Исходы двух экспериментов считаются различными, если очередность выпадения гербов в этих экспериментах не совпадает с очередностью выпадения цифр.)

52. Сколько существует таких перестановок семи учеников, при которых три определенных ученика находятся рядом друг с другом?

53. На полке 30 томов книг. Сколькими различными способами их можно переставить, чтобы; в) тома 1 и 2 стояли радом; б) тома 3 и 4 рядом не стояли?

54. Сколько различных аккордов можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждый аккорд содержит от трех до десяти звуков?

55. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и 5 членов некоторой комиссии. Сколько различных комиссий может быть составлено?

56. Десятизначное число ***n*** задано в троичной системе счисления. Сколько существует таких чисел (число может начинаться с нуля), если:

а) цифры могут повторяться?

б) сколько среди них четных чисел?

в) цифры 2 и 1 в числе не могут стоять рядом?

г) цифры в числе расположены симметрично?

д) каждая цифра повторяется не менее трех раз?

Самостоятельная работа

Вариант формируется по модулю 4

1. Имеется пять видов конвертов и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

2. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный?

3. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный, так чтобы они не лежали на одной горизонтали и вертикали?

4. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами это можно сделать?

5. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. Сколькими
способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?

6. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

7. Имеется 6 пар перчаток разных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну – на правую так, чтобы эти перчатки были
различных размеров?

8. Из трех различных экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 6 экземпляров учебника физики надо выбрать по одному экземпляру каждого
учебника. Сколькими способами это можно сделать?

9. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова "КАМЗОЛ"?

10. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?

11. Составляются знаки, состоящие из геометрической фигуры (окружности, квадрата, треугольника или шестиугольника), буквы и цифры. Сколько таких знаков можно составить?

12. При составлении экипажа космического корабля необходимо учитывать психологическую совместимость экипажа. Известно, что команда состоит из трех человек: капитана, инженера и врача. Причем на должность капитана есть четыре кандидата k_1, k_2, k_3, k_4, на место инженера – 3 кандидата i_1, i_2, i_3 и на место врача – 3 кандидата v_1, v_2, vi_3. Проведенные исследования показали, что командир k_1 психологически совместим с инженерами i_1, i_3 и врачами v_2, v_3, командир k_2 – с инженерами i_1, i_2 и со всеми врачами, командир k_3 – с инженерами i_1, i_2 и врачами v_1, v_3, командир k_4 – со всеми инженерами и врачом v_2. Кроме того, инженер i_1 психологически несовместим с врачом v_3, инженер i_2 – с врачом v_1, инженер i_3 – с врачом v_2. Сколькими способами можно составить команду корабля?

13. В Стране Чудес есть четыре города: А, Б и В и Г. Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В - 4 дороги. Из города А в город Г - две дороги, и из города Г в город В - тоже две дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?

14. В магазине одежды продаются 5 видов костюмов троек (брюки, пиджак, жилет), 7 видов брюк, 3 вида пиджаков и 2 вида жилетов, кроме того, 3 вида костюмов двоек
(брюки, пиджак). Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую брюки,
пиджак и жилет?

15. У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

16. В книжном магазине лежат 6 экземпляров романа И.С. Тургенева “Рудин”, 3 экземпляра его романа “Дворянское гнездо” и 4 экземпляра романа “Отцы и дети”. Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы “Рудин” и “Дворянское гнездо”, и 7 томов, содержащих романы “Дворянское гнездо” и “Отцы и дети”. Все книги различны. Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

17. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

18. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты, по одной каждой масти?

19. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

20. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из неё яблоко или апельсин (что-то одно), после чего Надя берет и яблоко и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?

21. Сколькими способами можно поставить на доску две шашки - белую и черную, так, чтобы белая шашка могла бить черную? Черная белую? Обе шашки могут бить друг друга? Ни одна не может бить другую?

IV.2. Комбинаторные числа с повторениями

Размещения с повторениями. Упорядоченные m –элементные подмножества , выбранные из n различных элементов множества с повторениями элементов, называются размещениями с повторениями и обозначаются $\overline{A_n^m}$.

Теорема. $\overline{A_n^m} = n^m$.

Доказательство. Этот факт следует непосредственно из определения прямого произведения множеств из n элементов.

Пример 1. Кодовый замок в подъезде состоит из 10 кнопок с номерами 0, 1, …, 9. Код состоит из 4 разрядов, цифры набираются независимо от других. Укажите число возможных комбинаций?

Здесь $n = 10$, $m = 4$ и ответом будет 10^4.

Пример 2. Рассмотрим вектор длины m, каждая координата которого может принимать всего 2 значения: 0 или 1. Сколько будет таких векторов?
Это есть выборка, объемом m из двух элементов. Ответ: 2^m

Перестановки с повторениями. Пусть имеется n элементов, среди которых k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа и т. д., k_s элементов s-го типа, причем $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$. Упорядоченные выборки из таких n элементов по n называются перестановками с повторениями, их число обозначается $P_n(k_1, k_2, ..., k_s)$.

Пример. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове "комбинаторика"?
Решение. Буква "а" входит 2 раза (k_1=2), буква "к" – 2 раза (k_2 = 2), "о" – 2 раза (k_3 = 2), "и" – 2 раза (k_4 = 2), буквы "м", "б", "т" , "н" , "р" входят по одному разу: $k_5 = k_6 = k_7 = k_8 = k_9 = 1$.

$$P_{13}(2,2,2,2,1,1,1,1,1) = \frac{13!}{2!2!2!2!} = 778377600$$

Сочетания с повторениями. Пусть имеется n типов элементов, каждый тип содержит не менее m одинаковых элементов. Неупорядоченная выборка объемом m из имеющихся элементов называется сочетанием с повторением. Число сочетаний с повторениями обозначается $\overline{C_n^m}$.

m- элементное подмножество, выбранное из множества элементов n типов (число элементов каждого типа не менее m) называется *сочетаниями с повторениями* и обозначается $\overline{C_n^m}$.

Теорема. $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$.

Пример 3. В книжном магазине имеется 7 видов тетрадей. Школьнику надо купить 4 тетради. Сколькими способами он может это сделать, если тетрадей каждого вида достаточно много

Решение: $C_{7+4-1}^4 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7\times 8\times 9\times 10}{1\times 2\times 3\times 4} = 210$.

Пример 4. Пусть $V = \{1, 2, 3\}$. Объем выборки m= 2. Перечислить перестановки, размещения, сочетания, размещения с повторениями, сочетания с повторениями.
1. Перестановки: {*123*, *132c*, *213*, *231*, *312*, *321*}. P_3 =3!=6.
2. Размещения по 2 элемента из трех: {(*12*), (*23*), (*13*), (*21*), (*32*), (*31*)}. $A_3^2 = 3!/1! = 6$
3. Сочетания по 2 элемента из трех: {(*12*), (*13*), (*23*)}.

$$C_3^2 = \frac{3!}{1!2!} = 3.$$

4. Размещения с повторениями по 2 элемента из трех:
{12), (*23*), (*13*), (*21*), (*32*), (*32*), (*11*), (*22*), (*33*)}. $A_3^2 = 3^2 = 9$.
5. Сочетания с повторениями по 2 элемента из трех*:*
{(*12*), (*23*), (*13* (*11*), (*22*), (*33*)}.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько вариантов расписания одного дня ФМФ на четыре предмета из 12 можно составить?

2. В комиссию (ГЭК) по математике включают приказом ректора 7 человек: председатель, заместитель, члены комиссии. Сколько существует вариантов распределения обязанностей?

3. Сколько вариантов составления букета из 10 гвоздик и 5 хризантем существует?

4. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

5. Определите число встреч 16 команд на чемпионате (в два круга, каждая команда встречается дважды с другой).

6. Вы забыли трехзначный код счета. Какое количество попыток по угадыванию кода можно совершить в худшей ситуации?

7. В день празднования 1-ого Мая организуется эстафет 800+400+200+100. Сколькими способами по этапам эстафеты можно расставить 15 участников?

8. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу 20 учащихся одного класса так, чтобы при этом девочки и мальчики не стояли рядом? Девочек и мальчиков в классе поровну.

9. На полке стоят 20 книг по истории и философии. Найдите наибольшее количество вариантов комплекта, содержащего 5 книг по истории и 5 книг по философии, если на полке 10 книг по каждому предмету.

10. Найдите число способов распределения мест команды из пяти человек в забеге на 100 метров, если всего 20 участников соревнований.

11. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не могла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находиться с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски.)

12. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?

13. Сколькими способами можно установить порядок выступления восьми участников конкурса?

14. Определите, сколькими способами можно разбить 30 человек на 3 команды по 10 человек.

15. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

16. Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 разноцветных лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов)?

17. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?

18. Сколько вариантов распределения восьми мишеней между четырьмя стрелками, если каждому выделено две мишени?

19. Сколько списков дежурных по два человека (каждый дежурит один раз) можно составить из 12 студентов?

20. Составляют четырехзначные числа из цифр 0, 2, 4, 6, 8. Сколько среди них содержат цифру 4 (цифры в числах не повторяются)?

21. Найдите число вариантов распределения десяти групп по десяти аудиториям (расположены подряд), причем две выделенные группы должны быть в соседних аудиториях.

22. Определить число различных расписаний первого тура для 16 шахматистов (расписания считаются различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитываются).

23. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж доставлен какой-либо один материал?

24. Определите число способов распределения 10 писем по 10 конвертам.

25. Поезд метро делает 16 остановок, на которых выходят все пассажиры. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 100 пассажиров, вошедших в поезд на конечной остановке?

26. Лифт останавливается на 10 этажах. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 8 пассажиров, находящихся в лифте?

27. Восемь авторов должны написать книгу из шестнадцати глав. Сколькими способами возможно распределение материала между авторами, если два человека напишут по три главы, четыре – по две, два – по одной главе книги?

28. В шахматном турнире участвуют 8 шахматистов третьего разряда, 6 – второго и 2 перворазрядника. Определить количество таких составов первого тура, чтобы шахматисты одной категории встречались между собой (цвет фигур не учитывается).

29. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа: не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4 и 5 одновременно.

30. Семь яблок и два апельсина надо положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один апельсин и чтобы количество фруктов в них было одинаковым. Сколькими способами это можно сделать?

31. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

32. Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

IV.3. Бином Ньютона

Теорема. Какие бы ни были натуральные числа n и k, для любых чисел $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_k}$ имеет место формула (1)

$$(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \cdots + \boldsymbol{x_n})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{n_1} + \ldots + \boldsymbol{n_k} = \boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}!\boldsymbol{n_2}!\ldots\boldsymbol{n_k}!} \boldsymbol{x_1^{n_1} x_2^{n_2}} \ldots \boldsymbol{x_k^{n_k}}. \quad (1)$$

Частным случаем данной теоремы является биномом Ньютона, так принято называть выражение

$$(\mathrm{x} + \mathrm{a})^{\mathrm{n}} = (x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{C}_n^k\right) x^k a^{n-k} = C_n^0 x^{n-0} a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + \ldots + C_n^m x^{n-m} a^m + \ldots + C_n^n x^0 a^n. (*)$$

Числа C_n^k называют ***биномиальными коэффициентами***.

Свойства коэффициентов бинома

1. Число членов разложения бинома на единицу больше показателя n, т.е. имеем n + 1 слагаемых данного бинома.

Вспомните формулы сокращенного умножения. Сколько слагаемых у следующих формул: $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})^2$, $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^3$?

2. Общий вид члена разложения бинома: $T_{k+1} = C_n^k x^k a^{n-k}$ (*), T_{k+1} есть (k + 1)-ый член разложения бинома.

Например, для бинома $(a + b)^5$ первый член $T_1 = T_{0+1} = C_5^0 a^{5-0} b^0$; третий член разложения – $T_3 = T_{2+1} = C_5^2 a^{5-2} b^2$. Определите вид T_5, сколько слагаемых у данного бинома?

3. Сумма показателей при $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{a}$ в биноме (*) всегда равна **n** – показателю степени бинома.

4. Биноминальные коэффициенты (*) возрастают до середины разложения и затем убывают; коэффициенты пары членов, равноотстоящих от начала и конца разложения, равны между собой. При четном **n** имеется один средний наибольший коэффициент; при **n** нечетном имеется два средних наибольших коэффициента.

5. Сумма биномиальных коэффициентов

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n$$

Все свойства необходимо доказать!

Соотношение $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$ (докажите его) дает основание для удобного и красивого способа записи коэффициентов (*): треугольник Паскаля.

$C_1^0 \quad C_1^1$	1 1
$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$	1 2 1
$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$	1 3 3 1
$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$	1 4 6 4 1
$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$	1 5 10 10 5 1

. . . .

Пример 1. Раскрыть скобки и привести подобные члены в выражении $\mathbf{(3x+2y)^4}$, используя формулу бинома Ньютона.

Решение

$$(3x+2y)^4 = C_4^0 \cdot (3x)^0 \cdot (2y)^4 + C_4^1 \cdot (3x)^1 \cdot (2y)^3 +$$
$$C_4^2 \cdot (3x)^2 \cdot (2y)^2 + C_4^3 \cdot (3x)^3 \cdot (2y)^1 +$$
$$+ C_4^4 \cdot (3x)^4 \cdot (2y)^0 = 16 \cdot y^4 + 4 \cdot 3 \cdot x \cdot 8 \cdot y^3 +$$
$$+ 6 \cdot 9 \cdot x^2 \cdot 4 \cdot y^2 + 4 \cdot 27 \cdot x^3 \cdot 2 \cdot y + 81 \cdot x^4 =$$
$$= 16y^4 + 96xy^3 + 216x^2y^2 + 216x^3y + 81x^4$$

Пример 2. Найти коэффициент при $\mathbf{x^2}$ в разложении $\mathbf{(2x+3)^6}$.
Решение.

В данной задаче требуется найти коэффициент только при $\mathbf{x^2}$, поэтому нет необходимости раскрывать все выражение по формуле бинома Ньютона. Достаточно рассмотреть только одно слагаемое

$$C_6^2(2x)^2 3^{6-2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot 4\cdot x^2\cdot 3^4 = 15\cdot 4\cdot 81\cdot x^2 = 4860\cdot x^2 .$$

Таким образом, $\mathbf{x^2}$ в разложении $\mathbf{(2x+3)^6}$ будет иметь коэффициент 4 860.

Пример 3. Найти 13-ый член разложения $\left(\sqrt[3]{\mathbf{3}} + \sqrt{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{15}}$

$$T_{13} = T_{12+1} = C_{15}^{12}\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^{12} = C_{15}^{3}\cdot 3\cdot 2^6 =$$

$$= \frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 3\cdot 2^6 = 87\,360.$$

Пример 4. Вывести формулу куба суммы трех элементов: ***x, y, z***.

Решение. Уравнение $n_1 + n_2 + n_3 = 3$ имеет в неотрицательных целых числах, например, такие решения: (3, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1), а также всевозможные их перестановки, всего 10 вариантов:

P(3, 0, 0) = 1, P(2, 1, 0) = 3, P(1, 1, 1) = 6.

Итак,

$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})^3 = \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{y}^3 + \boldsymbol{z}^3 + 3(\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}^2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^2\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}^2\boldsymbol{y}) + 6\boldsymbol{xyz}$

Пример 5. Найдите коэффициент при x^5 для многочлена $(2 - x + x^2)^5$.

Решение. Используя полиномиальную формулу (1), получим:

$$\left(2 - x + x^2\right)^5 = \sum_{n_1+n_2+n_3=5}\frac{5!}{n_1!n_2!n_3!}2^{n_1}(-x)^{n_2}(x^2)^{n_3}$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=5}\frac{5!}{n_1!n_2!n_3!}2^{n_1}(-1)^{n_2}x^{n_2+2n_3}.$$

Для нахождения коэффициента при $\boldsymbol{x^5}$ необходимо решить в целых неотрицательных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 = 5 \\ n_2 + 2n_3 = 5 \end{cases}$$

В таблице представим все решения этой системы:

n_1	n_2	n_3	$\frac{5!}{n_1!n_2!n_3!}2^{n_1}(-1)^{n_2}$
2	1	2	-120
1	3	1	-40
0	5	0	-1

Итак, коэффициент при x^5 равен -120 – 40 – 1 = -161.

Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить по формуле БН и упростить

1) $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^7$; 2) $(a-2b)^6$; 3) $(1+2x)^5$; 4) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8$;

5) $(1+\sqrt{2})^5$; 6) $(1-\sqrt{2})^5$; $(\sqrt{6}+\sqrt{12})^4$; $\frac{1}{27}(\sqrt{3}-\sqrt{15})^6$.

2. Найти алгебраическую сумму коэффициентов многочлена относительно ***x***, получаемого в разложении бинома $(3x - 4)^{17}$.

3. Найдите 10-ый член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{15}$.

4. Найдите номер члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x}+1/x\right)^6$, не содержащего ***x***.

5. Найдите пятый член бинома , если отношение биноминального коэффициента четвертого члена к биноминальному коэффициенту третьего члена равно 10/3.

6. Найти сумму биноминальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах, в разложении бинома $(x + y)^n$, если биноминальный коэффициент третьего члена на 9 больше биноминального коэффициента второго члена.

7. Найдите 7-ой член разложения бинома $\left(a^2\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}/a\right)^n$, если биноминальный коэффициент третьего члена равен 36.

8. Сколько членов разложения бинома $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7})^{36}$ являются целыми числами?

9. Найдите два средних члена разложения:

1) $(a^3 + ab)^{31}$; 2) $(a^3 + ba)^{30}$

10. Найдите номер наибольшего члена разложения $(1 + 0{,}001)^{1000}$.

11. Определите, сколько рациональных членов содержится в разложении:

1) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{20}$; 2) $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{50}$; 3) $\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{2}\right)^{100}$;

4) $\left(\sqrt[3]{12}+\sqrt[6]{3}\right)^{30}$.

12. Найдите коэффициент при t^k в разложении

1) $(1+2t-3t^2)^8,\ k=9$; 2) $(1-t+2t^2)^{10},\ k=7$;

3) $(2+t-2t^3)^{10},\ k=5$; 4) $(2+t^4+t^7)^{15},\ k=17$.

13. Докажите, что: 1) число $\sqrt{10}[(1+\sqrt{10})^{100}-(1-\sqrt{10})^{100}]$целое; 2) число 11^{10} -1 делится на 100; 3) число $101^{100}-1$ делится на 10000; 4) число 11^{100} -1 делится на 1000.

14. В разложении $(a+1/a)^{12}$ найти коэффициент при a^8.

15. В разложении $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$ найти коэффициент при x^4.

16. Найти число x, если известно, что третий член разложения $(x+x^{\lg x})^5$ по формуле бинома Ньютона равен 10^6.

Зачетные работы по комбинаторике

Работа 1

1. Вычислить:

1) 3!, 5!, (7! – 5!) / 4!, (10! + 8!) /8!; **2**) 100! / 99! -99!/98!; **3**) (n – 2)! / n!, [1/n! – 1/(n + 1)!]·n!; **4**) P_4, A_4^3, $A_5^2/P_2+A_{10}^5/(7P_5)$;

5) $P_1A_2^1+P_2A_3^2+P_3A_4^3+P_4A_5^4-P_1P_2P_3P_4$.

2. Найдите решения уравнений в натуральных числах:

1) $A_n^2=6$; 3) $P_{n+3}=720A_n^5P_{n-5}$;

2) $\frac{n!-(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{1}{6}$; 4) $P_{n+5}/(A_{n+3}^{k+3}P_{n-k})=240$.

3. Сколькими способами можно расставить 7 различных книг на полке?

4. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры не повторяются)? Сколько среди них кратных пяти?

5. Сколькими способами из группы в 25 человек можно выбрать старосту, профорга, культорга?

6. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг так, чтобы три книги одного автора стояли рядом?

7. Сколько существует пятизначных чисел, составленных из четных цифр?

Работа 2

1. Вычислить

1) $C_5^3,\ C_4^2,\ C_{25}^{23},\ C_{100}^{99}$; 2) $C_5^3C_4^2+C_4^2C_3^1+C_3^1C_3^0$;

3) $\left(\frac{1}{3}C_6^2-\frac{1}{28}C_8^3+\frac{1}{65}C_{15}^3\right)/(P_3A_5^3)$.

2. Найдите натуральные числа, удовлетворяющие условиям:

1) $C_n^{n-2}+2n=9,\quad 3C_{n+1}^2-2A_n^2=n$;
2) $C_{2n}^{n+1}/C_{2n+1}^{n-1}=\frac{16}{29}$; 3) $C_n^5 < C_n^3$;
4) $A_{n+2}^4/P_{n+2}-143/(4P_{n-1}) < 0$.

3. Докажите:
1) $C_5^0+C_5^1+C_5^2=C_5^3+C_5^4+C_5^5$;
2) $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1},\ nC_{2n}^n=(n+1)\,C_{2n}^{n+1}$;
3) $C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+1}$;
4) $C_n^2+2C_n^3+\ldots+(n-1)\,C_n^n=(n-2)\,2^{n-1}+1$.

4. Сколькими способами можно из 18 человек назначить
а) два делегата;
б) два делегата с разными полномочиями?

5. Сколькими способами можно назначить патруль из трех солдат и одного офицера, если в подразделении 30 солдат и три офицера?

6. Найти число делителей числа 110.

Работа 3

Вариант 1.

а) Десятизначное двоичное число, в котором нет рядом стоящих единиц, разделили на две равные части — левую и правую. Сколько существует десятизначных двоичных чисел, в каждом из которых слева содержится четное число единиц, а справа — нечетное? Числа могут начинаться с нуля.

б) Из множества всех семизначных двоичных чисел удалили все те числа, в которых нет рядом стоящих единиц. Сколько чисел осталось? Числа могут начинаться с нуля.

в) Сколько существует семизначных восьмеричных чисел, в каждом из которых содержится не менее двух цифр 4 и каждое число начинается с нечетной цифры? Повторы цифр возможны.

г) В трехзначном семеричном числе точно две одинаковые цифры, причем, обе они нечетные, и одна цифра, которая может быть как четной, так и нечетной. Сколько существует таких чисел, если с нуля числа не могут начинаться?

д) Из множества всех возможных четырехзначных десятичных чисел удалили все те числа, в которых содержится хотя бы одна из цифр 2,3,5, 7. Сколько чисел осталось? Числа могут начинаться с нуля. Повторы цифр возможны.

е) Из цифр множества {2, 3, 6, 7, 8} выбирают три цифры и записывают ими пятизначное число. Сколько возможно таких чисел, если каждая из выбранных трех цифр входит в пятизначное число не менее одного раза? Например, если выбрали цифры 2, 3, 6, то искомыми являются числа 22336, 63222, 66632 и т. д.

ж) Сколько трехзначных чисел можно составить из десятичных цифр, если каждая четная цифра в числах встречается четное число раз, а на повторы нечетных цифр ограничений нет? С нуля числа не начинаются.

з) Сколько существует трехзначных семеричных чисел, в каждом из которых нет нулей и нет цифры 2, и четные цифры нигде не стоят рядом? Повторы цифр возможны.

Вариант 2.

а) Из множества всех возможных восьмизначных двоичных чисел, начинающихся с единицы, удалили все те числа, в каждом из которых единиц больше, чем нулей. Сколько чисел осталось?

б) Даны два двоичных числа а и b. Оба могут начинаться с нуля. Число a пятизначное, число b трехзначное. Эти числа приставили одно к другому: слева a, справа b. В результате получилось восьмизначное число. Сколько существует восьмизначных чисел, если в числе a четное число единиц, а в числе b — нечетное?

в) Сколько существует шестизначных семеричных чисел, в каждом из которых одна из цифр повторяется точно два раза, а все остальные встречаются не более чем по одному разу? Числа могут начинаться с нуля.

г) Сколько существует трехзначных восьмеричных чисел, в каждом из которых цифры идут в порядке возрастания, и ни в одном из чисел нет цифр 1 и 5? Числа могут начинаться с нуля.

д) Сколько существует трехзначных семеричных чисел, в каждом из которых точно две одинаковые четные цифры, и одна цифра, которая может быть как четной, так и нечетной? Числа могут начинаться с нуля.

е) Сколько существует трехзначных семеричных чисел, в которых нет нулей и нет цифры 2, и нечетные цифры нигде не стоят рядом? Повторы цифр возможны.

ж) Из множества всех возможных трехзначных семеричных чисел, которые могут начинаться с нуля, удалили те числа, в которых первая цифра является четной, а вторая и третья нечетными, причем, цифры в каждом числе идут в порядке убывания. Сколько чисел осталось?

з) Сколько существует пятизначных пятеричных чисел, не содержащих цифры 4, в каждом из которых цифра 3 встречается точно два раза, а на повторяемость других цифр ограничений нет? Числа могут начинаться с нуля.

V. Элементы булевой алгебры

Джордж Буль — ирландский математик и логик (1815—1864) — впервые сформулировал основные положения алгебры логики

V.1. Аксиомы и формулы булевой алгебры

В булевой алгебре операции выполняются не над числами, а над высказываниями, представленными двоичными переменными. В результате получаются сложные высказывания. Эти сложные высказывания записываются в виде формул, также носящих двоичный характер.

Двоичная переменная в булевой алгебре определяется следующими аксиомами: **A=1, если $A \neq 0$; $A = 0$, если $A \neq 1$.**

В обычной алгебре (школьной) над переменными выполняются операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и т. д.

В булевой же алгебре основными являются только три операции. Их называют ***дизъюнкция, конъюнкция, инверсия.***

Операция дизъюнкции обозначается знаком $\vee$, который ставится между двумя переменными: $\boldsymbol{A \vee B}$.

Однако, если учесть некоторое сходство операции дизъюнкции с арифметическим сложением, то вместо знака $\vee$ можно писать знак обычного арифметического сложения, не забывая, разумеется, что знак плюс обозначает дизъюнкцию: $\boldsymbol{A + B}$**.** Этим знаком мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Операция дизъюнкции, называемая иногда логическим сложением, определена следующими аксиомами:

0+0=0; 0+1=1; 1+0=1; 1+1=1.

Первые три аксиомы согласуются с обычной арифметикой. А вот четвёртая может вызвать недоумение. Здесь необходимо иметь в виду, что единица обозначает не количество, а тот факт, что некоторое утверждение является истинным.

В связи с тем, что в сложном высказывании два простых высказывания соединены союзом ИЛИ, дизъюнкцию иногда называют операцией ИЛИ.

Вторая операция — конъюнкция. Она обозначается знаками **$\wedge$, &**. Но, как и в случае дизъюнкции, этими знаками лучше не пользоваться.

Конъюнкция — «родня» арифметическому умножению, поэтому вместо знака $\wedge$ будем использовать точку: $A{\cdot}B$ либо вообще не указывать никакого знака. При этом надо помнить, что если две буквы записаны рядом без какого-либо знака, то это значит, что они соединены знаком конъюнкции: $\boldsymbol{A \cdot B = A \wedge B = A \& B = AB}$ **.**

Операция конъюнкции (логическое умножение) определяется следующими аксиомами:

$0 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 1 = 0$; $1 \cdot 0 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$.

Конъюнкцию нередко называют операцией **И**.

Третья операция — инверсия, или отрицание. Она обозначается чертой над буквой: $\overline{\boldsymbol{A}}$ **или** $\mathbf{A}'$.

Инверсия определяется следующими аксиомами:

$\overline{0} = 1$; **$\overline{1} = 0$**.

т. е. отрицание лжи есть истина, отрицание истины есть ложь.

Аксиомы булевой алгебры

$0 + 0 = 0$	(1)	$0 + 1 = 1$	(2)
$1+ 0 = 1$	(3)	$1 + 1 = 1$	(4)
$0 \cdot 0 = 0$	(5)	$0 \cdot 1 = 0$	(6)
$1 \cdot 0 = 0$	(7)	$1 \cdot 1 = 1$	(8)
$\overline{0} = 1$	(9)	$\overline{1} = 0$	(10)

Свойства дизъюнкции и конъюнкции

Рассмотрим следующие основные свойства:

а) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством коммутативности: $\boldsymbol{A + B = B + A}$**;** $\boldsymbol{AB = BA}$;

б) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством ассоциативности: $\boldsymbol{(A + B) + C = A + (B + C)}$**;**
$\boldsymbol{(AB)C = A(BC)}$**,**

что позволяет удалять скобки:

$\boldsymbol{(A + B) + C = A + B + C}$**;** $\boldsymbol{(AB)C = ABC}$**;**

в) конъюнкция дистрибутивна относительно дизъюнкции:

$\boldsymbol{A(B + C) = AB + AC}$**,**

что позволяет раскрывать скобки в выражениях, например:

$\boldsymbol{A(B+C+D+E)=AB+AC+AD+AE}$**,**

и выносить общий множитель за скобки:

$\boldsymbol{ABC + ABD + ABEF = AB (C + D + EF)}$

$\boldsymbol{AB + ADE + ACD + BCD = A (B + DE) + CD(A + B)}$

г) дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции:

$\boldsymbol{A + BC = (A+ B)(A+ C)}$

$\boldsymbol{A + BCD = (A +B)(A + C)(A+ D)}$

$\boldsymbol{A + BCDE = (A + B)(A + C)(A + D)(A + E)}$ и т.д.;

д) операции дизъюнкции и конъюнкции обладают свойством идемпотентности: $\boldsymbol{A + A = A}$; $\boldsymbol{A \cdot A = A}$, откуда следует, что в булевых многочленах нет ни коэффициентов, ни степеней.

Эти свойства легко доказываются при помощи системы аксиом. Докажем, например, справедливость утверждения: дизъюнкция дистрибутивна относительно конъюнкции. Доказательство представим в виде табл. 1.

A	B	C	$A + BC$	$(A + B)(A + C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Список теорем одной переменной имеет вид:

$A + 0 = A$	(11)	$A \cdot 0 += 0$	(12)
$A + 1 = 1$	(13)	$A \cdot 1 = A$	(14)
$A + A = A$	(15)	$A \cdot A = A$	(16)
$A + \overline{A} = 1$	(17)	$A \cdot \overline{A} = 0$	(18)
$A'' = A$	(19)		

Все теоремы одной переменной доказываются при помощи аксиом путём перебора значений переменной.

Теоремы поглощения, склеивания и де Моргана

Теорема поглощения записывается в двух формах — дизъюнктивной и конъюнктивной, соответственно:

$\boldsymbol{A + AB = A}$; (21)

$\boldsymbol{A(A + B) = A}$. (22)

Выражение (22) можно получить из (21), если знаки дизъюнкции и конъюнкции поменять местами. Докажем первую теорему.

Вынесем за скобки букву A: $\boldsymbol{A + AB = A(1 + B)}$.

Согласно теореме (13) $\boldsymbol{1 + B = 1}$, следовательно $\boldsymbol{A(1 + B) = A \cdot 1 = A}$.

Чтобы доказать вторую теорему, сначала раскроем скобки:

$\boldsymbol{A(A + B) = A \cdot A + AB = A + AB}$.

Получилось выражение, только что доказанное.

Рассмотрим несколько примеров на применение теоремы поглощения при упрощении булевых формул, содержащих более двух переменных.

$$\boldsymbol{ABC + BC = BC(A+1) = BC;}$$
$$\boldsymbol{\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}D = \overline{A}B\overline{C}(1+ D) = \overline{A}B\overline{C};}$$
$$\boldsymbol{A+ AB +ABC = A + AB(1 + C) = A + AB = A}$$
$$\boldsymbol{A\ (A + B + CD) = A + AB + ACD = \ldots} \qquad ?$$
$$\boldsymbol{B(A + B+ CD) = AB + B + BCD = B(A + 1 +CD) = B}$$

Теорема склеивания имеет две формы —дизъюнктивную и конъюнктивную: $\boldsymbol{AB + A\overline{B} = A}$; (23) $\qquad \boldsymbol{(A + B)(A + \overline{B})=A}$. (24)

Вторая теорема получается из первой, если в ней вместо знака конъюнкции поставить знак дизъюнкции, а дизъюнкцию заменить конъюнкцией.

Доказательство.

Вынесем за скобки букву A:

$$\boldsymbol{AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A \cdot 1 = A}, \text{ так как}$$
$$\boldsymbol{B + \overline{B} =1; \quad A \cdot 1 = A.}$$

Доказать вторую теорему самостоятельно!!!

Теорема поглощения, как и теорема склеивания, применяется при упрощении булевых формул.

Теорема де Моргана

Она связывает все три основные операции булевой алгебры — дизъюнкцию, конъюнкцию и инверсию:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B};} \ (25) \qquad\qquad \boldsymbol{\overline{A + B} = \overline{AB}}. \ (26)$$

Первая теорема читается так: инверсия конъюнкции есть дизъюнкция инверсий. Вторая: инверсия дизъюнкции есть конъюнкция инверсий.

Теорема де Моргана применима и к большему числу переменных.

Определение. Булева формула, записанная в виде дизъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с инверсией или без инверсии), либо конъюнкцию некоторых аргументов, то эта формула является представленной в дизъюнктивной нормальной форме (***ДНФ***). Например, выражения

$AB + C\overline{D}, \quad A + \overline{B} + CD\overline{E}, \quad A + B + C + \overline{D}$ представлены в ДНФ

Определение. Если булева формула записана в виде конъюнкции выражений, каждое из которых представляет собой либо отдельный аргумент (с инверсией или без инверсии), либо дизъюнкцию некоторых аргументов, то эта формула является представленной в конъюнктивной нормальной форме (***КНФ***). Например, выражения

А(В + C)$\overline{D}$, $\quad$ (A + $\overline{B}$ + С)D$\overline{E}$, $\quad$ (A + B)(C + $\overline{D}$).

Задачи для самостоятельного решения

1. Примените теорему поглощения: $\overline{A}+\overline{A}B$; $K+KP$.

2. Упростите выражения: $PQ+SPQ+PQRST$; $XYZ+XZ+XZV$; $ABC\overline{D}+ABCD+\overline{A}BC$

3. Упростите: $(B+C)(D+\overline{C})$; $(BC+\overline{D})(BC+D)$; $(B+C)(B+\overline{C})D$; $V(X+YZ)(\overline{X}+YZ)$.

4. Найдите инверсию: $\overline{\overline{BC}\,\overline{D}}$; $\overline{\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}}$.

5. Упростите: $\overline{A+\overline{\overline{B}}\cdot\overline{\overline{C}}+D}\cdot\overline{A}\cdot C$; $\overline{P+Q}\cdot(P+Q)$;
$\overline{A+\overline{B}+C}\cdot(A+\overline{B}+C)+D$; $\overline{RST}\cdot(\overline{R}+\overline{S}+\overline{T})\cdot RST$;
$\overline{\overline{P}+\overline{Q}}+PQRS$.

6. С помощью аксиом найдите номера выражений, равных единице:

1) $0\cdot\overline{0}+\overline{0}\cdot\overline{\overline{0}}+\overline{1}+\overline{\overline{1}}\cdot\overline{0}$;
2) $1\cdot1\cdot\overline{1}+1\cdot\overline{1}\cdot\overline{\overline{1}}+1\cdot\overline{0}\cdot1\cdot0$;
3) $1\cdot\overline{1}\cdot\overline{\overline{1}}+\overline{0}\cdot\overline{\overline{1}}+\overline{0}\cdot1\cdot\overline{1}$;
4) $0\cdot0\cdot\overline{1}+1\cdot1\cdot\overline{0}+0\cdot\overline{1}\cdot\overline{\overline{1}}$;
5) $0\cdot1\cdot1+\overline{1}\cdot\overline{1}\cdot\overline{0}+\overline{0}\cdot\overline{0}\cdot\overline{1}$;
6) $1\cdot1\cdot\overline{\overline{0}}+0\cdot\overline{\overline{1}}\cdot0+\overline{0}\cdot\overline{\overline{1}}\cdot\overline{1}$.

4

7. Найдите номера выражений, равных нулю:

1) $\overline{0}\cdot\overline{\overline{1}}\cdot0+1\cdot\overline{0}+0\cdot1$;
2) $1\cdot0+\overline{0}\cdot1\cdot0+0\cdot\overline{1}$;
3) $1\cdot\overline{0}\cdot\overline{1}+\overline{\overline{0}}\cdot\overline{1}+\overline{\overline{1}}\cdot\overline{\overline{0}}$;
4) $0\cdot1\cdot1+\overline{0}\cdot\overline{1}\cdot\overline{1}+\overline{0}\cdot\overline{1}\cdot\overline{0}$;
5) $\overline{0}\cdot1\cdot\overline{0}\cdot1+\overline{1}\cdot\overline{0}\cdot\overline{1}\cdot\overline{0}+0\cdot\overline{1}\cdot\overline{1}$;
6) $1\cdot1\cdot\overline{0}\cdot\overline{\overline{0}}+\overline{1}\cdot\overline{\overline{1}}\cdot1+\overline{0}\cdot\overline{0}\cdot\overline{\overline{1}}\cdot1$.

8. Найдите значение выражения: $A+A\cdot\overline{A}+1\cdot\overline{A}+0\cdot A\cdot\overline{A}+\overline{A}\cdot\overline{\overline{A}}\cdot1\cdot\overline{A}$.

9. Найдите номера выражений, равных нулю:

1) $A\cdot\overline{A}\cdot A+1\cdot\overline{0}\cdot A+\overline{A}\cdot\overline{0}\cdot1$;
2) $A\cdot\overline{A}\cdot1+A\cdot\overline{A}\cdot\overline{\overline{A}}+A\cdot\overline{1}$;
3) $1\cdot\overline{1}\cdot\overline{A}+\overline{0}\cdot\overline{A}\cdot1+A\cdot\overline{\overline{A}}\cdot\overline{0}$;
4) $0+1\cdot0+A\cdot0+\overline{A}\cdot0+A\cdot\overline{A}$;
5) $A\cdot\overline{A}+\overline{\overline{A}}\cdot\overline{A}+A\cdot\overline{1}+\overline{A}\cdot\overline{1}$;
6) $\overline{0}\cdot A\cdot A\cdot\overline{1}+\overline{0}\cdot A\cdot1\cdot\overline{A}+\overline{1}\cdot A\cdot A$.

10. Дано выражение $AB+C\overline{D}+\overline{E}$. Укажите номера формул, являющихся инверсией заданному выражению:

1) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)E$; 2) $(\overline{A}+\overline{B})E(\overline{C}+D)$; 3) $E(\overline{C}+D)(\overline{A}+\overline{B})$;
4) $(A+B)(C+\overline{D})E$; 5) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+\overline{E}$; 6) $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)+E$.

11. Найдите номера верных формул:

1) $\overline{A(\overline{B}+C)}=\overline{A}+B\overline{C}$; 2) $\overline{ABC(\overline{D}+\overline{E})}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+DE$;
3) $\overline{ABC(P+K)L}=A+B+C+PK+L$;
4) $\overline{\overline{(A+\overline{B})(C+\overline{D})}}=(A+\overline{B})(C+\overline{D})$;

5) $\overline{AB + C\overline{D} + E + F} = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{C} + D) + \overline{E} + \overline{F}$;

6) $\overline{\overline{A\overline{B} + CD + \overline{E}}} = (\overline{A} + B)(\overline{C} + \overline{D})E$.

12. Найдите инверсию выражения и упростите:

$(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{B} + \overline{C})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D})$; $(\overline{X} + \overline{Y})(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})(T + \overline{X} + \overline{Y})$;

$(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D})$.

$(A + \overline{B})(C + \overline{A} + D)$; $AB(C + D + \overline{E})$ записаны в КНФ,

13. Укажите номера формул, представленных в ДНФ.

1) $AB + C\overline{D}$;	1) $AB + A(B + C)$;	1) A ;
2) $A + B + C$;	2) $AB + ABAA$;	2) AA ;
3) $A + BC + \overline{E}$;	3) $B + C + B + CA$;	3) AB ;
4) $P + Q(P + R)$;	4) $A + A(A + A)$;	4) $A + \overline{A}$;
5) $A + A$.	5) $AAA + A$.	5) $A + BC$.

14. Укажите номера формул, представленных в КНФ.

1) $(AC + B)A$;	1) $(A + B)(A + B)$;	1) $A + B$;
2) $A(B + C)$;	2) A ;	2) $A + \overline{B} + \overline{C}$;
3) $B(AB + AB)$;	3) $ABC(D + EF)$;	3) $(A + AA)A$;
4) ABC ;	4) $ABC(D + \overline{D})$;	4) $(A + \overline{A})\overline{A}$;
5) $A + B$.	5) $ABC(D + D)$.	5) BB .

Необходимо заранее договориться, что такое первый, второй или, допустим, пятый аргумент. Для этого удобно пользоваться алфавитным расположением букв. Например, если $f = XY + P\overline{Q}$, то согласно алфавиту первым является аргумент P, вторым — Q, третьим — X, четвёртым — Y. Тогда по набору значений аргументов легко найти 5 значение функции.

Пусть, например, дан набор 1001, тогда $P = 1, Q = 0, X = 0, Y = 1$; $f = 0{\cdot}1 + 1{\cdot}0 = 1$, т. е. на наборе 1001 заданная функция равна единице.

Ещё раз отметим, что набор значений аргументов — это совокупность нулей и единиц. Двоичные числа также являются наборами нулей и единиц. Отсюда возникает вопрос — нельзя ли наборы рассматривать как двоичные числа? Можно, и во многих случаях это очень удобно, особенно, если двоичное число перевести в десятичную систему. Например, если $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$, то набор примет вид 0110. Если его считать двоичным числом, то имеем:

$$0{\cdot}2^3 + 1{\cdot}2^2 + 1{\cdot}2^1 + 0{\cdot}2^0 = 4 + 2 = 6.$$

т. е. заданный набор имеет номер 6 в десятичной системе.

Если по десятичному номеру требуется найти значения аргументов, то поступаем в обратной последовательности: сначала десятичное число переводим в двоичное, затем слева дописываем столько нулей, чтобы общее число разрядов равнялось числу аргументов, после чего находим значения аргументов. Пусть, например, требуется найти значения аргументов *A, B, C, D, E, F* по набору с номером 23. Переводим число 23 в двоичную систему методом деления на два: В результате получаем $23_{10} = 10111_2$. Это число пятизначное, а всего аргументов шесть, следовательно, слева необходимо записать один нуль: $23_{10} = 010111_2$.

Отсюда находим: $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 1$, $F = 1$.

15. Найдите значения функций, если $A = 1$, $C = 0$:

$f = \overline{A} + BC + AC$; $f = A + BCD$; $f = AC + AD$; $f = BC + AC$.

16. Введите в устройство десятичные эквиваленты наборов, на которых функция равна единице:

$f = \overline{A}BC + ABC$; $f = AB + AC$; $f = BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

$f = \overline{A}C + B\overline{C}$; $f = AB + \overline{A}\,\overline{B}C$; $f = A\overline{C} + \overline{A}C$.

17. Булева функция зависит от шести аргументов. Найдите наборы значений аргументов, если десятичные номера их имеют вид: 16; 22; 55; 4; 60.

18. Укажите номера функций, принимающих единичное значение на наборе 12:

1) $f = AB + B\overline{D} + \overline{A}C$;
2) $f = BD + AC + CD$;
3) $f = \overline{D} + \overline{A}C + \overline{B}D$;
4) $f = \overline{C} + BD + \overline{A}\,\overline{B}$;
5) $f = ABC + BD$;
6) $f = \overline{A}\,\overline{C} + AC + BD$.

19. Функция четырёх аргументов принимает единичное значение на наборах 0,1, … ,12, а на остальных — нулевое. На каких наборах функция принимает нулевое значение? (Наборы представить в десятичной системе.)

20. Функция четырёх аргументов на половине наборов принимает нулевое значение, а на остальных — единичное. Сколько существует наборов, на которых функция принимает нулевое значение?

21. Функция трёх аргументов принимает единичное значение на трёх наборах, в двоичных изображениях которых только одна единица. Найти десятичные номера наборов, на которых функция равна единице.

22. Дана функция $f = AB + AC + BC + AD$. Упростите эту функцию при условии, что $A = 0$.

23. Найдите аналитическое выражение функции трёх аргументов *X, Y, Z*, если известно, что она принимает единичное значение только на одном наборе.

V.2. Булевы функции в нормальной форме

К заданию1

Булева алгебра, и особенно та ее часть, которую называют прикладной алгеброй логики, в настоящее время получила широкое развитие. Здесь включены лишь те разделы, которые имеют наибольшее практическое значение.

Дизъюнкция, конъюнкция, инверсия (отрицание)– три главные операции булевой алгебры.

Теорема поглощения записывается в двух формах — дизъюнктивной и конъюнктивной, соответственно: $\boldsymbol{A + AB = A;}$ (1) $\boldsymbol{A(A + B) = A}$. (2)

Теорема склеивания также имеет две формы - дизъюнктивную и конъюнктивную:

$\boldsymbol{AB + AB = A}$; (3) $(\boldsymbol{A + B})(\boldsymbol{A + B}) = \boldsymbol{A}$. (4)

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) формулы булевой алгебры называется равносильная ей форма, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций, т.е. аргументы (с инверсией или без инверсии), или конъюнкцию таких аргументов.

№	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

*Конъюнктивной нормальной формой (**КНФ**)* формулы булевой алгебры называется равносильная ей форма, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций, т.е. аргументы (с инверсией или без инверсии), или дизъюнкцию таких аргументов.

Функции, которые принимают единичное значение только на одном наборе получили специальное обозначение. Называют их минимальными термами, или коротко — минтермами (минтермы нередко называют конституентами единицы).

Определение. ***Минтермом n переменных называется такая их конъюнкция, в которую каждая переменная входит один раз в прямой или инверсной форме***. Обозначаются минтермы буквой m с десятичным индексом, являющимся номером минтерма. Двоичный эквивалент номера минтерма — это набор, на котором минтерм принимает единичное значение. Например, если функция зависит от трёх аргументов A, B, C, то $\boldsymbol{m_0} = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$, $\boldsymbol{m_1} = \overline{A}\ \overline{B}C$, $\boldsymbol{m_2} = \overline{A}\ B\ \overline{C}$, $\boldsymbol{m_3} = \overline{A}\ BC$, и т. д.(См. таблицу)

Если функция зависит от четырёх аргументов (для данной ситуации необходимо составить таблицу самостоятельно), то минтермы с теми же индексами примут вид $m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$, $m_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$, $m_2 = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$, $m_3 = \overline{A}\,\overline{B}CD$ и т.д.

Если функция представлена в виде дизъюнкции минтермов n аргументов, то говорят, что она записана в совершенной дизъюнктивной нормальной форме, сокращённо СДНФ.

СКНФ - функция n переменных, где все, входящие в нее конъюнкции – макстермы (дизъюнкция n переменных, в которую каждая переменная входит один раз в прямой или инверсной форме).

К заданию 2

Теорема. Всякую булеву функцию можно представить в виде

$$f(1, A_2, \dots, A_n) = 1 \cdot f(1, A_2, \dots, A_n) + \overline{1} \cdot f(0, A_2, \dots, A_n).$$

Здесь $f(1, A_2, \dots, A_n)$ и $f(0, A_2, \dots, A_n)$ – функции, полученные из заданной подстановкой в нее вместо A_1 единицы или нуля.

Например, разложим по аргументу A функцию $f = A\overline{B} + \overline{B}CD$:

$f = A\overline{B} + \overline{B}CD = A(1{\cdot}\overline{B} + \overline{B}CD) + \overline{A}(0{\cdot}\overline{B} + \overline{B}CD) = A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}CD.$

Разложить функцию можно по любому аргументу, например, по B:

$$A\overline{B} + \overline{B}CD = B(A \cdot \overline{1} + \overline{1}CD) + \overline{B}(A \cdot \overline{0} + \overline{0}CD) = \overline{B}(A + CD).$$

Например, разложим по аргументу A функцию $f = A\overline{B} + \overline{B}CD$:

$$A\overline{B} + \overline{B}CD = A \cdot (1 \cdot \overline{B} + \overline{B}CD) + \overline{A} \cdot (0 \cdot \overline{B} + \overline{B}CD) =$$
$$A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}CD.$$

Разложить функцию можно по любому аргументу, например, по B:

$$A\overline{B} + \overline{B}CD = B(A \cdot \overline{1} + \overline{1}CD) + \overline{B}(A \cdot \overline{0} + \overline{0}CD) = \overline{B}(A + CD).$$

Пример. Разложить функцию $f = A\overline{B} + C$ по аргументам: сначала по A, затем по B, C и D (заметим при этом, что аргумент D в записи функции отсутствует):

$$f = A\overline{B} + C = A(\overline{B} + C) + \overline{A}(C) = A\overline{B} + AC + \overline{A}C;$$

$$f = A\overline{B} + AC + \overline{A}C = B(AC + \overline{A}C) + \overline{B}(A + AC + \overline{A}C) =$$
$$= ABC + \overline{A}BC + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}C;$$

$$f = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,C = C(AB + \overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}) +$$
$$+ \overline{C}(A\overline{B}) = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C};$$

$$f = ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} = D(ABC +$$
$$+ \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C}) + \overline{D}(ABC + \overline{A}BC +$$
$$+ A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C}) = ABCD + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD +$$
$$+ \overline{A}\,\overline{B}CD + A\overline{B}\,\overline{C}D + ABC\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} +$$
$$+ \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} = (15,7,11,3,9,14,6,10,2,8).$$

К заданию 3

Понятие импликанты

Пусть дана функция $f = AB + BC$. Представим её в СДНФ:

f = (3,6,7). Эта функция содержит три минтерма. Из них можно образовать семь различных функций, каждая из которых является импликантой функции f:

$\varphi_1 = m_3 = \overline{A}BC;$ $\qquad\qquad$ $\varphi_2 = m_6 = AB\,\overline{N}$

$\varphi_3 = m_3 + m_6 = \overline{A}BC + AB\,\overline{N}$

$\varphi_4 = m_7 = ABC$ $\qquad\qquad$ $\varphi_5 = m_6 + m_7 = AB;$

$\varphi_6 = m_3 + m_7 = BC$

$\varphi_7 = m_3 + m_6 + m_7 = AB + BC.$

Условимся считать, что функция $\varphi = 0$ является импликантой вообще всякой функции f. Следовательно, вышеприведённая функция имеет не семь, а восемь импликант.

Если функция представлена в СДНФ, то число её импликант определяется однозначно.

Определение. Всякую функцию φ будем называть импликантой функции ***f***, если все минтермы функции φ входят в множество минтермов функции ***f*** .

Алгебраическая минимизация требует очень большой изобретательности и с практической точки зрения интереса не представляет, за исключением простейших случаев. Многими специалистами предпринимались попытки разработать методы (алгоритмы), позволяющие найти минимальную форму и не требующие никакой изобретательности. Наиболее важным из них является метод Квайна.

Проиллюстрируем его на примере функции четырёх аргументов вида: f =(0,1,3,6,7,8,12,13,14,15).

Запишем минтермы в алгебраической форме:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD +$$
$$+ A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD.$$

Суть метода Квайна весьма проста. Основу его составляет теорема склеивания, которая применяется к каждой паре минтермов заданной функции. Чтобы не пропустить ни одной пары, начнём с нулевого минтерма и поочерёдно сравним его со всеми остальными. Отметим те минтермы, которые отличаются инверсией только одного аргумента, подчёркиваем, а их общую часть запишем отдельно. В данном случае минтермы m_0 и m_1, а также m_0 и m_1 и m_8 дают соответственно:

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C};$$
$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}.$$

Минтермы m_0 , m_1 и m_8 подчёркиваем, при этом ранее подчёркнутый минтерм вторично можно не подчёркивать. Берем минтерм m_1 . Сравниваем его со всеми, кроме нулевого, в том числе и с подчёркнутыми. Получаем: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD = \overline{A}\,\overline{B}D.$

Минтерм m_3 подчёркиваем. Аналогично сравниваем все остальные минтермы независимо от того, подчёркнуты они или нет, после чего заданная функция представится в виде дизъюнкции конъюнкций, полученных в результате склеивания минтермов.

На этом заканчивается первый этап минимизации по методу Квайна. Получилось выражение, все конъюнкции которого содержат не менее трёх аргументов:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + BC\overline{D} + \overline{A}BC +$$
$$+ BCD + A\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{D} + AB\overline{C} + ABD + ABC.$$

Переходим ко второму этапу. Конъюнкции полученного выражения точно так же сравниваем. Начинаем с левой конъюнкции $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$. Она не склеивается ни с одной конъюнкцией выражения. Поэтому её не подчёркиваем и переходим к конъюнкции $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$. Она также не склеивается ни с одной конъюнкцией. То же самое относится и к конъюнкциям $\overline{A}\,\overline{B}D$ и $\overline{A}CD$. Все их не подчёркиваем и сравниваем конъюнкцию $BC\overline{D}$: $BC\overline{D} + BCD = BC$

Конъюнкции $BC\overline{D}$ и BCD подчеркиваем и переходим к конъюнкции $\overline{A}BC$: $\overline{A}BC + ABC = BC$.

Получилась та же самая конъюнкция. Поскольку она является повторной, то вторично её не записываем. Выполнив все операции сравнения, получим две неповторяющиеся конъюнкции BC и AB. Дизъюнкция этих двух и всех неподчёркнутых конъюнкций образует выражение, являющееся результатом действий второго этапа:

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + BC + AB + A\overline{C}\,\overline{D}.$$

Получили выражение, в котором нет ни одной пары склеивающихся конъюнкций. В нем 7 импликант и 19 вхождений переменных. На этом метод Квайна заканчивается. Выражение, полученное методом Квайна, называется сокращённой дизъюнктивной нормальной формой заданной функции, а каждая его конъюнкция называется простой импликантой**.**

Для всякой булевой функции существует единственная сокращённая ДНФ и единственная сокращенная КНФ.

Задачи для самостоятельного решения

Прежде, чем приступить к выполнению заданий, необходимо составить таблицу минтермов для четырех переменных

Задание 1. *Укажите номера функций, представленных*

а) в СДНФ; б) в СКНФ; в) в ДНФ; г) в КНФ

1. 1) $f(A, B, C) = \overline{A} + B + C$;

2) $f(A, B, C) = ABC;$

3) $f(A, B) = A\overline{B} + \overline{A}B;$

4) $f(A, B, C) = AB + AC + DC;$

5) $f(A, B, C) = (A + B + C)(\overline{A} + D + \overline{\acute{N}})(A + \overline{B} + C);$

6) $f(A, B, C, D) = (\overline{A} + B + \overline{\acute{N}} + D)(\overline{B} + C + D)(A + \overline{\acute{N}} + D);$

7) $f(A, B, C, D) = \overline{A}BC + \overline{B}CD + \overline{A}CD + \overline{A}BD.$

2. 1) $f(A, B, C) = (A + B + C)(\overline{A} + B + \overline{\acute{N}})(A + \overline{B} + C);$

2) $f(A, B, C, D) = (\overline{A} + B + \overline{\acute{N}} + D)(\overline{B} + C + D)(A + \overline{\acute{N}} + D);$

3) $f(A, B, C, D) = \overline{A}BC + \overline{B}CD + \overline{A}CD + \overline{A}BD;$

4) $f(A, B, C) = ABC + AB\overline{\acute{N}} + \overline{A}\,\overline{B}C;$

5) $f(A, B, C) = (A + B + \overline{\acute{N}})(\overline{A} + B + C)(A + \overline{B} + C);$

6) $f(A, B, C) = A\overline{B}C + A\overline{B}C;$

7) $f(A, B, C, D) = AB + CD + AD.$

Задание 2. Разложите по всем переменным данные функции, т.е найти СДНФ. В ответе записать номера минтермов в порядке возрастания. Проверить СДНФ с помощью таблицы истинности

1. а) f(A,B,C,D) = $\overline{A}\overline{C}D$

б) f(A,B,C,D,E) = $A\overline{D}\overline{E}$

в) f(A,B,C) = $A\overline{B}C + B\overline{C} + AC + \overline{A}B;$

г) f(A,B,C,D) = $ABC\overline{C}\overline{D} + \overline{A}CD + \overline{A}\overline{B}C$;

д) f(A,B,C,D) = $ACD + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{C}D + A\overline{B}D$

2. а) f(A,B,C,D) = $\overline{A}\overline{C}\overline{D}$

б) f(A,B,C,D,E) = $\overline{A}\overline{D}\overline{E}$

в) f(A,B,C) = $AB\overline{\acute{N}} + AB\acute{N} + \overline{A}\hat{A}C;$

г) f(A,B,C,D) = $A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}D + \overline{A}\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}$;

д) f(A,B,C,D) = $BC\overline{D} + \overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}\overline{\acute{N}} + \overline{\hat{A}}\overline{C}\overline{D}$.

Задание 3. СДНФ представлены наборами номеров минтермов. Методом Клайна найдите их сокращенные формы. В ответе записать число простых импликат и число вхождений переменных.

1. а) f(A,B,C,D) =(1, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12,13, 14);

б) f(A,B,C,D) = (0, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 14, 15);

в) f(A,B,C,D) =(0, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15).

2. а) f(A,B,C,D) = (0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 15);

б) f(A,B,C,D) = (0, 1, 3, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15);

в) f(A,B,C,D) = (0, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10,11, 12, 14).

V.3. Карты Вейча

Карта Вейча (или диаграмма Карно) — конструкция, дающая возможность выполнять преобразования булевых функций до пяти-шести аргументов.

Идея таких конструкций единая, что показано для разного числа аргументов

Сконструируем карту для двух аргументов (рис. 2).

По вертикали карта разделена на две части: левая - A, правая — та же буквой, но с инверсией. По горизонтали карта также разделена на две части: верхняя - буква B, нижняя обозначена буквой $\overline{B}$.

№	A	B
0	0	0
1	0	0
2	0	1
3	0	1

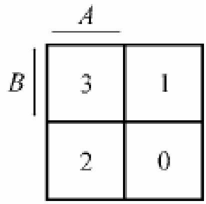


Рис. 3

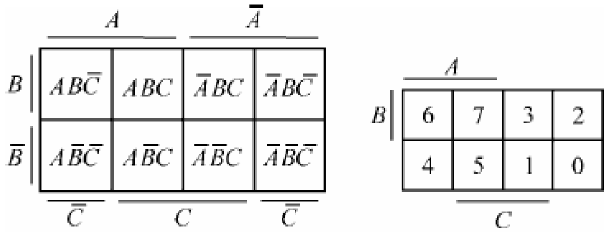
Рис. 1 Рис. 2

Записи в клетках означают пересечение соответствующих областей карты: зоны A и B - минтерм AB; пересечении областей $\overline{A}$ и B дают обозначение минтерма $\overline{A}B$.

№	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Далее записываем $A\overline{B}$ и $\overline{A}\ \overline{B}$ в двух других клетках. Рис. 3 указывает соответствие номера минтерма каждой клетке карты.

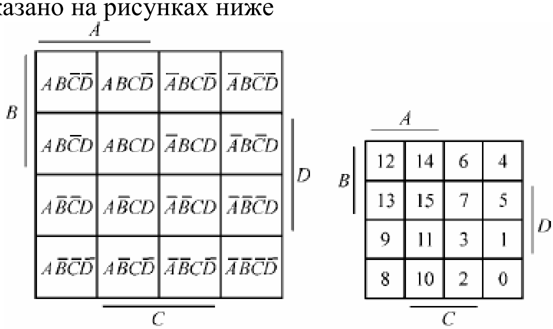
Карта Вейча для трёх аргументов (рис.ниже) сформирована аналогично: таблица минтермов (слева) , карта Вейча, соответствующая карта минтермов. Стоит обратить внимание на строгое соответствие алгебраической записи минтермов и системы расположения букв вокруг карты. На карте минтермов инверсная зона не обозначается, но подразумевается.



Для работы с булевыми функциями желательно иметь все три таблицы для разного числа аргументов перед глазами, пока работа с ними не будет доведена практически до автоматизма.

Составьте таблицу минтермов для четырех аргументов самостоятельно!

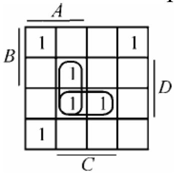
Для четырех аргументов карта составляется аналогично, как показано на рисунках ниже



Составьте таблицу минтермов для пяти аргументов самостоятельно!
Закончим данную логическую линию представлением карты для пяти аргументов

Несомненно, можно построить карту Вейча на любое число аргументов, но на практике, как правило, достаточно рассмотренных случаев выше потому, что с увеличением числа аргументов возрастает сложность карты и снижается эффективность её использования.

Для четырех аргументов рассмотрим правила нахождения простых импликант по группам единиц на картах Вейча:



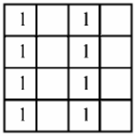


Рис. 5

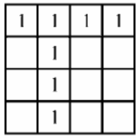
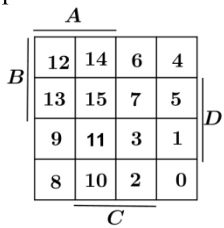


Рис. 6

рис. 4



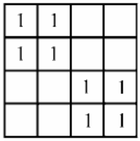


Рис. 7

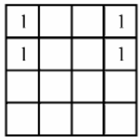


Рис. 8

а) два минтерма склеиваются, если они являются соседними, т. е. расположенными рядом (но не на диагонали) либо на концах строки или столбца. Как показано на рис. 4 рядом стоящие минтермы 11 и 15, 3 и 11 обведены и склеиваются; аналогично, минтермы 4 и 12, 8 и 12 тоже склеиваются;

б) четыре единицы, расположенные в строку, столбец или квадрат, объединяясь, формируют конъюнкцию. На рис. 5: для единиц слева – $A\overline{C}$, справа — $\overline{A}C$. На рис. 6: единицы верхней стоки задают конъюнкцию $B\overline{D}$, единицы второй колонки — AC. Единицы на рис. 7 задают AB и $\overline{A}\ \overline{B}$. На рис. 8 единицы также образуют квадрат при свертывании карты в цилиндр по направлению вертикальной оси до склеивания боковых границ – $B\overline{C}$. Рис. 9 задает $\overline{A}\ \overline{D}$ при свертывании в цилиндр по горизонтальной оси и получении квадрата из единиц. При внимательном рассмотрении рис. 10, свертывая карту одновременно по двум осям, получим конъюнкцию $\overline{C}\ \overline{D}$;

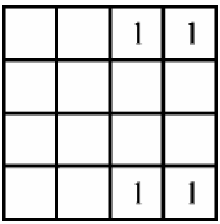


Рис.9

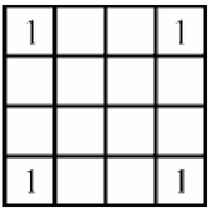


Рис.10

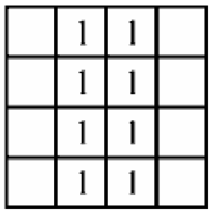


Рис. 11

1	1	1	1
1	1	1	1

Рис. 12

		1	1
		1	1
		1	1
		1	1

Рис.13

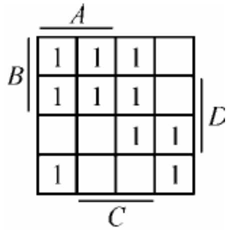


Рис. 14

в) если все клетки карты, относящиеся к одной букве или ее инверсии, заполнены единицами, их восемь, дизъюнкция этих минтермов объединяются в одну букву занятой зоны. На рис. 11 восемь единиц объединяются, поэтому дизъюнкцию соответствующих восьми минтермов можно заменить буквой *C*. Аналогично, на рис. 12 единицы заменяем на букву $\overline{D}$, на рис.13 единицами занята зона буквы $\overline{A}$.

Пример. Преобразуем заданную булеву функцию, найдя для нее простые минтермы: $f = (0,1,3,6,7,8,12,13,14,15)$.

Рис. 14 соответствует этой функции. Минтермы m_0 и m_1 объединяем, соседние единицы и получаем простую импликанту: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. При вертикальном свертывании видим, что можно объединить минтермы m_0 и m_8, получаем импликанту $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$.

Минтерм m_1 с соседними минтермами m_0 и m_3 выдают простые импликанты $\overline{A}\,\overline{B}D$ и $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. Импликанта $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ повторяется и мы записываем только новую простую: $\overline{A}\,\overline{B}D$.

Далее, минтерм m_3 стоит рядом с минтермами m_1 и m_7, записываем новую импликанту: $\overline{A}CD$.

Минтерм m_6 входит в группу единиц, расположенных квадратом. Поэтому простой импликантой будет конъюнкция *BC*, но импликанты $BC\overline{D}$ и $\overline{A}BC$ не являются простыми, содержат *BC*.

Три соседние единицы минтерма m_7, не дают новых простых импликант: объединение m_7 и m_3 есть $\overline{A}CD$, которая уже записана; объединение с m_6 и m_{15} – $\overline{A}BC$ и *BCD* не являются простыми, так как минтерм m_7 входит в квадрат единиц (см. выше).

Новая импликанта *AB* получается из квадрата единиц с минтермом m_{12} , который в свою очередь соседний с минтермом m_8: новая простая импликанта $A\overline{C}\,\overline{D}$. Для m_{13} импликанты $AB\,\overline{C}$ и *ABD* не дают новых. Не получим новых импликант от минтерма m_{14}, который входит в квадраты *AB* и *BC*. То же для минтерма m_{15}.

Найденные выше простые импликанты в дизъюнкции формируют сокращённую дизъюнктивную нормальную форму:

$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}CD + BC + A\overline{C}\,\overline{D} + AB$,

(Сравните результат с методом Квайна).

Минимизация булевых функций при помощи карт Вейча сводится к нахождению простых импликант, но не всех возможных, а лишь тех, которые охватывают все единицы на карте. Начинать минимизацию следует с единиц, входящих в единственную простую импликанту. Обратимся к карте, изображённой на рис. 15.

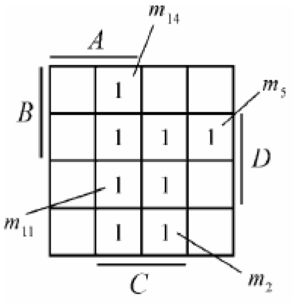


Рис. 15

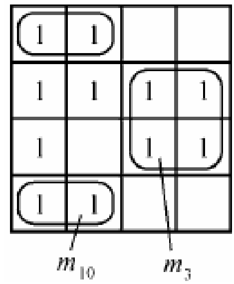


Рис. 16

На ней имеются только три единицы, с которых необходимо начать упрощение функции. Это минтерм m_2, входящий в единственную простую импликанту $\overline{B}C$, затем минтерм m_5, входящий в единственную простую импликанту $\overline{A}BD$, и минтерм $m1_4$, входящий в простую импликанту AC. Начинать минимизацию с других единиц не следует, так как каждая из них входит более чем в одну простую импликанту.

Например, минтерм $m11$ входит в простые импликанты AC, CD, $\overline{B}C$. Если будет выбрана импликанта CD, то минимальную форму найти не удастся, поскольку в минимальной форме

$$f = \overline{B}C + \overline{A}BD + AC$$

импликанты CD нет. Заметим, что три конъюнкции, сумма которых даёт минимальную форму функции, это и есть те единственные простые импликанты для минтермов m_2, m_5 и m_{14}.

Рассмотрим ещё один пример (рис.16). Здесь имеются только два минтерма, входящих в единственные простые импликанты. Это минтермы m_3 и m_{10}. Соответствующие им простые импликанты обведены. На карте остались три единицы. Объединить их можно двумя простыми импликантами:

$$f = A\overline{D} + \overline{A}D + \begin{cases} AB + A\overline{C}; \\ AB + \overline{C}D; \\ BD + A\overline{C}; \\ BD + \overline{C}D. \end{cases}$$

Таким образом, данная функция имеет 4 минимальные формы, каждая из которых содержит 8 вхождений букв.

Далее даны еще несколько примеров. Полагаем, что система их расположения такая же, как на ранее созданных таблицах. Разберите эти примеры

Примеры минимизации булевых функций

Не приступайте к решению своего варианта, если допускаете ошибки в предлагаемых ниже примерах. Если в примере нет ответа, сверьте полученный результат с преподавателем (4 – 6, 8, 9).

Пример 1

f = AB + B$\overline{C}$ + $\overline{B}$C

1	1		1
	1	1	

Пример 2

f = A + $\overline{C}$

1	1		1
1	1		1

Пример3

f = A$\overline{B}$ + AC + $\overline{B}C$ + $\overline{A}B\overline{C}$

	1		1
1	1	1	

Пример 4

1		1	1
1	1		1

Пример 5

	1	1	1
1	1		1

Пример 6

1			1
	1	1	1

Пример 7

1	1	1	1
	1		1
1			1
1	1	1	1

f= $\overline{D}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}+ABC$

Пример 8

1	1	1	
1	1		1
	1		
1			

Пример9

		1	
1	1	1	1
1		1	1
1	1	1	1

В заданиях для самостоятельной работы все функции заданы в СДНФ. Каждое задание состоит из четырех функций. Требуется найти их минимальные ДНФ. Для самоконтроля необходимо указать число знаков дизъюнкции минимальной ДНФ и число вхождений переменных. Проиллюстрируем это на примере следующего задания:

а) $f(A, B, C) = (1,2, 4,$ 6, 7);

б) $f(A, B, C, D)$ = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 15);

в) $f(A, B, C, D)$ = (5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15);

г) $f(A, B, C, D, E)$ = (7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 22, 23, 26, 27, 30, 31).

Решение. Минимизируем первое выражение:

$$f(A, B, C) = AB + AC' + + BC' + A'B'C$$

В его минимальной ДНФ три знака дизъюнкции и девять вхождений букв.

Ответ: 3,9.

Минимизируем второе выражение:

$f(A, B, C,D) = AC' + ABD + A'B'D + + A'CD' + BC'$.

Здесь четыре знака дизъюнкции и 13 букв. Ответ: 4,13.

Минимизируем третье выражение:

$f(A, B, C, D) = BD + ABC' + A'BC + AB'C.$

Ответ: 3, 11.

Минимизируем последнее выражение: $f(A, B, C, D, E) = BD + A'BE + + CDE' + ADE' + A'BC.$ Ответ: 4,14.

Задания для самостоятельной работы

Найти минимальные ДНФ. Для самоконтроля указать число знаков дизъюнкции минимальной ДНФ и число вхождений переменных.

1. а) $f(A, B, C)$ = (0, 3, 4, 7);

б) f (A, B, C, D) = (0, 1,2,3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 15);

в) f(A, B, C, .D) = (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15);

г) $f(A, B, C, D, E)$ = (2, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 18, 22, 23, 26, 27, 30, 31).

2. а) $f(A, B, C)$ = (1,3, б, 7);

б) $f(A, B, C, D)$ = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15);

в) $f(A, B, C, D)$ = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13);

г) $f(A, B, C, D, E)$ = (2, 3, 5, 8, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31).

3. а) $f(A, B, C)$ = (0, 2, 4, 7);

б) $f(A, B, C, D)$ = (0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 12, 14, 15);

в) $f(A, B, C, D)$ = (0, 1, 3, 4, 5., 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15);

г) $f(A, B, C, D, E)$ = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15, 16, 17, 20).

4. а) $f(A, B, C)$ = (2, 3, 6);

б) $f(A, B, C, D)$ = (0, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15);

в) $f(A, B, C, D)$ = (2, 3, 5, 7, 9, И, 14, 15);

г) $f(A, B, C, D, E)$ = (6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23).

5. а) *f(A, B, C)* = (2, 3, 5);
б) *f(A, B, C, D)* = (1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15);
в) *f(A, B, C, D)* = (0, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 15);
г) *f(A, B, C, D, E)* = (10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 30, 31).
6. а) *f(A, B, C)* = (1,4, 6);
б) f(A, *B, C, D)* = (0, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 14, 15);
в) f(A, *B, C, D)* = (0, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15);
г) f(A, *B, C, D, E)* = (0, 1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 18, 20, 22, 24, 30).
7. а) f(A, B, C) = (0, 2,3, 6);
б) f(A, *B, C, D)* = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 15);
в) f(A, *B, C, D)* = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14);
г) f(A, *B, C, D, E)* = (4, 5, 6, 7, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26).
8. а) f(A, *B, C)* = (1,2, 4);
б) f(A, B, C, *D)* = (0, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15);
в) f(A, B, C, *D)* = (0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 15);
г) f(A, B, C,D,E) = (10,11,12,13,14,16,17,19, 20, 21, 25, 27, 29, 31).
9. а) f(A, B, C) = (2, 6, 7);
б) f(A, *B, C, D)* = (1, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 15);
в) f(A, B, C, *D)* = (0, 1, 3, 4, 7, 8, 11, 12 14, 15);
г) f(A, B, *C, D, E)* = (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 20, 21, 22, 23, 30, 31).

V.4. Минимизация в классе КНФ булевых функций, заданных в СДНФ

1		1	
	1	1	
			1
1		1	1

Рис. 1

При помощи карт Вейча можно минимизировать булевы функции, находящиеся в КНФ. В этом случае применяется дополнительно операция инвертирования.

1. Формируем карту Вейча для функции **f,** находящейся в ДНФ(Рис. 1).

2. Для $\mathbf{f}'$ конструируем инверсную карту (рис. 2)

3. Минимизируем ДНФ функции $\mathbf{f}'$.

4. Инвертируя результат (теорема де Моргана), получаем ответ на поставленную задачу..

Пример. Для функции **f**(A, *B, C, D)* = **(0, 1, 2, 6, 7, 8, 2, 15)** найти ее минимальную КНФ.

	1		1
1			1
1	1	1	
	1		

Рис. 2

Решение. Строим карту Вейча данной функции (рис.1), затем ее инверсию (рис.2). Определяем минимальную ДНФ инверсии:

$$\mathbf{f}^{/}(A, B, C, D) = \boldsymbol{A^{/}BC^{/} + B^{/}CD + ACD^{/} + AC^{/}D}\ (*).$$

Достаточно инвертировать полученный результат (*) с помощью теоремы де Моргана:

$$\mathbf{f}(A, B, C, D) = \boldsymbol{(A + B^{/} + C)(B + C^{/} + D^{/})(A^{/} + C^{/} + D)(A^{/} + C + D^{/})}.$$

Констатируем результат: минимальная КНФ формулы содержит 8 знаков «+» и 12 букв. Заносим в ответ эти числовые характеристики формулы.

Ответ: 8, **12.**

Задачи для самостоятельного решения

1. а) f(A, *B,* C) = (0, 4, 7);
   б) f(A, *B, C, D)* = (0, 1, 5, 7, 8, 13, 15);
   в)f(A, B, C,D) = (4, 5, 7, 8, 9, 12, 15);
   г) f(A, B, C, D, E) = (2,6, 7, 9, 18, 22, 23, 26, 27, 30).
2. а) f(A, *B,* C) = (1,3, 7);
   б) f(A, *B, C, D)* = (0, 1, 2, 5, 6, 7, 12, 15);
   в)f(A, B, C,D) = (0,1,3,4, 5, 10,13);
   г) f(A, B, C, D, E) = (6,7,11, 20, 21, 22, 23).
3. а) f(A, *B,* C) = (2, 4, 7);
   б) f(A, *B, C, D)* = (0, 2, 5, 7, 14, 15);
   в)f(A, B, C,D) = (0, 1, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 15);
   г) f(A, B, C, D, E) = (0, 3, 4, 15, 16, 20).
4. а) f(A, *B,* C) = (2,3);
   б) f(A, *B, C, D)* = (0, 2, 10, 11, 13, 15);
   в)f(A, B, C,D) = (2,3, 5, 7,15);
   г) f(A, B, C, D, E) = (6,7,11, 20, 21, 22, 23).
5. а) f(A, *B, C)* = (2, 5);
   б)f(A, B, C, D) = (1, 2, 4, 10, 11, 15);
   в) f)A, B, C, *D)* = (0, 2, 4, 10, 12, 15);
   г) f(A, B, C, *D, E)* = (10, 11,14, 16, 18, 20, 24, 30, 31).
6. а) f(A, B, C) = (1, 4);
   б)f(A, B, *C, D)* = (0, 6,11, 12, 15);
   в) f(A, B, *C, D)* = (0, 4, 5, 7, 12, 15);
   г)f(A, B, C, D, E) =(0,1, 8, 9, 20, 22, 24, 30).
7. а) f(A, B, C) = (0, 2);
   б) f(A, B, C, D) = (0, 1, 4, 5, 12, 14);
   в) f(A, B, C, D) = (0, 1, 2, 8, 9,13, 14);

г) f(A, B, C, D, *E)* = (4, 5, 6, 7, 10, 20, 21, 22, 26).

8. а) f(A, B, C) = (1,2);
   б) f(A, B, C, D) = (0, 4, 10, 11, 12, 15);
   в) f(A, B, C, D) = (0, 2, 4, 8,11, 15);
   г) f(A, B, C, D, E) = (10, 11, 12, 13, 21, 25).
9. а) f(A, B, C) = (6, 7);
   б) f(A,B,C, D) = (1,3, 7,8, 15);
   в) f(A, B, C, D) = (0, 1,3, 11, 15);
   г) f(A, *B, C, D, E)* = (4, 5, 6, 10, 13, 21, 22, 31).
10. а) f(A, B, C) = (3, 4);
   б) f(A, B, C, D) = (2, 3,6, 7,11);
   в) f(A, B, C, *D)* = (0, 1, 3, 5, 14, 15);
   г) f(A, B, C, *D, E)* = (5, 10, 11, 13, 20, 21, 22).
11. а) f(A, B, C) = (1,3, 5);
   б) f(A, B, C, *D)* = (0, 1, 5, 6, 9, 14);
   в) f(A, B, C, D) = (0, 1,2, 7,8);
   г) f(A, B, C, *D, E)* = (0, 1, 10, 11, 16, 17).
12. а) f(A, B, C) = (1,7);
   б) f(A, B, C, D) = (0,4, 6, 15);
   в) f(A, B, C, D) = (2, 12, 13, 15);
   г) f(A, B, C, D, *E)* = (10, 16, 18, 20, 29).

V.5. Минимизация в классе нормальных форм

В задачах далее будем рассматривать всякую булеву функцию одновременно в дизъюнктивной и конъюктивной минимальных формах. Всякая ДНФ и КНФ формулы имеет много минимальных форм, но мы будем находить лишь одну из них, как показано ниже.

Задача 1. Для функции f(A, B, C, D) = (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15) найдите равносильные ей минимальные ДНФ и КНФ и укажите в ответе число вхождений переменных в каждую из них.

Решение. Минимальная ДНФ

1	1	1	1
1	1	1	1
1		1	1
1	1		

есть $f = B + A'D + AD' + FC'$, которая содержит 7 переменных. Инверсия ДНФ (рис. 2) .

$f' = A'B'D' + AB'CD$, инвертируя данную формулу, получим минимальную КНФ, в которой также 7 вхождений переменных:

	1		
		1	1

Рис.2

$f' = (A + B + D)(A' + B + C' + D')$.

Ответ: 7, 7.

Задача 2. Для функции

$f(A, B, C, D) =$ (1, 3, 7, 11, 12, 13, 14, 15) найдите равносильные ей минимальные ДНФ и КНФ и укажите в ответе число вхождений переменных в каждую из них.

1	1		
1	1	1	
	1	1	1

Рис.3

Решение.

Для этой функции имеется единственная ДНФ $f = AB + CD + A'B'D$. 7 букв. Далее, минимальная ДНФ инверсии: $f' = A'D' + B'D' + A'BC' + AB'C'$, и инвертируя данную формулу, получим минимальную КНФ, в которой 10 вхождений переменных: $f' = (A + D)(B + D)(A + B' + C)(A' + B + C)$.

		1	1
			1
1			
1	1	1	1

Рис.4

Ответ: 7, 10

Иногда существует несколько ДНФ, и не важно, какую из них возьмем за основу.

Задача 3. Для функции $f =$ (0, 1, 2, 3, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15) найдите равносильные ей минимальные ДНФ и КНФ и укажите в ответе число вхождений переменных в каждую из них.

		1	1
			1
|			
1			

Рис.6

1	1		
1	1	1	
1	1	1	1
	1	1	1

Рис.5

Решение Эта функция имеет 4 ДНФ и одна из них (рис. 5)

$f = AB + CD + A'B' + AD + B'C$. Здесь 10 букв.(Найдите все четыре ДНФ).

Минимальная ДНФ инверсия (рис. 6):

$f' = A'BD' + A'BC' + AB'C'D'$, инвертируя данную формулу, получим минимальную КНФ, в которой 10 вхождений переменных:

$f' = (A + B' + D)(A + B' + C)(A' + B + C + D)$.

Ответ: 7, 10.

Задачи для самостоятельного решения

1. а) f = (1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15);
   б) f = (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15).
2. а) f = (0, 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15);
   б) f = (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15).
3. а) f = (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15);
   б) f = (2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15).
4. а) f = (0, 1, 2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15);
   б) f = (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15).
5. а) f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15);
   б) f = (0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15).
6. а) f = (0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15);

б) f = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15).
7. а) f = (0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15);
б) f = (1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15).
8. а) f = (0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15);
б) f = (0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15).
9. а) f = (1,2,3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12,13, 15);
б) f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13).
10. а) f = (0, 1,2,3,4,6,7,8, 10, 11,12,13, 15);
б) f = (0, 1,3,4,5,6,7,8,10,12, 13,14,15).

V.6. Формы высших порядков, ДНФ, КНФ

Мы изучаем ДНФ или КНФ булевых функций, но кроме них имеют место также и *формы высших порядков*, что рассмотрим на примерах.

Является ли функция $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{E})$ нормальной и почему? Ответ: нет, – в скобке присутствует слагаемое АС, хотя функция есть произведение сумм.

Определение. Функция, представленная отдельным аргументом или его инверсией, будем считать функцией *нулевого порядк*а.

Пример 1. $\boldsymbol{f} = A$, $\boldsymbol{f} = B^{/}$, $\boldsymbol{f} = 0$, $\boldsymbol{f} = 1$, $\boldsymbol{f} = \alpha$, $\boldsymbol{f} = \gamma^{/}$.

Определение. Функция, представленная одним из трех случаев:

а) она есть дизъюнкция аргументов в прямой или инверсной форме ($\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}^{/}$);

б) она есть конъюнкция аргументов в прямой или инверсной форме ($\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A\,C\,D}^{/}$);

в) она есть инверсия $\boldsymbol{f} = \gamma^{/}$ функции γ не ниже первого порядка,
будем считать функцией *первого порядк*а.

Далее, если вместо неинверсного аргумента в пункте а) подставим конъюнкцию нескольких аргументов, то получим функцию *второго порядка*. Например, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{CBE} + \boldsymbol{D}^{/}$.

Если вместо неинверсного аргумента в пункте б) подставим дизъюнкцию нескольких аргументов, то получим функцию *второго порядка*. Например, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}^{/})\,\mathbf{D}^{/}$.

Порядок формулы повышается на единицу, если поставить знак инверсии над дизъюнкцией или конъюнкцией: $f = \overline{AB\overline{C}}$, $f = \overline{A+B+\overline{C}}$ – функции второго порядка.

Если в выражение $f = A + CBE + D'$, вместо C подставим дизъюнкцию: $f = A + (P + Q' + R)BE + D'$, – получим выражение *третьего порядка*.

Также $f = A(PQ + B')\,D'$, – выражение *третьего порядка*.

Пример 2. Выражение $f = (A + BC)D + E$ имеет уже четвертый порядок: первый образует дизъюнкция, находящаяся вне скобок, второй — конъюнкция, находящаяся вне скобок, третий — дизъюнкция в скобках и четвертый — конъюнкция в скобках.

Задача. Определите порядок функции

$f = [(A + BC)(D + E) + K]\cdot M + N$.

Ответ: шестой.

А именно:

«$+ N$» дает первый порядок как дизъюнкция вне квадратных скобок,

«$\cdot M$» дает второй порядок как конъюнкция вне квадратных скобок,

«$+ K]$» дает третий порядок: дизъюнкция в квадратных скобках,

« $(A + BC)(D + E)$» – четвертый как конъюнкция между круглыми скобками,

«$(D + E)$» - пятый: дизъюнкция в круглых скобках и

«BC» - шестой: конъюнкция в круглых скобках.

Среди всех равносильных форм булевых функций, число которых неограниченно, особое внимание уделим нормальным формам и формам высших порядков.

В следующих примерах имейте ввиду, что в некоторых случаях минимальные ДНФ и КНФ совпадают.

Пример 3. Укажите номера функций, представленных:

а) в минимальной ДНФ; б) в минимальной КНФ:

1) $f(A, B, C, D) = AB' + BC + D$;
2) $f(A, B, C, D) = A'B'D + C'D + AC$;
3) $f(A, B, C, D) = BCD + A'$;
4) $f(A, B, C, D) = A'B\,C'D + ABCD' + \overline{AB}\,C'D$;
5) $f(A, B, C, D) = A'B + AC' + B'C$;
6) $f(A, B, C, D) = (A' + B + C)(A + B' + D)(B + C' + D)$;
7) $f(A, B, C, D) = (A' + B' + C)(A + B + C')(A + B + D)$;

Решение. Для первой, третьей и пятой функций минимизируйте на карте Вейча и убедитесь, что они представлены в минимальных ДНФ.

Вторая функция есть ДНФ, но не минимальная. Минимизируйте ее и должны получить: $f(A, B, C, D) = B'D + C'D + AC$, – имеем шесть вхождений переменных. Сравните с представленным вариантом 2).

В 4) есть выражение $\overline{AB}$ и, следовательно, функция не имеет нормальную форму.

Формулы 6) и 7) – минимальные КНФ (почему?).

Ответ: а) 1, 3, 5; б) 6, 7.

Задачи для самостоятельного решения

1. Укажите номера функций нулевого порядка:

1) $\boldsymbol{f}$ = AB; 3) $\boldsymbol{f}$ = A; 5) $\boldsymbol{f}$ = A A' + A; 7) $\boldsymbol{f}$ =0 ;
2) $\boldsymbol{f}$ = AA; 4) $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{X'}\boldsymbol{X}$; 6) $\boldsymbol{f}$ = 1 ; 8) $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{X'}$.

2. Укажите номера функций второго порядка:

1) $\boldsymbol{f = BC}$; 4) $\boldsymbol{f = (AB + C)D}$; 7) $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{C(C+C)(C} + \mathrm{C})$;
2) $\boldsymbol{f = AA + A}$; 5) $\boldsymbol{f = (A + A)(A + AA)}$; 8) $\boldsymbol{f = AA'\,BB'}$;
3) $\boldsymbol{f = BC + DE + FK}$; 6) $\boldsymbol{f = C(C + C)}$; 9) $\boldsymbol{f = AA'} + 0$.

3. Укажите номера функций первого порядка:

1) $\boldsymbol{f = A} \cdot 0$; 4) $\boldsymbol{f} = 1 + 1$; 7) $\boldsymbol{f = B + C}$;
2) $\boldsymbol{f = A \cdot A'}$; 5) $\boldsymbol{f = A + B}$; 8) $\boldsymbol{f = A(A + A)}$;
3) $\boldsymbol{f = CC'} + 1$; 6) $\boldsymbol{f = A} + 0$; 9) $\boldsymbol{f = A + AB}$.

4. Найдите порядок функций:

1) $\boldsymbol{f = A + B + C' + D}$; 5) $\boldsymbol{f = (A + A)A + A}$;
2) $\boldsymbol{f = PQR'\,S'}$; 6) $\boldsymbol{f = (A + BC)(A + BC)}$;
3) $\boldsymbol{f = PO}\overline{RS}$; 7) $\boldsymbol{f = (A + BC)(A + B'\,C)A + A'}$;
4) $\boldsymbol{f} = \overline{\overline{AB}C} + \boldsymbol{E}$; 8) $\boldsymbol{f = [(A + BC)(A + B'\,C)A + A']E + F}$.

5. Укажите номера функций третьего порядка:

1) $\boldsymbol{f = AB + CD}$; 4) $\boldsymbol{f} = (\mathrm{A} + \boldsymbol{A'\,A)A}$;
2) $\boldsymbol{f = (A + BC)D + E}$; 5) $\boldsymbol{f = (A + BC)(A + B)}$;
3) $\boldsymbol{f = (A + AB)A}$; 6) $\boldsymbol{f = (A + B)(A + B) + A}$.

В каждом из следующих заданий (6 - 7) семь булевых функций. Среди них необходимо определить все минимальные ДНФ и минимальные КНФ, указать их номера в порядке возрастания для каждого вопроса.

6. Укажите номера функций, представленных:

а) в минимальной ДНФ ; б) в минимальной КНФ:

1) $\boldsymbol{f}(\mathrm{A, B, C, D}) = \overline{AB}\,\boldsymbol{CD + ABCD}$;
2) $\boldsymbol{f}(\mathrm{A, B, C}) = \boldsymbol{(A + B + C)(A' + B + C')(A + B' + C')}$;
3) $\boldsymbol{f}(\mathrm{A, B, C, D}) = \boldsymbol{(A' + B + C + D)\,ABC'\,D}$;
4) $\boldsymbol{f}(\mathrm{A, B, C, D}) = \boldsymbol{(A' + B + C' + D)\,(A' + B' + C + D)\,(A + B' + C' + D')}$;
5) $\boldsymbol{f}(\mathrm{A, B, C, D}) = \boldsymbol{A'BC + B'CD + A'BD}$;
6) $\boldsymbol{f}(\mathrm{A, B, C}) = \boldsymbol{AB'C + ABC' + A'B'C'}$;
7) $\boldsymbol{f}(\mathrm{A, B, C, D}) = \boldsymbol{A + BCD(C + D)}$.

7. Укажите номера функций, представленных:

а) в минимальной ДНФ; б) в минимальной КНФ:

1) $\boldsymbol{f}$ (A, B, C, D) = $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{C})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}' + \boldsymbol{D})(\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D})$;

2) $\boldsymbol{f}$ (A, B, C, D) = $\boldsymbol{AB'C'} + \boldsymbol{B'CD} + \boldsymbol{ABCD'} + \boldsymbol{A'BD}$;

3) $\boldsymbol{f}$ (A, B, C, D) = $(\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D})\,\boldsymbol{ABC'}\,\boldsymbol{D}$;

4) $\boldsymbol{f}$ (C, D, E) = $\overline{CDE} + \boldsymbol{CDE}$;

5) $\boldsymbol{f}$ (A, B, M) = $\boldsymbol{AB'M} + \boldsymbol{ABM'} + \boldsymbol{A'B'M'}$

6) $\boldsymbol{f}$ (A, B, C, D) = $(\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}')(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{C}')(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$;

7) $\boldsymbol{f}$ (A, B, C) = $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{ABC}$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Булгаков И.Н., Федотенко Г.Ф. Дискретная математика. Элементы теории. Задачи и упражнения: Учеб. пособие. – Воронеж: Из-во ВГУ, 2004. – 62 с.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.

3. Шевелев Ю. П. Дискретная математика. Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 592 с.

4. Шевелев Ю. П., Писаренко Л.А., ШевелевМ.Ю. Сборник задач по дискретной математике (для практических занятий в группах). Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 528 с.

5. Эвнин А.Ю. Задачник по дискретной математике. – Челябинск: ЮУрГУ, 2002. – 164 с.

6. Мытыцина Т.Н. Дискретная математика. Решение рекуррентных соотношений: практикум / Т.М. Мытыцина. – Кострома КГУ им. Н.А. Некрасова, 2010. – 35 с.

Дополнительная

7. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей. – М.: «Просвещение», 1976. – 48 с.

8. Ерош И.Л. Дискретная математика. Комбинаторика: Учеб. пособие/ СПбГУАП.СПб.,2001. – 37 с.

9. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие./ Ваиилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1987. – 432 с.

Учебное издание

Троякова Галина Александровна

Дискретная математика

Учебно-методическое пособие
для студентов физико-математического факультета

Редактор *А.Р. Норбу*
Дизайн обложки *К.К. Сарыглар*

Сдано в набор: 15.06.2018
Подписано в печать: 03.07.2018
Формат бумаги 60×84 $^{1}/_{16}$ Бумага офсетная.
Физ. печ.л. 6,0. Усл. печ.л. 6,0.
Заказ № 1413. Тираж 50 экз.

667000, г. Кызыл, Ленина, 36
Тувинский государственный университет
Издательство ТувГУ